

**2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУДЫ МЕЗОН-НУКЛОННОГО  
РАССЕЯНИЯ С ПОМОЩЬЮ ДИСПЕРСИОННЫХ  
СООТНОШЕНИЙ И УСЛОВИЯ УНИТАРНОСТИ.  
ОБЩАЯ ТЕОРИЯ**

С. Манделстам

Отдел физики, Колумбийский университет, Нью Йорк  
(Получено 27 июня 1958 года)

— — ◊ ◊ ◊ — —

Русский перевод взят из сборника: “Новый метод в теории сильных взаимодействий. Двойные дисперсионные представления.” под ред. А.М. Бродского Москва 1960

— — ◊ ◊ ◊ — —

Предложен метод использования релятивистских дисперсионных соотношений совместно с условием унитарности для определения амплитуды  $\pi$ -мезон-нуклонного рассеяния. При этом обычные дисперсионные соотношения оказываются недостаточными и приходится вводить представление, выражающее аналитические свойства амплитуды рассеяния как функции энергии и передаваемого импульса. Используются условия унитарности для следующих двух реакций:  $\pi + N \rightarrow \pi + N$  или  $N + \bar{N} \rightarrow 2\pi$ ; эти условия аппроксимируются путем пренебрежения состояниями с более, чем двумя частицами.

Метод включает процедуру итерации, аналогичную использованной Чу и Лоу в соответствующей задаче статической теории. Оказывается необходимым ввести две константы связи; константа связи  $\pi$ -мезонов с  $\pi$ -мезонами может быть найдена путем сравнения с экспериментом суммы длин рассеяния вблизи порога. Можно надеяться, что в предлагаемом методе удастся избежать формальных трудностей, присущих методам Тамм-Данкова и Бет-Салпетера и, в частности, появления “призрачных” состояний. Сделанные предположения подтверждаются в теории возмущений.

В качестве побочного результата получены точные границы области, в которой абсорбтивная часть амплитуды рассеяния является аналитической функцией передаваемого импульса, и отсюда — границы области, в которой справедливо разложение по парциальным волнам.

## § 1. Введение

В последние годы в  $\pi$ -мезонной физике для феноменологического и полуфеноменологического анализа экспериментальных данных [1]<sup>1)</sup> и даже для вычисления некоторых величин, основываясь на данных об амплитуде рассеяния  $\pi$ -мезонов на нуклонах [2], все чаще применяются дисперсионные соотношения. Поэтому заманчиво поставить вопрос, могут ли дисперсионные соотношения действительно заменить привычные уравнения теории поля и использоваться для вычисления всех наблюдаемых величин через конечное число констант связи. Этот вопрос впервые был поставлен Гелл-Манном. [3] На первый взгляд это кажется бесосновательным, так как, хотя на выводе дисперсионных соотношений необходимо использовать все общие принципы квантовой теории поля, не делается никакого предположения о форме гамильтониана, кроме того, что он должен быть локален и лоренц-инвариантен. Однако в рамках теории возмущений этих требований достаточно для определения гамильтониана с точностью до небольшого числа констант связи, если потребовать, чтобы теория была ренормируема, и следовательно, самосогласована. Весьма возможно, что даже вне рамок теории возмущений этих требований достаточно для построения теории. Действительно, если “абсорбтивную часть” амплитуды рассеяния, которая стоит под знаком интеграла в дисперсионном соотношении, выразить через амплитуду рассеяния с помощью условия унитарности, то получатся уравнения, очень похожие на уравнения Чу-Лоу [4] в статической теории. Эти уравнения были использованы [5] для получения сдвигов фаз рассеяния  $\pi$ -мезонов на нуклонах.

Задача этой статьи состоит в том, чтобы релятивистский аналог метода Чу-Лоу-Сальцмана, пригодного для вычисления амплитуды  $\pi$ -мезон-нуклонного рассеяния только через две константы связи. Условие унитарности, как и в статической теории, будет исключать амплитуды рождения произвольного числа мезонов, а также в данном случае нуклон-антинуклонных пар. Для практического применения уравнений необходимо пренебречь всеми процессами, кроме конечного числа их: так, в первом, “одномезонном”, приближении будем пренебрегать всеми процессами, кроме упругого рассеяния.

Уравнения, полученные из дисперсионных соотношений в одномезонном приближении, отличаются от статических уравнений Чу-Лоу в

---

<sup>1)</sup>В этой работе содержатся ссылки на предшествующие работы

двух важных отношениях. В то время как в статической теории имело место только -рассеяние, теперь мы имеем бесконечный ряд состояний с определенными моментами количества движения, причем перекрестное соотношение, выраженное через состояния с определенными моментами количества движения, не удовлетворяется. Далее, дисперсионные соотношения в релятивистской теории включают амплитуду рассеяния в “нефизической” области, т.е. при углах, косинус которых меньше  $-1$ . По этим причинам новый метод сложнее статической теории.

Нам понадобятся не только аналитические свойства амплитуды рассеяния как функции энергии при фиксированном передаваемом импульсе, которые выражаются дисперсионными соотношениями, но и аналитические свойства амплитуды как функции обеих переменных. Пока еще строго не доказано, что требуемые аналитические свойства являются следствием микропричинности. Чтобы доказать это, нужно было бы, очевидно, рассмотреть несколько функций Грина совместно со связывающими их уравнениями, которые следуют из условия унитарности. Маловероятно, что такая программа будет выполнена в ближайшем будущем. Однако, если решение, полученное путем использования предполагаемых свойств аналитичности, разложить в ряд теорий возмущений, то получатся в точности те же члены обычной теории возмущений, которые содержатся в одномезонном приближении. Поэтому предполагаемые аналитические свойства, по-видимому, соответствуют действительности, во всяком случае в одномезонном приближении.

Так как для оправдания наших предложений приходится обращаться к теории возмущений, то мы пока еще не имеем теории, в которой общие принципы квантовой теории дополняются лишь условием микропричинности. Тем не менее используемое приближение имеет некоторые преимущества перед приближениями Тамма–Данкова или Бете–Салпетера, применявшимися ранее к данной проблеме. В ней используются только ренормированные массы и константы связи. Напротив, уравнения Тамма–Данкова неренормируемы в высших приближениях, а ковариантные и поэтому ренормируемые во всех приближениях уравнения Бете–Салпетера встречают принципиальные трудности при попытке их решения. Можно надеяться далее, что наше одномезонное приближение точнее соответствующего приближения Тамма–Данкова. В последнем методе предполагается, что компоненты вектора состояния, содержащего более некоторого числа “голых мезонов,” пренебрежимо малы, что как известно, совершенно неверно при экспериментальном значении константы связи. С другой стороны, в одномезонном приближении предлагается, что сечение рождения одного или более *реальных*

мезонов мало, за исключением случая высоких энергий.

Хотя это приближение заведомо неточно количественно, тем не менее оно, по-видимому, гораздо точнее приближения Тамма–Данкова. Наконец, одномезонное приближение в отличие от приближения Тамма–Данкова или Бете–Салпетера, обладает перекрестной симметрией. Весьма вероятно, что “призрачные” состояния, которые являются бичом предыдущих решений релятивистских уравнений поля, возникают вследствие пренебрежения перекрестной симметрией. В подтверждение этого можно указать на теорию заряженного скалярного поля без учета отдачи, в которой задача может быть решена точно в одномезонном приближении. [6] [7] Это решение, не учитывающее перекрестные члены, имеет обычные призрачные состояния, если радиус источника достаточно мал. Модель Ли, в которой отсутствует перекрестная симметрия, ведет себя аналогичным образом. [8] Однако если в модели заряженного скалярного поля вводится в рассмотрение перекрестный член, то призрачное состояние не возникает.

Кастильехо, Далитц и Дайсон [7] указали на неоднозначность решения дисперсионных соотношений, во всяком случае в модели заряженного скалярного поля. Этого следовало ожидать, так как можно изменить гамильтониан, не изменяя дисперсионные соотношения. Например, можно ввести в теорию барион, масса которого больше, чем сумма масс мезона и нуклона. Такой барион был бы нестабилен, не проявлял бы себя как самостоятельная частица и не приводил бы к появлению нового члена в дисперсионных соотношениях. Найденное в рамках теории возмущений Кастильехо, Далитцем и Дайсоном простейшее решение, т.е. решение без нулей в амплитуде рассеяния, соответствует решению, полученному из гамильтониана, в котором нет нестабильных частиц; более сложные решения соответствуют существованию нестабильных барионов.

Предположим, что это заключение не зависит от использования теории возмущений, и ограничимся простейшим решением. Нет никаких физических доводов в пользу какого-либо из решений, но, очевидно, имеет смысл попытаться сравнить сначала с экспериментом следствия теории, в которой не вводятся нестабильные частицы. Во всяком случае следует подчеркнуть, что неоднозначность не является специфической чертой предлагаемого метода решения, но присуща самой теории. Разница состоит в том, что в других методах неоднозначность вносится при написании уравнений, тогда как в предлагаемом методе она возникает при их решении.

В § 2 мы обсудим аналитические свойства амплитуды рассеяния, а в § 3 покажем, как эти свойства совместно с условием унитарности

могут быть использованы для решения проблемы. При этом в дисперсионных соотношениях не рассматриваются “вычитательные члены.” Как и в соответствующей статической задаче, нужно использовать метод итераций, в котором перекрестный член берется из предыдущей итерации. Детали этого решения будут совершенно отличны от статического случая по той причине, что часть амплитуды, соответствующая состояниям с низшими моментами количества движения, которая является полиномом по передаваемому импульсу, фактически выступает как вычитательный член в дисперсионных соотношениях относительно данной переменной и поэтому до сих пор не принималось в расчет. В этом и следующем параграфах мы сможем определить также дополнительные черты аналитического представления, которые оставались невыясненными в § 2, в частности, дать точные пределы значений передаваемого импульса, в которых разложение по парциальным волнам сходится. В § 4 будут исследованы вычитательные члены в дисперсионных соотношениях. Как будет установлено для их определения следует использовать условие унитарности для состояний с низшими моментами количества движения не только для мезон-нуклонного рассеяния, но также для двух-мезонной аннигиляции нуклон-антинуклонной пары  $N + \bar{N} \rightarrow 2\pi$ , описываемой той же функцией Грина. При этом в теорию вводится константа связи мезон-мезонного рассеяния; так как экспериментальное значение этой константы неизвестно, то она должна определяться из сравнения результатов вычислений, например суммы длин  $S$ -рассеяния вблизи порога, с экспериментом.

Для состояний с низшими моментами количества движения вычисления следует проводить в духе вычислений Чу–Лоу; подробности этих расчетов в данной статье не приводятся. Таким образом, мы получаем метод расчета, в котором для нескольких состояний с низшими моментами количества движения вычисления проводятся так же, как и в статической теории, тогда как остальная часть амплитуды рассеяния, которая будет называться “остаточной частью”, вычисляется другим способом, без использования разложения по парциальным волнам. Очевидно, что при проведении итераций эти две части расчета взаимно переплетаются.

Условие унитарности для реакции аннигиляции нуклон–антинуклонной пары необходимо использовать только условие унитарности для рассеяния  $\pi$ -мезонов на нуклонах. Если бы можно было учесть условие унитарности не в одномезонном приближении, а точно, то в последовательной теории для остаточной части также выполнялось бы условие унитарности для реакции аннигиляции нуклон-антинуклонной пары. По

сути дела остаточная часть состоит из ряда членов, соответствующих различным промежуточным состояниям в реакции аннигиляции нуклон-антинуклонной пары.

В § 5 отмечено, что вычисления существенно упрощаются, если сохранять только те члены остаточной части, которые соответствуют аннигиляции пары через состояния с ограниченным числом частиц. Такое же приближение уже делалось ранее при вычислении вычитательных членов. Условие унитарности для рассеяния  $\pi$ -мезонов на нуклонах больше не выполняется, за исключением рассеяния через состояния с низшими моментами количества движения. Однако отбрасываемые члены того же порядка величины или даже меньше, чем члены, которыми мы уже пренебрегли ранее. Обе реакции – рассеяние  $\pi$ -мезонов на нуклонах и аннигиляции нуклон-антинуклонных пар – трактуются в этом случае на равных основаниях.

