A. Einstein, Physikalische Zeitschrift **18,** 121 **1917**

К КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

А. Эйнштейн
(Получено 1917 г.)

— — ⋄ ◇ ⋄ — —

Русский перевод взят из сборника: “Собрание научных трудов” Под редакцией И.Е. Тамма М. Наука, 1966, т. 3, стр. 393.

— — ⋄ ◇ ⋄ — —

Формальное сходство кривой распределения по длинам волн теплового излучения с законом распределения скоростей Максвелла слишком поразительно, чтобы оно могло долго оставаться нераскрытым. Действительно, уже В. Вин в важной теоретической работе, в которой он вывел свой закон смещения

$$\rho = \nu^3 f(\nu/T), \tag{1}$$

пришел благодаря этому сходству к такому определению формулы излучения, которое сыграло в дальнейшем большую роль. Как известно, он вывел при этом следующую формулу:

$$\rho = \alpha\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}}, \tag{2}$$

которая и сегодня считается правильной в качестве предельного закона для больших значений ν/T (формула излучения Вина). Сегодня мы знаем, что никакое рассмотрение, основанное на классической механике и электродинамике, не может привести к правильной формуле излучения и что классическая теория обязательно дает формулу Рэлея

$$\rho = \frac{k\alpha}{h}\,\nu^2 T. \tag{3}$$

Когда Планк в предположении о дискретных элементах энергии вывел в своем основополагающем исследовании формулу излучения

$$\rho = \alpha\nu^3 \, \frac{1}{e^{-\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \tag{4}$$

из которой как быстрое следствие развилась квантовая теория, рассуждение Вина, которое привело к уравнению (2), естественно, было забыто.

Недавно я нашел применение первоначальному рассмотрению Вина [1] основанному на главных положениях квантовой теории, к выводу формулы излучения Планка, в котором проявляется связь между максвелловской кривой распределения по длинам волн. Этот вывод заслуживает внимания не только благодаря своей простоте, но и в особенности потому, что он вносит некоторую ясность в непонятный нам еще процесс испускания и поглощения излучения веществом. Положив в основу некоторые гипотезы об испускании и поглощении излучения молекулами, понятные с точки зрения квантовой теории, я показал, что при температурном равновесии молекулы с состояниями, распределенными в смысле квантовой теории, находятся в динамическом равновесии с излучением Планка; таким путем формула Планка (4) получается поразительно простым и общим способом. Она получается из условия, что требуемое квантовой теорией распределение состояний внутренней энергии молекул должно определяться только поглощением и испусканием излучения.

Однако если принятые гипотезы о взаимодействии излучения и вещества верны, они должны давать больше, чем правильное статистическое распределение внутренней энергии молекул. При поглощении и испускании излучения имеет место также передача молекулам импульса; это приводит к тому, что благодаря одному лишь взаимодействию излучения с молекулами устанавливается определенное распределение последних по скоростям. Очевидно, оно должно быть таким же, как распределение по скоростям молекул, вытекающее из предположения, что молекулы взаимодействуют только путем взаимных столкновений, т.е. оно должно совпадать с распределением Максвелла. Необходимо потребовать, чтобы средняя кинетическая энергия (на одну степень свободы), которой обладает молекула в поле излучения Планка с температурой ,

[1] A. Einstein. Verhandl. Dtsch. Phys. Ges., 18, 318 (1916) (Статья 43). В настоящем исследовании повторяются рассуждения, приведенные в только что процитированной статье.

была равна $kT/2$; это условие должно выполняться независимо от природы рассматриваемых молекул и от частот излучений, которые они поглощают и испускают. В настоящей статье мы покажем, что в целом это важное требование действительно выполняется; тем самым наши простые гипотезы об элементарных процессах испускания и поглощения получают новую поддержку.

Однако для того, чтобы получить упомянутый результат, требуется некоторое дополнение принятых ранее за основу гипотез, которые относятся исключительно к обмену энергией. Возникает вопрос: испытывает ли молекула отдачу при поглощении или испускании энергии ε? Рассмотрим с точки зрения классической электродинамики, например, спонтанное излучение. Когда тело излучает энергию ε, оно испытывает отдачу (импульс) ε/c, если все количество излучения ε испускается в одном направлении. Но если излучение является пространственно–симметричным процессом, например сферическими волнами, то вообще нет никакой отдачи. Эта возможность играет роль также и в квантовой теории излучения. Если молекула при переходе из одного возможного с точки зрения квантовой теории состояния в другое получает или отдает энергию ε в виде излучения, то элементарный процесс такого рода можно представить себе либо частично или полностью пространственно–направленным, либо симметричным (ненаправленным). *Оказывается, что к непротиворечивой теории мы придем только в том случае, если все элементарные процессы будем считать полностью направленными.* В этом состоит основной результат последующих рассуждений.

§ 1 Основные гипотезы квантовой теории. Каноническое распределение состояний.

Согласно квантовой теории молекула определенного рода, если отвлечься от ее ориентации и поступательного движения, может занимать лишь дискретный набор состояний $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ с внутренними энергиями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Если молекулы такого рода принадлежат газу с температурой , то относительная частота W_n этого состояния Z_n дается формулой статистической механики, которая соответствует каноническому распределению состояний:

$$W_n = p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}. \tag{5}$$

В этой формуле $k = \frac{R}{N}$ – известная постоянная Больцмана, p_n – не зависящее от температуры число, характеризующее молекулу и $n-e$ квантовое состояние; оно может быть названо статистическим “весом” этого состояния. Формулу (5) можно вывести из принципа Больцмана или чисто термодинамическим способом. Равенство (5) является выражением наиболее широкого обобщения максвелловского закона распределения скоростей.

Последние принципиальные успехи квантовой теории относятся к теоретическому отысканию возможных с точки зрения квантовой теории состояний Z_n и их весов p_n. Для настоящего принципиального исследования не требуется более детального определения квантовых состояний.

§ 2 Гипотезы об обмене энергией посредством излучения.

Пусть Z_n и Z_m есть два возможных в смысле квантовой теории состояния молекулы газа, энергии которых ε_n и ε_m удовлетворяют неравенству

$$\varepsilon_m > \varepsilon_n.$$

Молекула может переходить из состояния Z_n в состояние Z_m с поглощением энергии $\varepsilon_m - \varepsilon_n$; точно также возможен переход из состояния Z_m в состояние Z_n с выделением энергии в виде излучения. Излучение, которое молекула при этом поглощает или испускает, будет иметь характеристическую частоту ν, зависящую от рассматриваемой комбинации индексов (m, n).

Помимо законов, которые управляют этими переходами, введем некоторые гипотезы, которые получаются посредством переноса соотношений, известных из классической теории для резонатора Планка, в неизвестную еще квантовую теорию.

а) *Спонтанное излучение.* Как известно, согласно Герцу, колеблющийся резонатор Планка излучает энергию независимо от того, возбуждается ли он внешним полем или нет. В соответствии с этим при отсутствии возбуждения внешними факторами молекула может переходить из состояния Z_m в состояние Z_n с испусканием энергии излучения $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ с частотой μ. Вероятность dW того, что этот переход действительно произойдет в течение времени dT, равна

$$dW = A_m^n \, dt, \tag{A}$$

где A_m^n означает характеристическую константу для рассматриваемой комбинации индексов.

Принятый статистический закон соответствует радиоактивной реакции, воображаемому элементарному процессу такой реакции, при котором излучаются только γ – лучи. Нет необходимости допускать, что этот процесс не требует времени; это время должно быть лишь пренебрежимо мало по сравнению с тем временем, в течение которого молекула находится в состоянии Z_1, и т.д.

б) *Индуцированное излучение.* Если резонатор Планка находится в поле излучения, то энергия резонатора изменяется благодаря тому, что электромагнитное поле излучения совершает над резонатором работу; эта работа может быть положительной или отрицательной, в зависимости от соотношения фаз резонатора и осциллирующего поля. В соответствии с этим введем следующую квантовотеоретическую гипотезу. Под действием плотности излучения ρ с частотой ν молекула может переходить из состояния Z_n в состояние Z_m; при этом молекула принимает энергию излучения $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ согласно вероятностному закону

$$dW = B_n^m \rho dt. \tag{B}$$

Точно также допустим, что под действием облучения возможен переход $Z_m \to Z_n$, при котором освобождается энергия излучения $\varepsilon_m - \varepsilon_n$, по вероятностному закону

$$dW = B_m^n \rho dt. \tag{B'}$$

В последних равенствах B_n^m и B_m^n являются постоянными. Оба процесса мы назовем “изменением состояния под действием излучения”.