Как будет выяснено, в одномезонном приближении условие унитарности не может выполняться при всех энергиях, если сохраняются перекрестная симметрия и аналитические свойства. Причина такого положения заключается в том, что условие унитарности для реакции рассеяния не является полностью независимым от условия унитарности для “перекрестной” реакции, получающейся путем перестановки двух  $\pi$ -мезонов, причем эти условия противоречат друг другу, если сделано некоторое приближение. В области, где одномезонное приближение является точным, это затруднение, конечно, не возникает. В случае достаточно малых значений констант связи еще можно получить однозначную процедуру. При фактическом значении константы связи часть перекрестного члена для рассеяния  $\pi$ -мезонов на нуклонах приходится обрезать на пороге рождения пар. Маловероятно, что результат окажется чувствителен к форме и точному значению параметра обрезания.

## § 2. Дисперсионные соотношения и аналитические свойства амплитуды перехода

Кинематические обозначения, используемые при записи дисперсионных соотношений, будут аналогичны обозначениям, принятым в работе Чу и др. [1] Импульсы входящего и выходящего  $\pi$ -мезонов будут обозначаться через  $q_1$  и  $q_2$ , а импульсы входящего и выходящего нуклонов – через  $p_1$

и  $p_2$ . Тогда можно определить два инвариантных скаляра

$$\nu = -(p_1 + p_2)(q_1 + q_2)/4M, \quad (2.1)$$

$$t = -(q_1 - q_2)^2. \quad (2.2)$$

Последний из них является взятым со знаком минус квадратом инвариантного передаваемого импульса. В лабораторной системе энергия дается равенством

$$\omega = \nu - (t/4M) : \quad (2.3a)$$

Вместо последней величины более удобно использовать квадрат энергии (включая обе массы покоя) в системе центра масс, который линейно связан с  $\omega$  соотношением

$$s = M^2 + \mu^2 + 2M\omega. \quad (2.3).$$

Функция Грина, относящаяся к рассматриваемому процессу

$$\pi_1 + N_1 \rightarrow \pi_2 + N_2 \quad (I)$$

описывает также процессы

$$\pi_2 + N_1 \rightarrow \pi_1 + N_2 \quad (II)$$

и

$$N_1 + \bar{N}_2 \rightarrow \pi_1 + \pi_2. \quad (III)$$

Матричные элементы процесса (II) можно получить из матричных элементов процесса (I) с помощью соотношений перекрестной симметрии; энергия в лабораторной системе и квадрат энергии в системе центра масс будут тогда определяться соответственно равенствами

$$\omega_c = -\nu - (t/4M) = -\omega - (t/2M), \quad (2.4a)$$

$$s_c = M^2 + \mu^2 + 2M\omega_c = 2M^2 + 2\mu^2 - s - t. \quad (2.4)$$

По-прежнему -  $t$  будет квадратом передаваемого импульса. Для процесса (III)  $t$  будет квадратом энергии в системе центра масс. Квадратом передаваемого импульса между нуклоном  $N_1$  и мезоном  $\pi_2$  будет  $s_c$  а  $s$  будет квадратом передаваемого импульса между нуклоном  $N_1$  и мезоном  $\pi_1$ .

Кинематика указанных трех реакций схематически изображена на фиг. 1, где по осям координат отложены  $t$  и  $\nu$ . Здесь  $\nu$  представляет собой линию  $s = (M + \mu)^2$  или  $\omega = \mu$ ; линии постоянных значений  $s$  будут

параллельны  $s_c$ . Область, в которой процесс (I) энергетически возможен, находится справа от  $s_c$ . Однако только ее заштрихованная часть является “физической областью”; в незаштрихованной части косинус угла рассеяния принимает значения вне интервала от  $-1$  до  $+1$ , хотя энергия мезона больше его массы покоя. Физическая область ограничена сверху линией  $t = 0$ , соответствующей рассеянию вперед, а внизу – линией, соответствующей рассеянию назад. Аналогично,  $D$  представляет собой линию  $s_c = (M + \mu)^2$ ; область, в которой процесс (II)

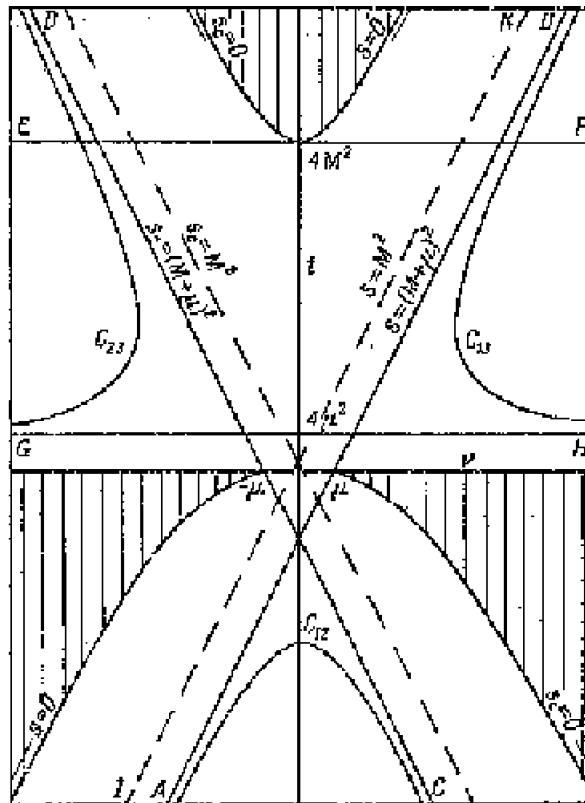


Рис. 1: Кинематика процессов (I) - (II)

энергетически возможен, расположена слева от  $CD$ , а ее заштрихованная часть изображает физическую область для этой реакции. Горизонтальные линии соответствуют постоянной энергии для процесса (III). Этот процесс энергетически возможен выше линии  $EF$ , на которой  $t = 4M^2$ ; заштрихованная площадь по-прежнему изображает физическую область.



Исследуем теперь аналитические свойства амплитуды рассеяния. Для простоты записи пренебрежем сначала зависимостью амплитуды от спина и изотопического спина; в этом случае амплитуда перехода будет скалярной функцией  $A(\nu, t)$  двух инвариантов  $\nu$  и  $t$ . Ее аналитические свойства как функции  $\nu$  при постоянном  $t$  выражаются обычными дисперсионными соотношениями

$$A(\nu, t) = \frac{g^2}{2M} \left( \frac{1}{\nu_B - \nu} + \frac{1}{\nu_B + \nu} \right) + \frac{1}{\pi} \int_{\mu+(t/4M)}^{\infty} d\nu' \frac{A_1(\nu', t)}{\nu' - \nu} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\mu-(t/4M)} d\nu' \frac{A_2(\nu', t)}{\nu' - \nu} \quad (2.5)$$

где  $\nu_B = -(\mu^2/2M) + (t/4M)$ . В этом и во всех последующих подобных соотношениях энергетические знаменатели имеют малую мнимую часть.  $A_1$  и  $A_2$  являются “абсорбтивными частями” амплитуды, связанными соответственно с процессами (I) и (II), и даются соотношениями

$$(2\pi)^4 A_1(\nu, t) \delta(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) = (2\pi)^6 \left( \frac{4p_{01}p_{02}q_{01}q_{02}}{M^2} \right)^{1/2} \times \sum_n \langle N(p_1)\pi(q_1) | n \rangle \langle n | N(p_2)\pi(q_2) \rangle, \quad (2.6)$$

$$(2\pi)^4 A_2(\nu, t) \delta(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) = (2\pi)^6 \left( \frac{4p_{01}p_{02}q_{01}q_{02}}{M^2} \right)^{1/2} \times \sum_n \langle N(p_1)\pi(-q_2) | n \rangle \langle n | N(p_2)\pi(-q_1) \rangle. \quad (2.7)$$

Символ  $\langle N(p_1)\pi(q_1) |$  обозначает состояние входящего нуклона с импульсом  $p_1$  и входящего мезона с импульсом  $q_1$ . Суммирование  $\sum_n$  проводится по всем промежуточным состояниям. Функции  $A_1$  и  $A_2$  не обращаются в нуль соответственно справа от и слева от  $CD$ .

Соотношение (2.5) показывает, что  $A$  является аналитической функцией  $\nu$  в комплексной плоскости с полюсами в точках  $\pm\nu_B$  и разрезами вдоль вещественной оси от  $\mu + (t/4M)$  до  $\infty$  и от  $-\infty$  до  $-\mu - (t/4M)$ .

На фиг. 1 соотношение (2.5) представляется интегрированием вдоль горизонтальной прямой, расположенной ниже оси  $\nu$ . Полюса будут расположены в точках пересечения этой прямой со штрихованными линиями; за исключением этих точек подынтегральное выражение будет обращаться в нуль всюду между линиями и  $CD$ . Кроме случая рассеяния

вперед, область, в которой подынтегральное выражение отлично от нуля, частично лежит в нефизической области, где энергия выше порогового значения, но угол рассеяния мнимый.

Соотношение (2.5) справедливо, если функции  $A_1$  и  $A_2$  достаточно быстро стремятся к нулю при стремлении  $\nu$  к бесконечности; в противном случае, необходимо обычным образом произвести одно или несколько вычитаний. Всякий раз, когда записываются подобные дисперсионные соотношения, подразумевается возможность проведения вычитаний.

Постараемся теперь получить аналитические свойства как функции  $t$ . Чтобы сделать это, запишем амплитуду рассеяния не в виде хронологического произведения двух операторов мезонного тока, усредненного по двум однонуклонным состояниям, как это делают при доказательстве обычных дисперсионных соотношений, [9] [10] а в виде произведения операторов мезонного и нуклонного токов, усредненного по нуклонному и мезонному состояниям. Таким образом, имеем

$$(2\pi)^4 A\delta(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) = (2\pi)^3 \left( \frac{2p_{01}q_{02}}{M} \right)^{1/2} i \int dx dx' \times \\ \times e^{-iq_1 x + ip_2 x'} \langle N(p_1) | T \{ j(x) \bar{a}(x') \} | \pi(q_2) \rangle, \quad (2.8)$$

где  $\bar{a}(x')$  – оператор нуклонного тока. Из этого выражения можно получить дисперсионные соотношения, в которых останется постоянным передаваемый импульс между входящим нуклоном и выходящим мезоном, а не между двумя нуклонами; доказательство подобных дисперсионных соотношений не отличается от обычного формального доказательства стандартных дисперсионных соотношений. [9] [10] Так как в данном случае передаваемым импульсом является  $s_c$ , мы получаем дисперсионные соотношения, в которых  $s_c$  остается постоянным; если  $A$  считается функцией  $s_c$  и  $t$ , то дисперсионные соотношения имеют вид

$$A(s_c, t) = \frac{g^2}{s_c + t - M^2 - 2\mu^2} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{(M-\mu)^2 - s_c} dt' \frac{A_1(s_c, t')}{t' - t} + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} dt' \frac{A_3(s_c, t')}{t' - t}. \quad (2.9)$$

Абсорбтивные части в подынтегральных выражениях получаются, как обычно, путем замены в (2.8) хронологического произведения на половину коммутатора. Первый член, в котором операторы расположены в

порядке  $j(x)\bar{a}(x')$ , равен  $A_1$ , и, следовательно, отличен от нуля справа от  $t$  и имеет  $\delta$ -образную особенность вдоль линии  $IK$ . Однако второй член, в котором операторы расположены в порядке  $\bar{a}(x')j(x)$ , относится к процессу (III) и имеет вид

$$(2\pi)^4 A_3(s_c, t)\delta(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) = (2\pi)^6 \left( \frac{4p_{01}p_{02}q_{01}q_{02}}{M^2} \right)^{1/2} \times \\ \times \sum_n \langle N(p_1)\bar{N}(-p_2) | n \rangle \langle n | \pi(-q_1)\pi(q_2) \rangle. \quad (2.10)$$

Низшим энергетическим состоянием  $n$  теперь будет двухмезонное состояние. Поэтому  $A_3$  будет отлично от нуля выше линии  $t = 4\mu^2$ , изображенной на фиг. 1 линией  $GH$  [так как  $t$  является квадратом энергии в системе центра масс для процесса (III)]. Дисперсионное соотношение (2.9) изображается интегрированием вдоль линии, параллельной  $CD$ , справа от линии  $s_c = 0$ . Это означает, что  $A_3$  является аналитической функцией  $t$  при фиксированном  $s_c$  с полюсом при  $t = M^2 + 2\mu^2 - s_c$  и разрезами вдоль вещественной оси от  $-\infty$  до  $(M - \mu)^2 - s_c$  и от  $4\mu^2$  до  $\infty$ .