Спрашивается теперь, какой импульс передается молекуле при рассматриваемом изменении состояния. Начнем с процессов индуцированного излучения. Если пучок лучей определенного направления совершает работу над резонатором Планка, этот пучок теряет соответствующую энергию. Этому переносу энергии, согласно выражению для импульса, соответствует также перенос импульса от пучка лучей к резонатору. Таким образом, последний испытывает действие сил в направлении пучка лучей. Если передаваемая энергия отрицательна, то и действие сил на резонатор имеет соответствующее направление. Очевидно, в случае квантовой гипотезы это означает следующее. Если в результате облучения пучком лучей произойдет процесс $Z_n \to Z_m$, то молекула получит импульс $(\varepsilon_m - \varepsilon_n)/c$ в направлении распространения пучка. В результате процесса индуцированного излучения $Z_m \to Z_n$ передаваемый импульс имеет такую же величину, но противоположное направление. В случае, когда молекула подвержена одновременному действию нескольких пучков лучей, мы предположим, что полная энергия $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ элементарного процесса отнимается или прибавляется к одному из этих пучков, так что и в этом случае молекуле также передается импульс $(\varepsilon_m - \varepsilon_n)/c$.

При потере энергии в результате спонтанного излучения в случае резонатора Планка последний в целом не получает никакого импульса, так как, согласно классической теории, спонтанное излучение имеет вид сферической волны. Однако уже отмечалось, что мы можем прийти к непротиворечивой квантовой теории лишь в том случае, если мы предположим, что процесс спонтанного излучения также является направленным. Тогда в каждом элементарном процессе спонтанного излучения $(Z_m \to Z_n)$ молекуле передается импульс, величина которого равна $(\varepsilon_m - \varepsilon_n)/c$. Если молекула изотропна, то мы должны считать равновероятными все направления спонтанного излучения. В случае неизотропной молекулы мы придем к такому же утверждению, если ее ориентация меняется с течением времени по законам случая. Впрочем, такого рода предположение нужно применять также и для статистических законов индуцированного излучения () и (B'), ибо в противном случае константы B_n^m и B_m^n должны были бы зависеть от направления; мы можем избежать этого, приняв изотропность или псевдоизотропность (посредством образования среднего по времени) молекулы.

§ 3 Вывод планковского закона излучения.

Найдем теперь эту эффективную плотность излучения ρ, которая должна существовать для того, чтобы энергетический обмен между излучением и молекулами, осуществляемый по статистическим законам (), () и ($'$), не нарушал распределения состояний молекул, которое отвечает распределению (5). Для этого необходимо и достаточно, чтобы за единицу времени в среднем происходило столько же элементарных процессов типа (B), сколько и типа (A) и (B') вместе взятых. В силу (5), (A), (B), (B') это условие дает для элементарных процессов, соответствующих комбинации индексов (m, n) уравнение

$$p_n e^{-\dfrac{\varepsilon_n}{kT}} B_n^m \rho = p_m e^{-\dfrac{\varepsilon_m}{kT}} (B_m^n\, \rho + A_m^n).$$

Примем, далее, что с ростом величина ρ должна стремиться к бесконечности; в таком случае между константами B_n^m и B_m^n должно существовать соотношение

$$p_n B_n^m = p_m B_m^n. \qquad (6)$$

Тогда в качестве условия динамического равновесия получим из нашего уравнения

$$\rho = \frac{A_m^n / B_m^n}{e^{\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{kT}} - 1}. \tag{7}$$

Это выражение представляет собой зависимость плотности излучения от температуры, согласно закону Планка. Из закона смещения Вина (1) немедленно следует, что

$$\frac{A_m^n}{B_m^n} = \alpha\nu^3 \tag{8}$$

and

$$\varepsilon_m - \varepsilon_n = h\nu, \tag{9}$$

где α и h являются универсальными постоянными. Для того чтобы получить численное значение постоянной α, нужно иметь точную теорию электродинамических и механических процессов; здесь мы вынуждены пока что ограничиваться рассмотрением предельного рэлеевского случая высоких температур, для которых справедлива в пределе классическая теория.

Соотношение (9) образует, как известно, второе основное правило в теории спектров Бора, о котором после усовершенствования Зоммерфельда и Эпштейна можно уже утверждать, что оно принадлежит к незыблемым основам нашей науки. Как я показал, оно включает также и закон фотохимического эквивалента.

§ 4 Метод расчета движения молекул в поле излучения.

Обратимся теперь к исследованию движений, которые совершают наши молекулы под влиянием излучения. Мы воспользуемся при этом методом, который хорошо известен из теории броуновского движения и неоднократно использовался мною в числовых расчетах движений в пространстве с излучением. Для упрощения расчета мы проведем его лишь для случая движений в одном направлении, в направлении оси X системы координат. Кроме того, мы ограничимся расчетом среднего значения кинетической энергии поступательного движения, отказавшись, таким образом, от доказательства того, что эти скорости v распределены по закону Максвелла. Пусть масса молекулы достаточно велика, чтобы можно было пренебречь высшими степенями v/c по сравнению с более низкими; тогда мы можем применить к молекуле обычную механику.

Далее, не нарушая общности, мы можем считать, что состояния с индексами m и n являются единственными, в которых могут находиться молекулы.

Импульс Mv молекулы испытывает за короткое время τ изменения двух видов. Несмотря на то, что излучение происходит равномерно по всем направлениям, молекула в результате своего движения будет испытывать действие силы, которое вызвано излучением и противодействует движению. Эта сила равна Rv где R означает некоторую константу, которая будет вычислена позже. Эта сила заставила бы молекулу покоиться, если бы беспорядочный характер действия излучения не приводил к тому, что за время τ молекула получит импульс Δ переменного знака и переменной величины; это несистематическое влияние, вопреки сказанному ранее, вызовет определенное движение молекулы. В конце рассматриваемого короткого промежутка времени τ импульс молекулы будет иметь значение

$$Mv - Rv\tau + \Delta.$$

Поскольку распределение скоростей должно оставаться постоянным во времени, приведенная величина по своему среднему абсолютному значению должна быть равна величине Mv; средние квадратичные значения обеих величин, взятые за большой промежуток времени или по большому числу молекул, должны быть равны друг другу:

$$\overline{(Mv - Rv\tau + \Delta)^2} = \overline{(Mv)^2}.$$

Поскольку в расчете мы специально выявили систематическое влияние v на импульс молекулы, мы пренебрежем средним значением $\overline{v\Delta}$. Поэтому, раскрывая левую часть уравнения, получаем

$$\overline{\Delta^2} = \overline{2RMv^2\tau}. \tag{10}$$

Среднее значение $\overline{v^2}$, к которому приводит взаимодействие излучения, имеющего температуру , с нашими молекулами, должно быть равно среднему значению $\overline{v^2}$, которое имеет молекула газа при температуре , согласно газовым законам кинетической теории газа, ибо в противном случае присутствие нашей молекулы нарушало бы равновесие между тепловым излучением и любым газом с такой же температурой. Следовательно, должно быть

$$\frac{\overline{Mv^2}}{2} = \frac{kT}{2}. \tag{11}$$

Таким образом, соотношение (10) может быть записано в виде:

$$\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau} = 2RkT. \tag{12}$$

Дальнейшее исследование будет построено следующим образом. С помощью наших гипотез о взаимодействии между излучением и молекулами можно рассчитать $\overline{\Delta^2}$ и R для заданного излучения $[\rho\ (\nu)]$. Если затем выразить ρ как функцию от ν и в соответствии с формулой Планка (4) и подставить полученный результат в (12), то последнее соотношение должно выполняться тождественно.

§ 5 Вычисление R.

Пусть молекула рассматриваемого рода равномерно движется со скоростью v вдоль оси X системы координат K. Найдем среднее значение импульса, передаваемого излучением молекуле в единицу времени. Чтобы вычислить его, мы должны описывать излучение в системе координат K', которая покоится относительно рассматриваемой молекулы. Ведь наши гипотезы об испускании и поглощении мы сформулировали лишь для покоящейся молекулы. Преобразование к системе K' много раз приводилось в литературе, особенно точно в берлинской диссертации Мозенгейля. Полноты ради я все же повторю здесь простые рассуждения.