Так же как и в обычных дисперсионных соотношениях, часть промежутка интегрирования в соотношении (2.9) будет лежать в нефизической области. В рассматриваемом случае нефизическая область интегрирования содержит кроме мнимых углов при допустимых энергиях весь интервал между линиями  $t = 4\mu^2$  и  $t = 4M^2$ , где  $A_3$  дают вклады промежуточные состояния с двумя и более  $\pi$ -мезонами. Поэтому строго доказать соотношение (2.9) намного труднее, чем (2.5), и, вероятно, не может быть проведено без привлечения условия унитарности.

Меняя местами  $\pi$ -мезоны в выражении (2.8), мы можем получить третье дисперсионное соотношение, в котором  $s$  остается постоянным

$$A(s, t) = \frac{g^2}{s + t - M^2 - 2\mu^2} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{(M-\mu)^2-s} dt' \frac{A_2(s, t')}{t' - t} + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} dt' \frac{A_3(s, t')}{t' - t} \quad (2.11)$$

На фиг. 1 это соотношение изображено интегрированием вдоль линии, параллельной  $GH$ , левее линии  $s = 0$ .

Попытаемся теперь получить аналитические свойства как функции двух комплексных переменных. Простейшее предположение, которое можно сделать, заключается в том, что эта функция является аналитической во всем пространстве двух переменных, за исключением разрезов вдоль определенных гиперплоскостей. Затем можно определить положение этих разрезов из требования, что амплитуда должна удовлетворять дисперсионным соотношениям (2.5), (2.9) и (2.11). Разрезы будут иметь место, когда: 1)  $s$  – вещественная величина, большая  $(M + \mu)^2$ , 2)  $s_c$  – вещественная величина, большая  $(M + \mu)^2$  и 3)  $t$  – вещественная величина, большая  $4\mu^2$ . Скачки амплитуды при переходе через эти разрезы будут соответственно  $2A_1$ ,  $2A_2$ , и  $2A_3$ . Кроме того, амплитуда будет иметь полюса при  $s = M^2$  и  $s_c = M^2$ . Дважды применяя теорему Коши, можно показать, что функция с подобным расположением разрезов и полюсов может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
A = & \frac{g^2}{M^2 - s} + \frac{g^2}{M^2 - s_c} + \frac{1}{\pi^2} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \frac{A_{13}(s', t')}{(s' - s)(t' - t)} + \\
& + \frac{1}{\pi^2} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds'_c \int_{4\mu^2}^{\infty} dt' \frac{A_{23}(s'_c, t')}{(s'_c - s_c)(t' - t)} + \\
& + \frac{1}{\pi^2} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds'_c \frac{A_{12}(s', s'_c)}{(s' - s)(s'_c - s_c)}. \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Соотношение (2.12) является обобщением представления, впервые предложенного Намбу. [11] Для удобства мы использовали переменные  $s$ ,  $s_c$  и  $t$ , каждая из которых является энергией для одного из рассматриваемых процессов; однако эти переменные не являются независимыми и связаны соотношением

$$s + s_c + t = 2(M^2 + \mu^2), \quad (2.13)$$

так что в действительности является функцией только двух переменных. Величины  $A_{13}$ ,  $A_{23}$  и  $A_{12}$ , которые будем называть “спектральными функциями”, отличны от нуля в областях, расположенных на фиг. 1 справа вверху, слева вверху и внизу. Точные границы  $C_{13}$ ,  $C_{23}$  и  $C_{12}$  этих областей будут определены при помощи условия унитарности в следующих параграфах; из высказанных выше соображений можно лишь сказать, что указанные области должны находиться внутри соответствующих треугольников, причем их границы должны приближаться к

сторонам треугольников асимптотически (или могут касаться их в некоторой конечной точке). Спектральные функции всегда равны нулю в физической области.

Как и в случае обычных дисперсионных соотношений, представление (2.12), вообще говоря, нуждается в некотором видоизменении; в нем необходимо еще выполнить вычитания. Вычитания будут вносить обычные изменения в один или оба энергетических знаменателя, и, кроме того, они дадут дополнительные члены. Соответствующие члены в рассматриваемом случае будут не константами, а функциями одной из переменных; например, в случае вычитания при интегрировании по  $s$  в первом члене (2.12) дополнительный член будет функцией  $t$ . Указанные функции будут обладать необходимыми аналитическими свойствами по своим переменным, поэтому они должны иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \frac{f_1(s')}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds'_c \frac{f_2(s'_c)}{s'_c - s_c} + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} dt' \frac{f_3(t')}{t' - t}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Если вводится более одного вычитания, то подобные члены умножаются на полиномы. Даже если спектральные функции в соотношении (2.12) стремятся к нулю при стремлении одной из переменных к бесконечности, так что вычитание по этой переменной не необходимо, то это обстоятельство еще не предопределяет обязательного отсутствия существующего члена в (2.14). В задаче рассеяния  $\pi$  – мезонов на нуклонах не нужно вводить дополнительного неопределенного общего вычитательного члена, не зависящего от обеих переменных, так как требование, чтобы амплитуда рассеяния для каждой волны с определенным моментом количества движения имела вид  $\exp(i\delta) \sin \delta/k$  с  $\text{Im} \delta < 0$ , обеспечивает убывание в физической области, когда обе переменные  $s$  и  $t$  стремятся к бесконечности.

Известно, что общее представление Намбу для полных функций Грина несправедливо даже в низшем нетривиальном порядке теории возмущений. Однако предлагаемое здесь представление ограничивается только рассмотрением на поверхности масс частиц, и пока еще не было показано, что оно несправедливо. Действительно, для комптоновского рассеяния члены четвертого порядка, найденные Брауном и Фейнманом [12] допускают подобное представление и, как мы указали в § 1, все члены

теории возмущений, входящие в однорезонное приближение, могут быть представлены аналогичным образом.

Дисперсионные соотношения являются непосредственным следствием представления (2.12). Чтобы получить обычное дисперсионное соотношение (2.5), третий интеграл в (2.12) нужно записать в виде <sup>2</sup>

$$-\frac{1}{\pi^2} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \int_{-\infty}^{t_2(s)} dt' \frac{A_{12}(s', t')}{(s' - s)(t' - t)} -$$

$$-\frac{1}{\pi^2} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds'_c \int_{-\infty}^{t_2(s_c)} dt' \frac{A_{12}(s'_c, t')}{(s'_c - s_c)(t' - t)}.$$

Отсюда следует, что

$$A = \frac{g^2}{M^2 - s} + \frac{g^2}{M^2 - s_c} + \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \frac{A_1(s', t)}{s' - s} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds'_c \frac{A_2(s'_c, t)}{s'_c - s_c}, \quad (2.15)$$

где

$$A_1(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{t_1(s)}^{\infty} dt' \frac{A_{13}(s, t')}{t' - t} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{t_2(s)} dt' \frac{A_{12}(s, t')}{t' - t}, \quad (2.16)$$

$$A_2(s_c, t) = \frac{1}{\pi} \int_{t_1(s_c)}^{\infty} dt' \frac{A_{23}(s_c, t')}{t' - t} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{t_2(s_c)} dt' \frac{A_{12}(s_c, t')}{t' - t}. \quad (2.17)$$

однако соотношение (2.15) представляет собой как раз дисперсионное соотношение (2.5), так как  $s$ ,  $s_c$ , и  $\nu$  связаны между собой соотношениями (2.4), а  $t$  остается постоянным. Кроме того, видно, что сами абсорбтивные части  $A_1$  и  $A_2$  удовлетворяют дисперсионным соотношениям по  $t$  при постоянных  $s$  (или  $s_c$ ); при этом мнимые части, находящиеся в

<sup>2</sup>При замене переменных мы, естественно, считаем, что спектральные функции в одной и той же точке имеют одно и то же значение, а не представляют собой ту же функцию от новых переменных

подынтегральном выражении, являются просто спектральными функциями. Соотношение (2.16) представляется на фиг. 1 интегрированием вдоль линии, параллельной и проходящей правее. Пределы интегрирования  $t_1$  и  $t_2$  являются точками, в которых эта линия пересекает кривые  $C_{13}$  и  $C_{12}$ , и удовлетворяют неравенствам

$$t_1 > 4\mu^2, \quad (2.18),$$

$$t_2 < (M - \mu)^2 - s. \quad (2.18)$$

Как и следовало ожидать,  $A_1$  отлично от нуля при  $s > (M + \mu)^2$ , поскольку кривые  $C_{13}$  и  $C_{12}$  приближаются к линии, не пересекая ее.

Дисперсионные соотношения (2.9) и (2.11) можно получить из (2.12) аналогичным способом; при этом абсорбтивная часть  $A_3$  будет удовлетворять дисперсионному соотношению по  $\nu$  при постоянном  $s$ :

$$A_3 = \frac{1}{\pi} \int_{\nu_3(t)}^{\infty} d\nu' \frac{A_{13}(\nu', t)}{\nu' - \nu} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\nu_3(t)} d\nu' \frac{A_{23}(\nu', t)}{\nu' - \nu}. \quad (2.19)$$

Это дисперсионное соотношение представляется интегрированием вдоль горизонтальной линии, расположенной выше  $GH$ ; в этом соотношении  $\nu_3$  и  $-\nu_3$  являются точками, в которых путь интегрирования пересекает кривые  $C_{13}$  и  $C_{23}$ .

Таким образом, амплитуда рассеяния удовлетворяет дисперсионным соотношениям соответственно с фиксированными  $t$ ,  $s_c$ ,  $s$ . Далее, по указанным выше соображениям из (2.12) следует, что знак фиксированной переменной теперь может быть произвольным. Таким образом, теперь мы знаем, в частности, аналитические свойства амплитуды  $A$  как функции передаваемого импульса при фиксированной энергии как большей, так и меньшей  $(M + \mu)^2$ . Они представляются дисперсионным соотношением (2.11), причем амплитуда является аналитической функцией квадрата передаваемого импульса с полюсом в точке  $t = M^2 + 2\mu^2 - s$  и разрезами вдоль вещественной оси от  $t = 4\mu^2$  до  $\infty$  и от  $t = -\infty$  до  $(M - \mu)^2 - s$ . При  $s > (M + \mu)^2$  эти разрезы и полюс расположены полностью в нефизической области. Леманом [13] ранее было строго показано, что в физической области амплитуда  $A$  является аналитической функцией  $t$ . Абсорбтивные части  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  сами удовлетворяют дисперсионным соотношениям при соответствующем выборе фиксируемых переменных ( $s$ ,  $s_c$ ,  $t$  соответственно для  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ ). Весовые функции в этих дисперсионных соотношениях лежат целиком в нефизической области, и границы областей, в которых они отличны от нуля нужно еще

определить. В частности, абсорбтивная часть  $A_1$  как функция передаваемого импульса [при фиксированном  $s$ , большем  $(M + \mu)^2$ ] обладает такими же аналитическими свойствами, что и амплитуда рассеяния, не считая того, что  $A_1$  не имеет полюса и разрезы проходят только от  $t - 1$  до  $\infty$  и от  $-\infty$  до  $t_2$ . Согласно неравенствам (2.18), указанные разрезы начинаются с больших абсолютных значений, чем разрезы амплитуды, рассматриваемой как функция передаваемого импульса. Это обстоятельство согласуется с другим результатом Лемана, [13] который показал, что область аналитической амплитуды  $A_1$  как функции  $t$  больше области аналитической амплитуды как функции  $t$ .

Изменения, которые вводятся в теорию благодаря учету спина и зависимости от изотопического спина, тривиальны. В этом случае амплитуда перехода дается выражением

$$-A + \frac{1}{2}i\gamma(q_1 + q_2)B, \quad (2.20)$$

где как  $A$ , так и  $B$  имеют представления типа (2.12). Далее, вводятся две амплитуды, соответствующие изотопическим спином  $1/2$  и  $3/2$ . Иногда более удобно использовать комбинации

$$A^{(+)} = \frac{1}{3} \left( A^{(1/2)} + 2A^{(3/2)} \right), \quad (2.21a)$$

$$A^{(-)} = \frac{1}{3} \left( A^{(1/2)} - A^{(3/2)} \right) \quad (2.21)$$

и аналогичные комбинации  $B^{(+)}$  и  $B^{(-)}$ ; в этом случае мы имеем простые перекрестные соотношения

$$A^{(\pm)}(\nu, t) = \pm A^{(\pm)}(-\nu, t), \quad (2.22a)$$

$$B^{(\pm)}(\nu, t) = \pm B^{(\pm)}(-\nu, t), \quad (2.22)$$

которые можно представить в виде соотношений для спектральных функций:

$$A_{13}^{(\pm)}(s, t) = \pm A_{23}^{(+)}(s_c, t), \quad (2.23a)$$

$$A_{12}^{(\pm)}(s, s_c) = \pm A_{12}^{(\pm)}(s_c, s), \quad (2.23)$$

$$B_{13}^{(\pm)}(s, t) = \mp B_{23}^{(\pm)}(s_c, t), \quad (2.23)$$

$$B_{12}^{(\pm)}(s, s_c) = \mp B_{12}^{(\pm)}(s_c, s). \quad (2.23)$$



В соотношении (2.12) и в дисперсионных соотношениях полюса будут встречаться только в представлении для  $B^{(\pm)}$  (в псевдоскалярной теории); второй член в соотношениях для  $B^{(+)}$  и  $B^{(-)}$  будет иметь соответственно знак плюс или минус.

### § 3 Комбинирование дисперсионных соотношений с условием унитарности

Для определения амплитуды рассеяния дисперсионные соотношения, данные в предыдущем параграфе, должны быть дополнены уравнениями, выражающими условие унитарности. В начале мы опять пренебрежем зависимостью амплитуды от спина и изотопического спина; тогда условие унитарности (2.6) в одномезонном приближении примет вид

$$A_1(s, \cos \Theta_1) = \frac{1}{32\pi^2} \frac{q}{W} \times$$

$$\times \int \sin \Theta_2 d\Theta_2 d\varphi_2 A^*(s, \cos \Theta_2) A(s, \cos(\vec{\Theta}_1, \vec{\Theta}_2)),$$

или

$$A_1(s, z_1) = \frac{1}{32\pi^2} \frac{q}{W} \times$$

$$\times \int_{-1}^{+1} dz_2 \int_0^{2\pi} d\varphi A^*(s, z_2) A(s, z_1 z_2 + (1 - z_1^2)^{1/2} (1 - z_2^2)^{1/2} \cos \varphi), \quad (3.1)$$

где  $z = \cos \Theta$  и  $\vec{\Theta}_i (i = 1, 2)$  – единичный вектор в направлении  $(\Theta_i, \varphi_i)$ . Величина  $W$  представляет собой энергию в системе центра масс (равную  $\sqrt{s}$ ), а  $q$  – импульс в системе центра масс, который задается формулой

$$q^2 = \{s - (M + \mu)^2\} \{s - (M - \mu)^2\} / 4s. \quad (3.2)$$

Переменная  $z$  связана с передаваемым импульсом простым соотношением

$$z = 1 + (t/2q^2). \quad (3.3)$$

Из условия унитарности следует только, что соотношение (3.1) справедливо в физической области. В нефизической области  $A_1$  должно быть получено с помощью аналитического продолжения. Для этого посредством соотношения (2.11), в котором фиксирована энергия, амплитуда

представляется в виде аналитической функции от  $t$  или (что эквивалентно) от  $z$ . Из формулы (3.3) видно, что в (2.12) можно просто заменить  $t$  на  $z$ , так что мы можем написать

$$A^*(s, z_2) = \frac{1}{\pi} \int dz'_2 \frac{A_2^*(s, z'_2) + A_3^*(s, z'_2)}{z'_2 - z_2}, \quad (3.4a)$$

$$\begin{aligned} & A \left\{ s, z_1 z_2 + (1 - z_1^2)^{1/2} (1 - z_2^2)^{1/2} \cos \varphi \right\} = \\ & = \frac{1}{\pi} \int dz'_3 \frac{A_2(s, z'_3) + A_3(s, z'_3)}{z'_3 - z_1 z_2 - (1 - z_1^2)^{1/2} (1 - z_2^2)^{1/2} \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для простоты мы включили абсорбтивные части  $A_2$  и  $A_3$  под знак одного и того же интеграла, но они, конечно, будут давать вклады в различных областях переменной интегрирования. Функция  $A_2(s, z)$  отлична от нуля только при

$$z < 1 - \frac{s - (M - \mu)^2}{2q^2},$$

а также имеет  $\delta$ -образную особенность при

$$z = 1 - \frac{s - M^2 - 2\mu^2}{2q^2},$$

тогда как  $A_3(s, z)$  отлична от нуля только при

$$z > 1 + \frac{2\mu^2}{q^2}.$$

Записанные здесь дисперсионные соотношения были получены при некорректном предположении, что вычитания в них необязательны; в следующем параграфе мы увидим, каким образом нужно видоизменить теорию, чтобы учесть вычитания.

Подставляя (3.4) в (3.1) и интегрируя по  $z_2$  и  $\varphi$ , приходим к соотношению

$$\begin{aligned} A_1(s, z_1) &= \frac{1}{16\pi^3} \cdot \frac{q}{W} \int dz'_2 \int dz'_3 \frac{1}{\sqrt{k}} \ln \frac{z_1 - z'_2 z'_3 + \sqrt{k}}{z_1 - z'_2 z'_3 - \sqrt{k}} \times \\ &\times \{A_2^*(s, z'_2) + A_3^*(s, z'_2)\} \{A_2(s, z'_3) + A_3(s, z'_3)\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$k = z_1^2 + z_2'^2 + z_3'^2 - 1 - 2z_1 z_2' z_3'. \quad (3.6)$$

Мы должны выбрать ту ветвь логарифма, которая вещественна в физической области  $-1 < z_1 < 1$ . Тогда соотношение (3.5) дает значения  $A_1$  во всей комплексной плоскости  $z_1$ .

Согласно соотношению (2.16),  $A_1(s, z_1)$  должна быть аналитической функцией  $t$ , а следовательно, и  $z$ ; величина скачков данной функции при переходе  $z_1$  через положительную и отрицательную части вещественной оси должна быть соответственно равна  $2A_{13}$  и  $2A_{12}$ . Нетрудно видеть, что выражение для  $A_1$  в (3.5) обладает указанными свойствами, и, отождествляя скачки на вещественной оси с  $A_{13}$  и  $A_{12}$ , мы приходим к соотношениям

$$A_{13}(s, z_1) = \frac{1}{8\pi^2} \cdot \frac{q}{W} \int dz_2 \int dz_3 K_1(z_1, z_2, z_3) \times \\ \times \{A_3^*(s, z_2)A_3(s, z_3) + A_2^*(s, z_2)A_2(s, z_3)\}, \quad (3.7a)$$

$$A_{12}(s, z_1) = \frac{1}{8\pi^2} \cdot \frac{q}{W} \int dz_2 \int dz_3 K_2(z_1, z_2, z_3) \times \\ \times \{A_2^*(s, z_2)A_3(s, z_3) + A_3^*(s, z_2)A_2(s, z_3)\}. \quad (3.7)$$

Штрихи у  $z_2$  и  $z_3$  опущены;  $K_1$  и  $K_2$  определяются формулами

$$K_1(z_1, z_2, z_3) = \begin{cases} -1/[k(z_1, z_2, z_3)]^{1/2}, & z_1 > z_2z_3 + (z_2^2 - 1)^{1/2}(z_3^2 - 1)^{1/2}, \\ 0, & z_1 < z_2z_3 + (z_2^2 - 1)^{1/2}(z_3^2 - 1)^{1/2}; \end{cases} \quad (3.8a)$$

$$K_2(z_1, z_2, z_3) = \begin{cases} -1/[k(z_1, z_2, z_3)]^{1/2}, & z_1 < z_2z_3 + (z_2^2 - 1)^{1/2}(z_3^2 - 1)^{1/2}, \\ 0, & z_1 > z_2z_3 + (z_2^2 - 1)^{1/2}(z_3^2 - 1)^{1/2}; \end{cases} \quad (3.8)$$

В точках  $z_1 = z_2z_3 \pm (z_2^2 - 1)^{1/2}(z_3^2 - 1)^{1/2}$  величина  $k(z_1, z_2, z_3)$  меняет знак.

Перейдем теперь от переменных  $z$  к нашим первоначальным переменным. Поскольку мы будем использовать дисперсионные соотношения (2.17) и (2.19), то удобно выразить функции  $A_2$  и  $A_{12}$  через переменные  $s$  и  $s_c$ , а  $A_3$   $A_{13}$  – через  $s$  и  $t$ . Тогда соотношения (3.7) принимают вид

$$A_{13}(s, t_1) = \\ = \frac{1}{32\pi^2 q^3 W} \left[ \int dt_2 \int dt_3 K_1(s; t_1, t_2, t_3) A_3^*(s, t_2) A_3(s, t_3) + \right.$$

$$+ \int ds_{c2} \int ds_{c3} K_1(s; t_1, s_{c2}, s_{c3}) A_2^*(s, s_{c2}) A_2(s, s_{c3}) \Big], \quad (3.9a)$$

$$A_{12}(s, s_{c1}) = \frac{1}{32\pi^2 q^3 W} \int dt_2 \int ds_{c3} K_2(s; s_{c1}, t_2, s_{c3}) \times \\ \times [A_3^*(s, t_2) A_2(s, s_{c3}) + A_2^*(s, s_{c3}) A_3(s, t_2)]. \quad (3.9)$$

Заметим, что в этих уравнениях  $s$  фиксировано, тогда как  $s_c$  и  $t$  меняются. Функция должна быть выражена в новых переменных с помощью формул (3.3) и (2.13).

Использование соотношений (3.9) совместно с дисперсионными соотношениями для определения спектральных функций значительно облегчается вследствие того, что обращается в нуль, если переменные не удовлетворяют определенным неравенствам; именно, для всех значений  $s$

$$K_1(s; t_1, t_2, t_3) = 0 \quad \text{вне области} \quad t_1^{1/2} > t_2^{1/2} + t_3^{1/2}, \quad (3.10a)$$

$$K_1(s; t_1, s_{c2}, s_{c3}) = 0 \quad \text{вне области} \quad t_1^{1/2} > s_{c2}^{1/2} + s_{c3}^{1/2}, \quad (3.10)$$

$$K_1(s; s_{c1}, t_2, s_{c3}) = 0 \quad \text{вне области} \quad s_{c1}^{1/2} > t_2^{1/2} + s_{c3}^{1/2}, \quad (3.10)$$

(Для каждого частного значения  $s$  ограничения на область изменения переменных могут быть усилены.) Условия (3.10) справедливы до тех пор, пока переменные  $s_{c2}$ ,  $s_{c3}$ ,  $t_2$  и  $t_3$  лежат в областях  $s_c > M^2$ ,  $t > 4\mu^2$ , вне которых  $A_2$  и  $A_3$  обращаются в нуль. Из соотношений (3.9) следует, что для любого данного значения переменной  $t$  (или  $s_c$ ) функция  $A_{13}(s, t)$  [или  $A_{12}(s, s_c)$ ] может быть выражена через функции  $A_3(s, t')$  и  $A_2(s, s'_c)$ , аргументы которых  $t'$  и  $s'_c$  меньше  $t$  (или  $s_c$ ). С другой стороны, дисперсионные соотношения (2.17) и (2.19), записанные в виде

$$A_2(s, s_c) = \frac{1}{\pi} \int_{s_2(s_c)}^{\infty} ds' \frac{A_{12}(s, s_c)}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int_{t_1(s_c)}^{\infty} dt' \frac{A_{23}(s_c, t')}{t' - t}, \quad (3.11a)$$

$$A_3(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{s_3(t)}^{\infty} ds' \frac{A_{13}(s', t)}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int_{s_3(t)}^{\infty} ds'_c \frac{A_{23}(s'_c, t)}{s'_c - s_c}, \quad (3.11)$$

очевидно, показывают, что  $A_3(s, t)$  и  $A_2(s, s_c)$  могут быть вычислены через  $A_{12}(s', s_c)$  и  $A_{13}(s', t)$ , если пока мы пренебрежем вторым слагаемым в этих соотношениях. Следовательно, мы можем вычислить  $A_{13}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_3$  и  $A_2$  для всех значений  $s$  и последовательно для значений  $s_c$  и  $t$ , превышающих  $s$ . Наименьшим значением  $s_c$  или  $t$ , при котором либо  $A_2$ ,

либо  $A_3$  не обращается в нуль, является  $s = M^2$ , при этом значении  $s_c$  вклад однонуклонного состояния в  $A_2$  равен  $g^2\delta(s_c - M^2)$ . Из соотношений (3.9) и (3.11) следует, что  $A_{13}$  и  $A_{12}$  обращаются в нуль, если  $t$  и  $s_c$  меньше  $4M^2$ ; в области значений  $t$ , превышающих указанное значение,  $A_{13}$  отлична от нуля и может быть вычислена путем подстановки в (3.9а)  $\delta$ -образной части  $A_2$ . Вследствие (3.10) остаточные части  $A_2$  и  $A_3$  не будут давать вклада. Начав вычисление таким образом, мы можем переходить ко все большим значениям  $t$  и  $s_c$ , попеременно применяя (3.9) и (3.11)<sup>3</sup>