В системе излучение изотропно, т.е. определенному бесконечно малому телесному углу $d\kappa$, относящемуся к этому направлению излучения, соответствует излучение в области частот $d\nu$ на единицу объема:

$$\rho d\nu\ \frac{d\kappa}{4\pi}, \tag{13}$$

где ρ зависит только от частоты ν, но не от направления. Этому приведенному излучению соответствует в системе координат $'$ приведенное излучение, которое также характеризуется областью частот $d\nu'$ и определенным телесным углом $d\kappa'$. Объемная плотность этого приведенного излучения равна

$$\rho'\ (\nu', \varphi') d\nu'\ \frac{d\kappa'}{4\pi} \tag{13'}.$$

Тем самым определено ρ'. Оно зависит от направления, определяемого известным образом через угол φ' с осью X' и угол ψ' проекции на плоскость $Y' - Z'$ с осью Y'. Этим углам соответствуют углы φ и ψ, которые аналогичным образом определяют направление $d\kappa$ по отношению к .

Прежде всего ясно, что между выражениями (13) и (13$'$) должен существовать тот же самый закон преобразования, что и для квадратов амплитуд A^2 и A'^2 некоторой плоской волны соответствующего направления. Следовательно, в выбранном нами приближении

$$\frac{\rho'(\nu',\varphi')d\nu' d\kappa'}{\rho(\nu)d\nu d\kappa} = 1 - 2\ \frac{v}{c}\ \cos\varphi, \tag{14}$$

or

$$\rho'(\nu',\varphi') = \rho(\nu)\frac{d\nu}{d\nu'}\ \frac{d\kappa}{d\kappa'}\left(1 - 2\ \frac{v}{c}\ \cos\varphi\right). \tag{14$'$}$$

Далее, теория относительности дает в выбранном приближении обычные формулы

$$\nu' = \nu\ (1 - \frac{v}{c}\cos\varphi), \tag{15}$$

$$\cos\varphi' = \cos\varphi - \frac{v}{c} + \frac{v}{c}\cos^2\varphi, \tag{16}$$

$$\psi' = \psi. \tag{17}$$

Из (15) в соответствующем приближении следует

$$\nu = \nu'\ (1 + \frac{v}{c}\cos\varphi').$$

Следовательно, в выбранном приближении имеем также

$$\rho(\nu) = \rho\ (\nu' + \frac{v}{c}\ \nu'\cos\varphi'),$$

или

$$\rho(\nu) = \rho(\nu') + \frac{\partial\rho(\nu')}{\partial\nu}\left(\frac{v}{c}\ \nu'\cos\varphi'\right). \tag{18}$$

Далее, согласно соотношениям (15), (16) и (17),

$$\frac{d\nu}{d\nu'} = (1 + \frac{v}{c}\cos\varphi')$$

$$\frac{d\kappa}{d\kappa'} = \frac{\sin\varphi\ d\varphi\ d\psi}{\sin\varphi'\ d\varphi'\ d\psi'} = \frac{d(\cos\varphi)}{d(\cos\varphi')} = 1 - 2\ \frac{v}{c}\ \cos\varphi'.$$

В силу этих двух соотношений и соотношения (18) равенство (14$'$)переходит в следующее:

$$\rho'(\nu',\varphi') = \left[(\rho)_{\nu'} + \frac{v}{c}\ \nu'\cos\varphi'\left(\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right)_{\nu'}\right]\left(1 - 3\ \frac{v}{c}\ \cos\varphi'\right). \tag{19}$$

С помощью (19), а также наших гипотез о спонтанном и индуцированном излучениях молекулы, мы можем легко рассчитать среднее значение импульса, передаваемого молекуле в единицу времени. Однако, прежде чем это сделать, мы должны сказать несколько слов в оправдание выбранного способа рассмотрения. Можно возразить, что соотношения (14), (15), (16) основаны на теории Максвелла, которая несовместима с квантовой теорией. Однако это возражение относится больше к форме, чем к существу предмета. В самом деле, какую бы форму не принимала теория электромагнитных процессов, принцип Допплера и закон аберрации во всяком случае сохраняются, а следовательно, сохраняется и соотношение (15) и (16). Далее, область применимости энергетического соотношения (14) шире области применимости волновой теории; например, согласно теории относительности, этот закон преобразования справедлив также и для плотности энергии массы с бесконечно малой плотностью покоя, движущейся с (квази)световой скоростью. Следовательно, соотношение (19) может претендовать на справедливость в случае любой теории излучения.