Прежде чем обсуждать, как учесть второе слагаемое в (3.11), изучим более подробно вид функций  $A_{13}$  и  $A_{12}$ , полученных выше. Для этого нам нужны точные значения  $t$  и  $s_c$  при данном значении  $s$ , для которого ядра  $K$  обращаются в нуль; находим, что

$$K_1(s, t_1, t_2, t_3) = 0$$

$$\text{вне области} \quad t_1^{1/2} > t_2^{1/2} \left(1 + t_3/4q^2\right)^{1/2} + t_3^{1/2} \left(1 + t_2/4q^2\right)^{1/2}, \quad (3.12a)$$

$$K_1(s, t_1, s_{c2}, s_{c3}) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{вне области} \quad t_1^{1/2} > (s_{c2} - u)^{1/2} \left\{1 + (s_{c3} - u)/4q^2\right\}^{1/2} + \\ + (s_{c3} - u)^{1/2} \left\{1 + (s_{c2} - u)/4q^2\right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$K_2(s; s_{c1}, t_2, s_{c3}) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{вне области} \quad (s_1 - u)^{1/2} > t_2^{1/2} \left(1 + (s_{c3} - u)/4q^2\right)^{1/2} + \\ + (s_{c3} - u)^{1/2} \left(1 + t_2/4q^2\right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$u = (M^2 - \mu^2)^2/s. \quad (3.13)$$

Поскольку наименьшее значение  $s_c$  и  $t$ , которое дает вклад в подынтегральное выражение в соотношении (3.9а), есть  $s_c = M^2$ , когда  $A_2$  имеет  $\delta$ -образную особенность, из (3.12б) следует, что наименьшее значение  $t$ ,

<sup>3</sup>Заметим, что, хотя в наших вычислениях мы учли полюс от однонуклонного состояния в перекрестном члене, мы еще не ввели полюс, связанный с основным каналом. Последний полюс представляет собой фактически вычитательный член в (2.11) и будет обсуждаться в следующем параграфе

при котором  $A_{13}(s, t)$  не обращается в нуль (для любого данного значения  $s$ ), определяется формулой

$$t^{1/2} = 2(M^2 - u)^{1/2} \left\{ 1 + (M^2 - u)/4q^2 \right\}^{1/2}. \quad (3.14)$$

При очень больших  $s$ , данное значение  $t$  приближается к  $4M^2$ , но при уменьшении  $s$  величина  $t$  возрастает и при  $s = (M + \mu)^2$  становится бесконечной. На фиг. 2 формула (3.14) изображается кривой  $C_1$  и вблизи нее ведет себя как  $(t - t_0)^{-1/2}$ , где  $t_0$  – значение  $t$ , задаваемое (3.14). Из (3.11б) следует, что  $A_3(s, t)$  не обращается в нуль при  $t > 4M^2$  и ведет себя как  $(t - 4M^2)^{1/2}$  чуть выше этого предела. Значение  $t = 4M^2$  как раз является порогом для процесса (III), и мы должны были бы получить аналогичные результаты из общих рассуждений предыдущего параграфа, если пренебречь промежуточными состояниями, включающими два или более мезонов и не включающими нуклон–антинуклонных пар. Это показывает, что наши предположения, по всей видимости, правильны, в этом параграфе мы не учитывали явно процесс (III). При рассмотрении вычитательных членов в дисперсионных соотношениях мы увидим, что  $A_{13}$  также не обращается в нуль между  $t = 4\mu^2$  и  $t = 4M^2$  и что область, в которой  $A_{13}$  обращается в нуль, должна быть расширена. Следовательно, кривая  $C_1$  еще не представляет собой кривую  $C_{13}$  на фиг. 1.

Для интервала значений  $t$  выше кривой  $C_1$  подынтегральное выражение в (3.9а) целиком определяется  $\delta$ -образной особенностью в  $A_2$ . Однако в некоторой определенной точке начинают вносить вклад и другие составляющие  $A_2$  и  $A_3$ . Если в (3.9а) временно отбросить второе слагаемое, то появится дополнительный вклад при значении  $t$ , получаемом из (3.12а), если положить там  $t_2 = t_3 = 4M^2$ , поскольку такое значение является (на данном этапе вычислений) наименьшим значением  $t$ , при котором  $A_3$  отлично от нуля. Получающийся результат относительно  $s$  изображен на фиг. 2 в виде кривой  $C_2$ . Соответствующий вклад в  $A_3$  возникает при значениях  $T > 16M^2$ , так как кривая  $C_2$  асимптотически приближается к линии  $t = 16M^2$ , причем вблизи значения  $t = 16M^2$  этот вклад будет вести себя как  $(t - 16M^2)^{1/2}$ . Значение  $t = 16M^2$  является точным пороговым значением энергии рождения дополнительной нуклон-антинуклонной пары в процессе (III), так что  $A_3$

обнаруживает поведение, которого и следовало ожидать вблизи этого порога.

Мы получаем аналогичные скачки в высших производных  $A_{13}$  на целом ряде кривых (на каждый порог их приходится уже более чем по одной), асимптотически приближается к линиям  $t = 4n^2M^2$ , так что  $A_3$

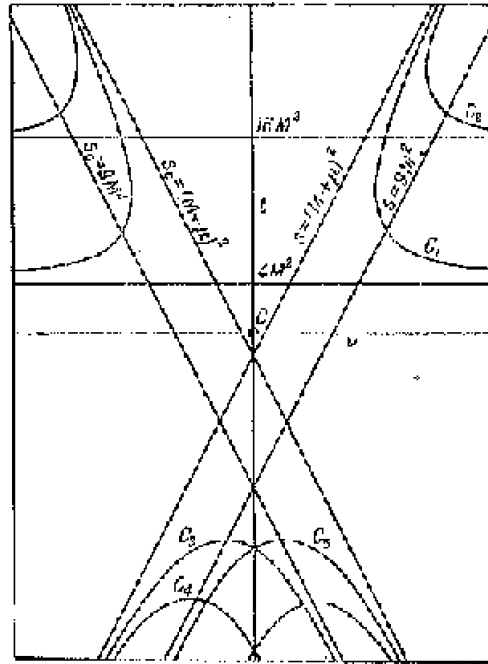


Рис. 2: Свойства спектральных функций

будет иметь ожидаемое поведение на порогах рождения  $n$  нуклон-анти-нуклонных пар.

Функции  $A_{12}$  и  $A_2$  характеризуются аналогичными особенностями. Наименьшими значениями  $t_2$  и  $s_{c3}$ , дающими вклад в подынтегральное выражение в (3.9б), являются значения  $t_2 = 4M^2$  и  $s_{c3} = M^2$  так что границы области, где  $A_{12}$  отлично от нуля, получаются при помощи подстановки этих значений в (3.12в). Этот результат представлен на фиг. 2 в виде кривой  $C_3$ , которая приближается к линии  $s_c = 9M^2$ , когда  $s$  стремится к бесконечности. Так же как и для  $A_{13}$ , область где  $A_{12}$  отлична от нуля, будет уточнена в следующем параграфе. Из (3.11а) уже сейчас следует, что  $A_2$  отлична от нуля по крайней мере при  $s_c > 9M^2$ , т.е. выше порога рождения пары в процессе (II). Вычисления показывают, что высшие производные  $A_{12}$  так же претерпевают скачки, но все эти кривые асимптотически приближаются к линиям  $t = 4n^2M^2$ .

Возвратимся теперь ко второму слагаемому в соотношении (3.11), которым мы до сих пор пренебрегали при вычислениях. Его можно учесть, вводя требование перекрестной симметрии, которое до сих пор еще не использовалось. При вычислении  $A_{23}$  следует воспользоваться, как и в ста-

тической теории, методом итераций. Сначала функция  $A_{23}$ , влияющая в дисперсионном соотношении (2.5) только на перекрестный член, отбрасывается и вычисления проводятся только что описанным способом. Затем  $A_{23}$  находится из вычисленного значения  $A_{13}$  при помощи перекрестного соотношения (2.23) и подставляется в соотношение (3.11) для следующей итерации. Однако вычисленная таким способом амплитуда рассеяния еще будет удовлетворять условиям перекрестной симметрии, поскольку, в то время как  $A_{13}$  и  $A_{23}$  связаны соотношением (2.23а),  $A_{12}$  не удовлетворяет соотношению (2.23б). Итак, мы убедились, что дисперсионные соотношения совместно с уравнением, выражающим условие унитарности, определяют  $A_{12}$  однозначно; однако получающаяся в результате функция не симметрична относительно переменных  $s$  и  $s_c$ ; несимметрична даже область, где она отлична от нуля. Таким образом, оказывается, что условия, накладываемые аналитичностью, унитарностью, (в одномезонном приближении) и перекрестной симметрией, не могут быть выполнены одновременно.

Причину этого нетрудно усмотреть из теории возмущений. Среди диаграмм включенных при первой итерации в одномезонном приближении, и также тополо

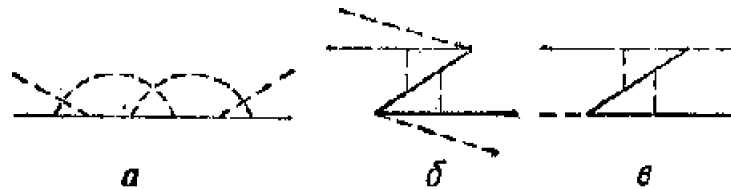


Рис. 3: Диаграммы, включающие промежуточные состояния с нуклон-антинуклонными парами

подобная ей диаграмма (фиг. 3), так как амплитуда рассеяния, отвечающая диаграмме *a*, привносила бы квадратные корни в энергетических знаменателях и не обладала бы необходимыми аналитическими свойствами. Далее, если нужна перекрестная симметрия, то также должна включаться в рассмотрение диаграмма на фиг. 3. Однако в последней диаграмме промежуточное состояние содержит, кроме нуклона, пару нуклон-антинуклон, так что условие унитарности в одномезонном приближении не выполняется.

Этот пример показывает также, как следует видоизменить используемый нами метод итераций. При подстановки функции  $A_{23}$ , получен-



ной в предыдущей итерации при помощи перекрестной симметрии, в соотношение (3.11) нужно добавить к ней функцию  $A'_{12}(s, s_c)$ , равную функции  $A_{12}(s, s_c)$ , вычисленной в предыдущей итерации. Вклад от добавленной функции должен быть сложен с вкладом от  $A_{12}(s, s_c)$  вычисленным обычным способом. Функция  $A'_{12}$  отлична от нуля в области, расположенной на фиг. 2 выше кривой  $C_5$ , и, в частности, равна нулю для всех значений  $s_c$ , если  $s$  меньше  $9M^2$ . Перекрестная симметрия теперь выполняется полностью, но добавление  $A'_{12}$  нарушает условие унитарности (в одномезонном приближении) для значений  $s$ , больших  $9M^2$ ; при этом разложение в ряд теории возмущений содержит члены, соответствующие диаграмме (фиг. 3). Тот факт, что мы были вынуждены допустить диаграммы, встречающиеся в высших приближениях, не следует рассматривать как недостаток нашего метода. во всяком случае условие унитарности нарушается далеко за пределами применимости одномезонного приближения.

Используемый метод итераций обуславливает возникновение дополнительных кривых, подобных  $C_2$  и  $C_4$  (см. фиг. 2), на которых высшие производные спектральных функций претерпевают разрывы. Данные новые разрывы соответствуют рождению мезонов совместно с нуклон-антинуклонными парами. Пока мы не имеем скачков для всех возможных порогов.

Включение в рассмотрение спина не изменяет основных особенностей теории, хотя и значительно усложняет детали расчета. следуя Чу и др., [1] запишем  $\pi$ -мезон-нуклонную T-матрицу в виде

$$T = -\frac{2\pi W}{Ew} (a + \vec{\sigma} \cdot \vec{q}_2 \vec{\sigma} \cdot \vec{q}_1 b), \quad (3.15)$$

где  $E$  и  $w$  – энергии соответственно нуклона и  $\pi$ -мезона в системе центра масс. Связь  $a$  и  $b$  с величинами  $A$  и  $B$ , фигурирующими в (2.20), дается формулами

$$a = \frac{E + M}{2W} \left( \frac{A + (W - M)B}{4\pi} \right), \quad (3.16a)$$

$$b = \frac{E - M}{2W} \left( \frac{-A + (W + M)B}{4\pi} \right). \quad (3.16)$$

Условие унитарности (3.7), выраженное через величины  $a$  и  $b$ , может быть переписано в следующем виде:

$$a_{13(12)}(s, z_1) = \sum_a \frac{q}{\pi} \int dz_2 \int dz_3 K_{1(2)}(z_1, z_2, z_3) \times$$

$$\times \left\{ a_a^*(s, z_2) a_a(s, z_3) + \frac{z_2 - z_3 z_1}{1 - z_1^2} b_a^*(s, z_2) a_a(s, z_3) + \right. \\ \left. + \frac{z_3 - z_2 z_1}{1 - z_1^2} a_a^*(s, z_2) b_a(s, z_3) \right\}, \quad (3.17a)$$

$$b_{13(12)}(s, z_1) = \sum_a \frac{q}{\pi} \int dz_2 \int dz_3 K_{1(2)}(z_1, z_2, z_3) \times \\ \times \left\{ \frac{z_3 - z_2 z_1}{1 - z_1^2} b_a^*(s, z_2) a_a(s, z_3) + \frac{z_2 - z_3 z_1}{1 - z_1^2} \times \right. \\ \left. \times a_a^*(s, z_2) b_a(s, z_3) + b_a^*(s, z_2) b_a(s, z_3) \right\}, \quad (3.17)$$

где  $\sum_a$  означает, что, так же как и в (3.7), члены вида  $a_a^* a_a$  при вычислении  $a_{13}$  и  $b_{13}$  заменяются на  $a_2^* a_2 + a_3^* a_3$ , а при вычислении  $a_{12}$  и  $b_{12}$  – на  $a_2^* a_3 + a_3^* a_2$ . Величины  $a_2$  и  $b_2$ ,  $a_3$  и  $b_3$ ,  $a_{12}$  и  $b_{12}$ ,  $a_{13}$  и  $b_{13}$  связаны соответственно с  $A_2$  и  $B_2$ ,  $A_3$  и  $B_3$ ,  $A_{12}$  и  $B_{12}$ ,  $A_{13}$  и  $B_{13}$  формулами (3.16). Условие унитарности (3.17) может быть выражено через  $A$  и  $B$  в следующем виде

$$A_{13(12)}(s, z_1) = \sum_a \frac{q}{4\pi^2 W} \int dz_2 \int dz_3 K_{1(2)}(z_1, z_2, z_3) \times \\ \times \left\{ \left( 1 - \frac{w}{2W} \cdot \frac{1 - z_2 - z_3 + z_1}{1 + z_1} \right) A_a^*(s, z_2) A_a(s, z_3) + \right. \\ + \left( \frac{\omega}{2} \cdot \frac{1 - z_2 + z_3 - z_1}{1 - z_1} + \frac{M_w}{2W} \cdot \frac{1 - z_2 - z_3 + z_1}{1 + z_1} \right) A_a^*(s, z_2) B_a(s, z_3) + \\ + \left( \frac{\omega}{2} \cdot \frac{1 + z_2 - z_3 - z_1}{1 - z_1} + \frac{M_w}{2W} \cdot \frac{1 - z_2 - z_3 + z_1}{1 + z_1} \right) B_a^*(s, z_2) B_a(s, z_3) + \\ \left. + \frac{W^2 - M^2}{2W} \cdot \frac{1 - z_2 - z_3 + z_1}{1 + z_1} B_a^*(s, z_2) B_a(s, z_3) \right\}, \quad (3.18a)$$

$$B_{13(12)}(s, z_1) = \sum_a \frac{q}{4\pi^2 W} \int dz_2 \int dz_3 K_{1(2)}(z_1, z_2, z_3) \times \\ \times \left\{ \frac{E}{2MW} \cdot \frac{1 - z_2 - z_3 + z_1}{1 + z_1} A_a^*(s, z_2) A_a(s, z_3) + \right. \\ + \left( \frac{1 - z_2 + z_3 - z_1}{1 - z_1} + \frac{E}{2W} \cdot \frac{1 - z_2 - z_3 + z_1}{1 + z_1} \right) A_a^*(s, z_2) B_a(s, z_3) + \\ + \left( \frac{1 - z_2 + z_3 - z_1}{1 - z_1} + \frac{E}{2W} \cdot \frac{1 - z_2 - z_3 + z_1}{1 + z_1} \right) B_a^*(s, z_2) A_a(s, z_3) +$$

$$\left( \omega - \frac{(w^2 - M^2)E}{2MW} \cdot \frac{1 - z_2 - z_3 + z_1}{1 + z_1} \right) B_a^*(s, z_2) B_a(s, z_3) \Big\}. \quad (3.18)$$

Соотношения (3.17) и (3.18) выполняются для отдельных амплитуд, соответствующих значениям изотопического спина  $1/2$  и  $3/2$ .

Остается доказать утверждение, что полученный нашим методом результат, будучи разложен в ряд теории возмущений, дает подпоследовательность обычного ряда теории возмущений. Это доказательство не отличается изящностью, так как в нашем методе не удается удовлетворить условие унитарности в одномезонном приближении при всех энергиях. Будем сначала игнорировать последнее обстоятельство. Тогда  $n$ -ый член  $A^{(n)}$  ряда теории возмущений в физической области однозначно определяется при следующих двух условиях.

1) Для достаточно малых значений передаваемого импульса (меньших  $2\mu^{3/2}(2M + \mu)/(2M + \mu)^{1/2}$ ) функция  $A^{(n)}$  должна удовлетворять дисперсионному соотношению (2.5), что доказано строго. [13] Абсорбтивная часть  $A_1$  известна, так как в физической области она выражается при помощи условия унитарности через члены низшего порядка теории возмущений, и может быть аналитически продолжена (при фиксированном  $s$ ) за пределы физической области. [13]

2) При фиксированном значении  $s$  функция  $A^{(n)}$  аналитична по передаваемому импульсу в физической области. [13]

Так как вычисляемые нашим методом функции наверняка удовлетворяют этим требованиям, то они должны давать обычный ряд теории возмущений.

Однако полученный нами результат не удовлетворяет в одномезонном приближении условию унитарности при всех энергиях, и мы должны более внимательно рассмотреть, как следует определять  $A_1$ . Предположим, что наш метод дает правильно ряд теории возмущений вплоть до членов  $(n - 1)$ -го порядка. Тогда вклад членов  $n$ -го порядка в  $A_1$  по рассмотренным в данном разделе причинам будет иметь вид

$$A^{(n)} = \frac{1}{\pi} \int dt' \frac{A_{13}^{(n)}(s, t')}{t' - t} - \frac{1}{\pi} \int dt' \frac{A_{12}^{(n)}(s, t')}{t' - t}, \quad (3.19)$$

где  $A_{13}^{(n)}$  и  $A_{12}^{(n)}$  заведомо обращаются в нуль соответственно ниже кривой  $C_1$  и выше кривой  $C_3$  на фиг. 2. Подставляя (3.19) в (2.5) получаем

$$A_d^{(n)} = \frac{1}{\pi^2} \int ds' \int dt' \frac{A_{13}^{(n)}(s', t')}{(s' - s)(t' - t)} -$$

$$-\frac{1}{\pi^2} \int ds' \int dt' \frac{A_{12}^{(n)}(s', t')}{(s' - s)(t' - t)}. \quad (3.20)$$

Индекс  $d$  указывает, что рассматривается прямой, а не перекрестный член. Второе слагаемое в (2.20) не является аналитической функцией  $t$  в физической области; оно имеет точку ветвления при небольшом значении  $t$ , для которого  $A_{12}$  отлично от нуля. Добавив к  $A_2$  выражение

$$-\frac{1}{\pi} \int dt' \frac{A_{12}^{(n)}(s_c, t')}{t' - t}, \quad (3.21)$$

на основании и представления (2.17) можно ожидать, что второе слагаемое в (3.20) будет аналитичным, если, конечно, наше представление верно. Подставляя (3.21) в (2.5) и прибавляя полученный результат ко второму слагаемому в (3.20), получаем функцию

$$\frac{1}{\pi^2} \int ds' \int ds'_c \frac{A_{12}^{(n)}(s', s'_c)}{(s' - s)(s'_c - s)}, \quad (3.22)$$

которая аналитична в физической области. Вклад в  $A_2^{(n)}$  от (3.21) однозначно определяется из требования, чтобы  $A^{(n)}$  была аналитической функцией передаваемого импульса в физической области и не обращалась в нуль при  $s_t > 9M^2$ . Этот вклад соответствует добавлению диаграммы, подобной диаграмме , к диаграмме  $a$  (фиг.3). Так как  $A_1$  для диаграммы (фиг.3) отлично от нуля при  $s > 9M^2$ ,  $A_2$  для диаграммы отлично от нуля при  $s_c > 9M^2$ .

Таким образом, член  $n$ -го порядка ряда теории возмущений может быть определен из членов более низкого порядка, без использования каких-либо недоказанных свойств амплитуды рассеяния, следующим образом:

1) Путем использования условия унитарности вычисляется  $A_1$  и аналитически продолжается в нефизическую область значений передаваемого импульса, меньших  $2\mu^{[2/3}(2M + \mu)/(2M - \mu)]^{1/2}$ .

2) Вычисляется вклад в  $A_2^{(n)}$  от  $A_{2d}^{(n)}$  при  $s > 9M^2$ . Вычисление осуществляется с помощью условия, что при подстановке  $A_{2d}^{(n)}$  совместно с  $A_1$  в (2.5) должна получаться функция  $A_d$ , аналитичная по передаваемому импульсу в физической области. При этом мы частично учитываем промежуточные состояния, содержащие нуклон-антинуклонные пары, необходимые для обеспечения нужных свойств аналитичности и для выполнения перекрестной симметрии.

3) Далее вычисляется  $A_2^{(n)}$  и дополнительный вклад в  $A^{(n)}$  с помощью условия перекрестной симметрии из  $A_1^{(n)}$  и дополнительного вклада в  $A_2^{(n)}$ .

4) Из соотношения (2.5) находится  $A^{(n)}$  для значений передаваемого импульса, меньших  $2\mu^{2/3}(2M + \mu)/(2M - \mu)^{1/2}$ , затем  $A^{(n)}$  вычисляется посредством аналитического продолжения по  $t$  в остальной части физической области.

Описанная процедура определяет одномезонное приближение в теории возмущений. Из сказанного ясно, что наше решение даст в точности соответствующее разложение теории возмущений. Отсюда следует, что наши предположения оправдываются в теории возмущений.

## § 4. Вычитательные члены в дисперсионных соотношениях

До сих пор нами предполагалось, что дисперсионные соотношения верны без каких-либо вычитаний. В § 1 было отмечено, что такое допущение приводит к пренебрежению наиболее важной в физическом отношении частью амплитуды рассеяния. В настоящем параграфе будет рассмотрен вопрос о том, сколько вычитаний необходимо выполнить для каждого дисперсионного соотношения, и будет намечена методика соответствующих вычислений, подробности которых будут изложены в последующей статье.

Рассмотрим сначала соотношения (2.11) и (2.16), которые использовались при получении условия унитарности (3.9) [или (3.18) для нуклонов с учетом спина]. Можно показать, что включение вычитательных членов в соотношения (2.11) и (2.16) не меняет вид условия унитарности (3.9), так что вычитательные члены необходимы только в окончательном выражении  $A$  через  $A_2$  и  $A_3$  при помощи соотношений (2.11), или при окончательном выражении  $A_1$  через  $A_{12}$  и  $A_{13}$  при помощи соотношения (2.16).

Число вычитаний в нашем методе зависит от поведения  $A_{12}$ ,  $A_{13}$ ,  $A_2$  и  $A_3$  при  $s_c$  и  $t$ , стремящихся к бесконечности. Необходимо выполнить по крайней мере такое количество вычитаний, чтобы интегралы в соотношениях (2.11) и (2.16) сходились.

Оценка поведения этих функций при больших  $s_c$  и  $t$  на основе определяющих их уравнений является трудным делом. Поэтому мы используем косвенные, хотя и не строгие, но весьма правдоподобные рассуждения. Оказывается, что в случае достаточно малой константы связи эти функции на бесконечности стремятся к нулю, так что дисперсионные

соотношения можно писать совсем без вычитаний. (Читатель, готовый принять это утверждение, может опустить два последующих абзаца.)