Согласно (B), излучение, соответствующее телесному углу $d\kappa'$, должно было бы давать в секунду

$$B_n^m \rho'(\nu', \varphi') \, \frac{d\kappa'}{4\pi}$$

элементарных процессов индуцированного излучения типа $Z_n \to Z_m$, если бы молекула после каждого такого элементарного процесса тотчас возвращалась обратно в состояние Z_n. Однако в действительности время пребывания ее в состоянии Z_n за секунду, согласно (5), равно

$$\frac{1}{S} \, p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}},$$

где для краткости мы положили

$$S = p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} + p_m e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}}. \tag{20}$$

Следовательно, в действительности число таких процессов в секунду составляет

$$\frac{1}{S} \, p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} \, B_n^m \rho'(\nu', \varphi') \, \frac{d\kappa'}{4\pi}.$$

При каждом элементарном процессе такого рода атом будет получать в положительном направлении оси импульс

$$\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{c} \cos\varphi'.$$

Аналогичным образом найдем, исходя из (), что соответствующее число элементарных процессов индуцированного излучения типа $Z_m \to Z_n$ в секунду равно

$$\frac{1}{S}\, p_m e^{-\dfrac{\varepsilon_m}{kT}}\, B_m^n \rho'(\nu', \varphi')\, \frac{d\kappa'}{4\pi}$$

и при каждом таком элементарном процессе молекуле передается импульс

$$-\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{c} \cos\varphi'.$$

С учетом соотношений (6) и (9) общий импульс, передаваемый молекуле при индуцированном излучении в единицу времени, равен

$$\frac{h\nu'}{cS} \cdot p_n B_n^m \left(e^{-\dfrac{\varepsilon_n}{kT}} - e^{-\dfrac{\varepsilon_m}{kT}} \right) \int \rho'(\nu', \varphi') \cos\varphi'\, \frac{d\kappa'}{4\pi},$$

где интегрирование проводится по всему телесному углу. Интегрирование с учетом соотношения (19) дает

$$-\frac{h\nu}{c^2 S} \left(\rho - (1/3)\, \nu\, \frac{\partial\rho}{\partial\nu} \right) p_n B_n^m \left(e^{-\dfrac{\varepsilon_n}{kT}} - e^{-\dfrac{\varepsilon_m}{kT}} \right) v.$$

При этом эффективная часть снова обозначена через ν (вместо ν').

Это выражение, однако, представляет средний импульс, передаваемый в единицу времени молекуле, движущейся со скоростью v. В самом деле, ясно, что элементарные процессы спонтанного излучения, происходящие без воздействия внешнего излучения, рассматриваемые в системе $'$, не обладают преимущественным направлением и, следовательно, в среднем не могут передать молекуле никакого импульса. Поэтому в качестве конечного результата нашего рассмотрения мы получим

$$R = \frac{h\nu}{c^2 S} \left(\rho - 1/3\, \nu\, \frac{\partial\rho}{\partial\nu} \right) p_n B_n^m e^{-\dfrac{\varepsilon_n}{kT}} \left(1 - e^{-\dfrac{h\nu}{kT}} \right). \qquad (21)$$

§ 6 **Вычисление** $\overline{\Delta^2}$.

Намного проще рассчитать влияние нерегулярности элементарных процессов на механическое поведение молекул. Ибо в основу этого расчета можно положить покоящуюся молекулу в приближении, которым мы довольствовались с самого начала.

Пусть какое то событие приводит к тому, что молекула получает импульс λ в направлении оси . Этот импульс в различных случаях имеет различные знаки и разные величины. Однако для λ справедлив такой статистический закон, что среднее значение λ исчезает. Пусть теперь $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ есть значения импульса, которые передаются молекуле в направлении оси несколькими действующими независимо друг от друга факторами, так что общий передаваемый импульс Δ дается выражением

$$\Delta = \Sigma\lambda_\nu.$$

Тогда, если для отдельных λ_ν среднее значение $\overline{\lambda}_\nu$ исчезает, то

$$\overline{\Delta^2} = \overline{\Sigma\lambda_\nu^2}. \tag{22}$$

Если средние значение отдельных импульсов равны друг другу ($= \overline{\lambda^2}$), а l есть общее число событий, в которых передается импульс, то справедливо следующее соотношение:

$$\overline{\Delta^2} = \overline{l\lambda^2}. \tag{22a}$$

Согласно нашим гипотезам, при каждом процессе спонтанного и индуцированного излучения молекуле передается импульс

$$\lambda = \frac{h\nu}{c}\cos\varphi.$$

При этом φ означает угол между осью X и некоторым произвольно выбранным направлением. Отсюда получим

$$\overline{\lambda^2} = \frac{1}{3}\,\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2.$$