Рассмотрим лишь первую итерацию, так как последующие итерации проводятся аналогично и маловероятно, чтобы они качественно изменили окончательный результат. Полученный результат может быть далее разложен в ряд теории возмущений. Если решения данной задачи, полученные другими методами, таким, как методы Тамма–Данкова или Бете–Салпетера, разложить в ряд теории возмущений, то, как известно, ряд для каждого состояния с определенным моментом количества движения сходится, пока значение константы связи лежит в пределах определенного радиуса сходимости, причем этот радиус сходимости стремится к бесконечности с увеличением момента количества движения.<sup>4</sup> Получающийся в нашем случае ряд теории возмущений будет отличаться от рядов, полученных другими методами, частично вследствие несовпадения промежуточных состояний с парами, учитываемых в нашем методе и каждом из других указанных методов, и частично потому, что при вычислении вычитательных членов (помимо рассматриваемых здесь) мы учитываем лишь часть членов, соответствующих диаграммам, относящимся ко взятому приближению. Можно ожидать, что различия такого типа не влияют качественно на свойства сходимости амплитуд в состояниях с определенными моментами количества движения, и мы предположим, что высказанное выше утверждение справедливо также для ряда теории возмущений, полученного нашим методом.

Можно показать, что амплитуда перехода для состояния с полным моментом количества движения  $j$  и орбитальным моментом количества движения  $j \pm \frac{1}{2}$  имеет вид

$$f_{j\pm} = \int_{-1}^{+1} dz a(s, z) P_{j\pm\frac{1}{2}}(z) + \int_{-1}^{+1} dz b(s, z) P_{j\pm\frac{1}{2}}(z), \quad (4.1)$$

где  $a$  и  $b$  – функции, определяемые формулами (3.15) и (3.16). Легко видеть, что каждый член в разложении  $a_2(s, z)$ ,  $a_3(s, z)$ ,  $b_2(s, z)$ , и  $b_3(s, z)$  в ряд теории возмущений убывает, как  $1/z$  при  $z$ , стремящемся к бесконечности, так что дисперсионное соотношение (2.11) может быть

---

<sup>4</sup>Заметим, что “потенциал” фигурирующий в уравнениях Тамма–Данкова или Бете–Салпетера, учитывает только перекрестный член и не учитывает прямой член, который следует включить в расчет.

написано для каждого члена без каких-либо вычитаний. Следовательно

$$f_{j\pm}^{(n)} = \int_{-1}^{+1} dz \int dz' \left\{ \frac{a_2^{(n)}(s, z') + a_3^{(n)}(s, z')}{z' - z} P_{j\pm\frac{1}{2}}(z) + \frac{b_2^{(n)}(s, z') + b_3^{(n)}(s, z')}{z' - z} P_{j\pm\frac{1}{2}}(z) \right\}, \quad (4.2)$$

или

$$f_{j\pm}^{(n)} = \int dz' \left\{ [a_2^{(n)}(s, z') + a_3^{(n)}(s, z')] \varphi_{j\pm\frac{1}{2}}(z') + [b_2^{(n)}(s, z') + b_3^{(n)}(s, z')] \varphi_{j\pm\frac{1}{2}}(z') \right\}, \quad (4.3)$$

где

$$\varphi_n(z') = \int_{-1}^{+1} dz \frac{P_n(z)}{z' - z} \approx 1/z'^{n+1} \quad \text{при} \quad z' \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

Предположим, что значение константы связи таково, что ряд теории возмущений для состояний с моментом количества движения  $j_1$  сходится. Если каждый член ряда теории возмущений для состояния с указанным моментом количества движения представить в виде (4.3) и если предположить законность изменения порядка суммирования и интегрирования, то мы приходим к следующему соотношению:

$$f_{j_1\pm} = \int dz' \left\{ \sum_n [a_2^{(n)}(s, z') + a_3^{(n)}(s, z')] \varphi_{j_1\pm\frac{1}{2}}(z') + \sum_n [b_2^{(n)}(s, z') + b_3^{(n)}(s, z')] \varphi_{j_1\pm\frac{1}{2}}(z') \right\}. \quad (4.5)$$

Из (4.4) следует, что для того, чтобы подынтегральное выражение было определено,  $a$  и  $b$  должны убывать на бесконечности быстрее, чем  $z^{j_1 - \frac{1}{2}}$ . Поэтому при записи дисперсионных соотношений возможно не более  $j - \frac{1}{2}$  вычитаний. В частности, если константа связи достаточно мала, для записи дисперсионных соотношений вовсе не требуется вычитаний.<sup>5</sup>

<sup>5</sup>Следует подчеркнуть, что необходимое число вычитаний обеспечивает сходимость для состояний с определенным моментом количества движения только в первой итерации. Мы ничего не можем сказать о сходимости ряда теории возмущений в последующих итерациях, а просто предположим, что поведение спектральных функций при больших  $z$  качественно не отличается от их поведения в первой итерации.

Если константа связи такова, что требуется  $n$  вычитаний, то условие унитарности должно применяться по отдельности к каждому состоянию с моментом количества движения от  $\frac{1}{2}$  до  $n - \frac{1}{2}$ . Парциальные амплитуды рассеяний в этих состояниях являются полиномами степени, не большей  $n - 1$  по переменной  $z$  (или  $s_c$  и  $t$ ), и не определяются абсорбтивными частями в дисперсионных соотношениях (2.11) и (2.16).

Расчет с использованием условия унитарности должен проводиться после каждой итерации, так как получающийся результат необходим для следующей итерации. Детали подобного расчета в данной статье не обсуждаются; он в принципе аналогичен расчетам Чу и Лоу [14] и Кастильехо, Далитца и Дайсона. [7] При этом в расчетах рассматривается величина, обратная амплитуде рассеяния. Аналитические свойства парциальных амплитуд с определенными моментами количества движения оказываются не столь простыми, как в статической теории; однако эти свойства могут быть определены из аналитических свойств амплитуды перехода, причем, как и в статической теории, сингулярности вне вещественной положительной оси задаются предыдущей итерацией.

Точное число вычитаний нельзя определить до вычисления конечного результата, но оно почти всегда не менее двух. Не легко представить, каким образом правильно описывается наблюдаемое резонансное поведение в состоянии  $P_{2/3}$  при помощи теории, описанной в последнем параграфе, тогда как оно весьма естественно вытекает из вычислений типа Чу и Лоу. Если константа связи достаточно велика, чтобы было возможно резонансное состояние  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ , то при этом значении константы связи и в некотором интервале ее значений ниже данного необходимо во всяком случае выполнить два вычитания. Трудно определить точно границы указанного интервала, но и можно ожидать, что он включает те значения константы связи, для которых состояние  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$  проявляется как нестабильная изобара. Однако мы пока предположим, что константа связи достаточно мала для того, чтобы  $A(s, z)$  и  $B(s, z)$  стремились к нулю при больших  $z$ , так как в этом случае значительно упрощается ситуация с остальными вычитаниями. Тем не менее и при таком выборе константы связи нам понадобится выполнить по одному вычитанию для  $A$  и  $B$ , поскольку вычисления в предыдущем параграфе не включали полюс амплитуды рассеяния, соответствующий одноуклонному промежуточному состоянию, и учитывали только полюс в перекрестном члене. Этот полюс относится только к состояниям с  $j = \frac{1}{2}$ , так как его можно точно учесть, если условие унитарности применить отдельно к этому состоянию по методу Чу и Лоу. При этом  $A$  и  $B$  изменяются на величину, не зависящую от  $z$ .



При вычислении амплитуд рассеяния для состояний с  $j = \frac{1}{2}$  в первой итерации возникает, точно так же, как и в других моделях, “призрачное” состояние (ghost state). Однако в последующих итерациях, где учитываются вклады перекрестных членов, призрачные состояния не следуют обязательно из уравнений. Поэтому, судя по модели заряженного скалярного поля, можно надеяться, что в действительности призрачные состояния отсутствуют.

Обратимся теперь к рассмотрению вычитательных членов в других дисперсионных соотношениях, использованных в наших расчетах, а именно в (3.11). Если в соотношениях (3.18) подставить  $\delta$ -образную составляющую  $A_2$ , то можно видеть что член низшего порядка в  $A_{13}(s, t)$  стремится к константе при  $s$ , стремящемся к бесконечности, в то время как член низшего порядка в  $B_{13}(s, t)$  ведет себя на бесконечности как  $1/s$ . В некоторой области значений  $t$ ,  $A_{13}$  и  $B_{13}$  доминируют члены низшего порядка, так что в соотношении (3.11б) для  $A_3$  потребуется наверняка одно вычитание, тогда как соотношение для  $B_3$  может быть написано совсем без вычитаний. Аналогично находим, что  $A_{12}(s, s_c)$  и  $B_{12}(s, s_c)$  убывают как  $1/s$ , когда  $s$  стремится к бесконечности. Поэтому, казалось бы, для дисперсионных соотношений (3.11) не потребуется вычитаний. Однако мы убедились, что  $A_1(s, s_c)$  и  $B_1(s, s_c)$  ведут себя как константы в области больших  $s_c$  при фиксированном  $s$ , даже для малых значений константы связи, так что из перекрестной симметрии следует, что  $A_2(s, s_c)$  и  $B_2(s, s_c)$  являются константами при больших  $s$ . Поэтому в соотношениях (3.11) как для  $A_2$ , так и для  $B_2$  нужен один вычитательный член.

Определение вычитательных членов в соотношении (3.11а) не представляет трудностей, так как вклады в  $A_2$  и  $B_2$  от состояний  $j = \frac{1}{2}$  [при фиксированном значении энергии  $s_c$  для процесса (II)] могут быть найдены с помощью перекрестной симметрии из соответствующих вкладов в  $A_1$  и  $B_1$  в предыдущей итерации. Однако для получения вычитательных членов в соотношении (3.11б) потребуется условие унитарности для  $A_3$ , относящееся к процессу (III). Так как имеется только одно вычитание, в рассмотрение входят только  $S$ -волны. При этом мы снова должны ограничивать число рассматриваемых промежуточных состояний. В качестве первого приближения мы должны ограничиваться двухмезонными состояниями (“двухмезонное приближение”), а также, возможно, нуклон-антинуклонными промежуточными состояниями (“приближение двух мезонов и одной пары”). Тогда нам потребуется амплитуда мезон-мезонного рассеяния (и амплитуда нуклон-антинуклонно-го рассеяния, если включены в рассмотрение промежуточные состояния.) Для получе-

ния этих амплитуд рассеяния потребовались бы столь же значительные вычисления, как и для получения амплитуды мезон-нуклонного рассеяния; однако пренебрежение перекрестным членом, по-видимому, не вызовет слишком большой ошибки в нашем окончательном результате, и в этом случае амплитуды  $S$ -волны могут быть немедленно выписаны в двухмезонном приближении или в приближении двух мезонов и одной пары. Таким образом, в рассмотрение входит константа связи мезонов с мезонами, как это было упомянуто во введении.

Как только станут известны амплитуды мезон-мезонного и нуклон-антинуклонного рассеяния, может быть вычислена амплитуда перехода для процесса (III). Так как интегральное уравнение теперь линейно, то детали расчетов будут отличаться от расчетов Чу-Лоу; но, как и в случае Чу-Лоу, можно записать точное решение, если амплитуда перехода не имеет никаких дополнительных сингулярностей и мы можем применить для рассматриваемой задачи метод итераций. Соответствующие итерации снова будут проводиться между итерациями основного расчета. Вычисленная этим способом часть  $A_3$ , соответствующая  $S$ -волне, будет отлична от нуля при  $t > 4\mu^2$ , так что полученная амплитуда рассеяния обладает теперь ожидавшимися спектральными свойствами. Границы областей, где спектральные функции не равны нулю, также изменяются; это обстоятельство будет обсуждено более детально в конце данного параграфа.