Поскольку мы принимаем, что происходящие процессы вызываются независящими друг от друга событиями, мы можем применить (22а). Тогда l есть общее число элементарных процессов, происходящих в единицу времени. Оно вдвое больше числа процессов индуцированного излучения $Z_n \to Z_m$ за время τ. Таким образом,

$$l = \frac{2}{S}\,p_n B_n^m e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}\,\rho\tau. \tag{23}$$

Из равенства (23), (24) и (22) получим

$$\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau} = \frac{2}{3S}\,\left(\frac{h\nu}{c}\right)\,p_n B_n^m e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}\rho. \tag{24}$$

§ 7 Выводы.

Чтобы показать теперь, что, согласно нашим основным гипотезам, получаемый молекулами от излучения импульс никогда не нарушает равновесия, нужно лишь подставить в (25) и (21) вместо $\frac{\Delta^2}{\tau}$ и R вычисленные значения, после чего в выражении (21) для величину

$$\left(\rho - ({}^1/{}_3)\ \nu\ \frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right)\left(1 - e^{-\dfrac{h\nu}{kT}}\right)$$

заменить, согласно (4) на $\rho\ h\nu/3kT$. Тогда сразу видно, что наше фундаментальное соотношение (12) тождественно выполняется.

В результате изложенных соображений мы получили хорошее подтверждение принятым в § 2 гипотезам о взаимодействии между веществом и излучением через спонтанное и индуцированное излучения. К этим гипотезам меня привело стремление постулировать такое простейшее квантовотеоретическое поведение молекул, которое заменило бы резонатор Планка в классической теории. Из общей квантовой гипотезы для вещества легко следует второе правило Бора [соотношение (9)], а также формула излучения Планка.

Однако самым важным, на мой взгляд, является вывод, касающийся импульса, который передается молекуле при спонтанном и индуцированном излучениях. Если бы одно из наших предположений об импульсах изменилось, следствием этого явилось бы нарушение соотношения (12); едва ли возможно без принятых нами гипотез обеспечить согласие с этим соотношением, требуемым теорией теплоты. Поэтому мы можем считать нижеследующее достаточно надежно доказанным.

Если пучок лучей взаимодействует на встретившуюся ему молекулу так, что она посредством элементарного процесса получает или отдает в форме излучения некоторое количество энергии $h\nu$ (индуцированное излучение), то молекула всегда будет получать и импульс $h\nu/c$ при поглощении энергии – в направлении движения пучка, а при испускании – в противоположном направлении. Если молекула находится под воздействием нескольких направленных пучков лучей, то в элементарном процессе индуцированного излучения принимает участие только один из них; тогда только этот пучок определяет направление получаемого молекулой импульса.

Если молекула теряет энергию без внешнего возбуждения (спонтанное излучение), то этот процесс также является направленным. Спонтанного излучения в виде сферических волн не существует. В элементарном процессе спонтанного излучения молекула получает импульс отдачи, величина которого равна $h\nu/c$, а направление определяется, согласно современному состоянию теории, лишь "случайностью".

Эти свойства элементарного процесса, требуемые соотношением (12), делают почти неизбежным создание подлинно квантовой теории излучения. Слабость теории заключается, с одной стороны, в том, что она не приводит нас к более тесному объединению с волновой теорией, и, с другой стороны, в том, что время и направление элементарного процесса предоставляются "случаю"; впрочем, я полностью уверен в надежности выбранного метода.

Необходимо привести здесь еще одно общее замечание. Почти все теории теплового излучения основываются на рассмотрении взаимодействия между излучением и молекулами. Однако в общем ограничиваются рассмотрением обмена энергией, не учитывая обмена импульсом. Это легко оправдывается, ибо малая величина передаваемых излучением импульсов приводит к тому, что в действительности последние почти всегда отступают перед другими факторами, вызывающими движение. Но в теоретическом рассмотрении такие малые действия нужно считать равнозначными наряду с бросающимся в глаза переносом энергии посредством излучения, поскольку энергия и импульс непосредственно связаны друг с другом; поэтому теорию можно считать правильной лишь в том случае, если показано, что импульсы, переносимые, согласно этой теории, от излучения к веществу, приводят к таким движениям, которые требует теория тепла.