Мы видели, что пока константа связи достаточно мала, требуется одно вычитание для каждого дисперсионного соотношения, за исключением соотношения (3.116) для  $B_3$ , для которого совсем не требуется вычитаний. Легко видеть, что такая ситуация не содержит противоречия: функции, вычисленные в последнем параграфе, после введения вычитательных членов не будут слишком велики на бесконечности ни на каком этапе вычислений. Если бы вводились какие-либо добавочные вычитания, то можно было бы показать, что при расчете необходимое количество вычитаний возрастает по ходу вычислений, т.е. получение окончательного результата было бы невозможным. Таким образом, число необходимых вычитаний определяется однозначно. Существует одно исключение из этого правила; можно выполнить одно вычитание в соотношении (3.116) для  $B_3$ . Такое вычитание, однако, исключается требованием непротиворечивости теории при включении взаимодействия с электромагнитным полем. Так, если бы последнее вычитание было выполнено, то амплитуда рассеяния вела бы себя как  $f(t)\gamma (q_1 + q_2)$  при больших  $s$ . В то же время из калибровочной инвариантности следует,

что матричный элемент для процессов

$$\pi^{\pm} + n \rightarrow \pi^{\pm} + n + \gamma \quad \text{или} \quad \pi^0 + p \rightarrow \pi^0 + p + \gamma$$

будет содержать член, который ведет себя как  $f(t)\gamma$  при больших  $s$ , где  $t$  теперь обозначает квадрат передаваемого импульса нейтральной частицы со знаком минус.<sup>6</sup> Вклад в  $B_1$  и  $B_{13}$  от промежуточного состояния  $\pi - N - \gamma$  поэтому стремится к бесконечности при больших  $s$ , по крайней мере как  $s$  в первой степени, так что для рассматриваемого дисперсионного соотношения потребовалось бы два вычитания и теория оказалась бы противоречивой.

Так как в методе Чу-Лоу условие унитарности должно применяться по отдельности к двум состояниям с  $j = \frac{1}{2}$   $\pi$ -мезон-нуклонной системы и к  $S$ -состоянию двухмезонной системы, возникают связанные с этими состояниями неоднозначности типа тех, на которые указали Кастильехо, Далитц и Дайсон. Эти неоднозначности будут, конечно, влиять на все состояния в последующих итерациях. Они соответствуют существованию нестабильных барионов со спином  $\frac{1}{2}$  и той или иной четности или тяжелых нестабильных мезонов со спином нуль. Состояния с более высокими моментами количества движения не приводят ни к каким неоднозначностям; этот факт находится в соответствии с теорией возмущений, согласно которой системы, содержащие частицы спина 1 или выше, ненормируемы. Без взаимодействия с электромагнитным полем можно было бы ввести дополнительный вычитательный член, который обусловил бы необходимость, отдельного применения условия унитарности для  $P$ -состояния двухмезонной системы. Получающаяся неоднозначность Кастильехо-Далитца-Дайсона была бы связана с существованием тяжелого нестабильного векторного мезона. Этот случай соответствует смеси Бете-Бирда векторных и скалярных мезонов, которая ренормируема в теории возмущений, если не вводится взаимодействие с электромагнитным полем.

Рассмотрим теперь ситуацию, которая встречается на практике, когда константа связи так велика, что амплитуда рассеяния стремится к бесконечности с ростом  $z$  (или  $s_c, t$ ) при постоянном значении  $s$ . Функция  $A'_{12}$ , которая, согласно нашему способу вычислений, стремится теперь к бесконечности с ростом  $s$ , так что  $A_2$ , вычисляемая из соотношения 93.11a), должна вести себя аналогичным образом. На практике, когда условие унитарности должно применяться по отдельности к состояниям

<sup>6</sup>Это утверждение может быть подтверждено при помощи обобщения тождества Уорда, предложенного Гринном [14] и Ли; [15] оно доказано в работе. [16]

с  $j = \frac{3}{2}$  и  $j = \frac{1}{2}$ , функции  $A'_{12}(s, s_c)$  и  $A_{23}(s_c, t)$  стремятся к бесконечности быстрее, чем  $s$  или  $t$ , и дисперсионное соотношение (3.11a) будет требовать два вычитания. Вычитательные члены могут быть определены, как и прежде, при помощи перекрестной симметрии. Однако, как мы видели, если  $A_2$  растет при больших  $s$ , то вычисление не может быть осуществлено последовательным образом, так что необходимо ввести дальнейшие видоизменения нашего метода.

Причина затруднения состоит, вероятно, в недостаточности однозонного приближения. Противоречие сказывается как раз при том значении константы связи, для которого вклад в амплитуду рассеяния от  $A'_{12}$  становится сравнимым с вкладом остальной части амплитуды рассеяния при больших  $s$ . Так как часть  $A_1$ , рассчитанная из  $A'_{12}$ , представляет частичный эффект состояний с одной или большим числом пар, то вклад от этих промежуточных состояний весьма существен при высоких энергиях. Поэтому кажется естественным, что если учесть должным образом вышеуказанные состояния, то удастся осуществить вычисления при больших значениях константы связи. В однозонном приближении нужно ввести некоторого рода обрезание при  $s > 9M^2$  для вклада  $A_2$  от перекрестного члена. Так как это обрезание вызывает изменение условия унитарности в той области, где оно заведомо неточно, то оно не противоречит нашим приближениям и можно надеяться, что теория не очень чувствительна к точному положению и форме обрезания. В случае учета дальнейших приближений, включающих промежуточные состояния с нуклон-антинуклонными парами, обрезание всегда следует применять на пороге или выше порога пренебрегаемых процессов.

Поскольку мы вводим обрезание, то законно поставить вопрос, следует ли проводить более чем одно вычитание для соотношения (3.11б). На этот вопрос можно ответить, лишь исследовав поведение амплитуды рассеяния и ее абсорбтивных частей при больших  $s$ , когда мы выходим за рамки однозонного приближения. Однако, если  $A$  и  $B$  ведут себя на бесконечности, как предполагалось до сих пор ( $A$  постоянно, а  $B$  убывает как  $1/s$ ), то сечение рассеяния стремится к нулю при больших  $s$  как  $1/s$ , тогда как эксперимент показывает, что сечение рассеяния остается постоянным. Поэтому может потребоваться дополнительное вычитание и включение условия унитарности для процесса (III) в  $P$ -состоянии.

На первый взгляд кажется, что неоднозначности Кастильехо-Далитца-Дайсона сопутствуют всем состояниям, для которых условие унитарности применяется отдельно, а не только состояниям с  $j = \frac{1}{2}$ . Однако возможно также, что когда мы будем вводить в условие унитарности все большее число состояний, то окажется сходящимся только решение

без каких-либо дополнительных членов для волн с более высокими моментами количества движения. Это решение является аналитическим продолжением решения, полученного для малых значений константы связи, в то время как другие решения не могут быть продолжены ниже некоторого значения константы связи и не будут иметь разложения в ряд теории возмущений. Мы никак не можем исключить описанное затруднение, но тем не менее имеются основания предположить, что однозначность существует только для мезон-нуклонного состояний с  $j = \frac{1}{2}$  и для  $S$ -состояния системы двух мезонов, даже если константа связи велика.

Прежде чем закончить настоящий параграф, рассмотрим границы области, в которой спектральные функции  $A_{13}$ ,  $A_{23}$  и  $A_{12}$  отличны от нуля, т.е. определим положение кривых  $C_{13}$ ,  $C_{23}$  и  $C_{12}$  на фиг. 1. Так как  $A_3$  отлична от нуля для  $t^2 > 4\mu^2$ , то  $C_{13}$  в одномезонном приближении получается из (3.12а) при условии  $t_2 = t_3 = 4\mu^2$ , так что

$$t_{1a}^{1/2} = 4\mu \left(1 + \mu^2/q^2\right)^{1/2},$$

или

$$t_{1a} = \frac{16\mu^2(s - M^2 + \mu^2)^2}{[s - (M + \mu)^2][s - (M - \mu)^2]}. \quad (4.6)$$

Для любого заданного значения  $s$  функция  $A_{13}$  будет отличаться от нуля при  $t > t_{1a}$ . Заметим, что  $t_{1a}$  приближается к  $16\mu^2$ , когда  $s$  стремится к бесконечности. Это неожиданный результат: ведь в § 2 было показано, что величина

$t_{1a}$  должна стремиться к  $4\mu^2$ . Причина такого противоречия заключается в том, что в нашем приближении процесс (III) идет при  $4\mu^2 < t < 16\mu^2$  только в  $S$ -состоянии и  $A_3$  зависит в этой области только от  $t$ . Если бы процесс (III) мог идти через промежуточное состояние с одним  $\pi$ -мезоном, то функция  $A_3$  имела бы  $\delta$ -образную особенность при  $t = \mu^2$ ; подставив это значение в (3.12а), мы получили бы ожидаемый результат. Однако на самом деле, чтобы получить правильно границу для  $A_{13}$ , мы должны выйти за рамки одномезонного приближения.

Реакция  $N + \bar{N} \rightarrow 3\pi$  может идти через одномезонное состояние соответственно процессу, представленному диаграммой на фиг. 4а. Поэтому, если трактовать выходящие  $\pi$ -мезоны в реакции  $N + \pi \rightarrow N + 2\pi$  как одну частицу с определенной энергией и моментом количества движения и если представить амплитуду перехода аналогично амплитуде перехода для рассеяния  $\pi$ -мезонов на нуклонах, то абсорбтивная часть, соответствующая  $A_3$ , будет иметь  $\delta$ -образную особенность при  $t = \mu^2$ .

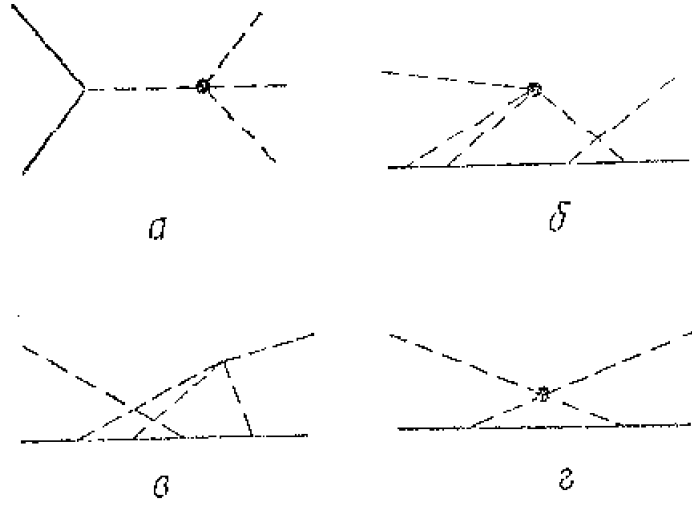


Рис. 4: Диаграммы, включающие мезон-мезонное взаимодействие

Соответствующий вклад в  $A_{13}$  (для нуклон-мезонной амплитуды рассеяния) может быть получен из условия унитарности, так же как были получены вклады одномезонного приближения. Переменные  $z_2$  и  $z_3$  в соотношениях (3.4) и (3.8) будут теперь относиться к отклонению нуклона в системе центра масс в реакции рождения мезона и связаны с передаваемым импульсом соотношением

$$z = \left\{ q^2 + q_1^2 + t - [(M^2 + q^2)^{1/2} - (M^2 + q_1^2)^{1/2}]^2 \right\} / 2qq_1,$$

где  $q_1$  – импульс выходящего нуклона в системе центра масс. Значение  $q_1$  будет зависеть от относительной энергии двух  $\pi$ -мезонов; нам понадобится максимальное значение  $q_1$  (для фиксированного  $s$ ), которое получается в том случае, когда  $\pi$ -мезоны покоятся относительно друг друга. Указанное значение  $q_1$  дается формулой

$$q_{1m}^2 = \left\{ [s - (M + 2\mu)^2][s - (M - 2\mu)^2] \right\} / 4s. \quad (4.7)$$

Мы находим далее, что граница данного вклада в  $A_{13}$  определяется уравнением

$$t_{1b} = \frac{4\mu^2(s - M^2 - 2\mu^2)^2}{[s - (M + 2\mu)^2][s - (M - 2\mu)^2]}. \quad (4.8)$$

Кривая, представляющая уравнение (4.8), асимптотически приближается к линиям  $t = 4\mu^2$  и  $s = (M + 2\mu)^2$ . Таким образом,  $A_{13}$  оказывается расположенным лишь выше порога рождения  $\pi$ -мезона.

Таким образом,  $A_{13}$  отлично от нуля для  $t > t_1$ , где

$$\begin{aligned} t_1 &= t_{1a}, & (M + \mu)^2 < s < (M + 2\mu)^2, \\ t_1 &= \min(t_{1a}, t_{1b}), & (M + 2\mu)^2 < s < \infty, \end{aligned} \quad (4.9)$$

а значение  $t = t_1$  соответствует кривой  $C_{13}$  на фиг. 1. Нельзя с достоверностью утверждать, что вклады других промежуточных состояний не выходят за пределы данной кривой, но это маловероятно вследствие сравнительно больших масс последних состояний.

Кривая  $C_{23}$  получается из кривой  $C_{13}$  простой заменой  $s$  на  $s_c$ . Кривая  $C_{12}$  может быть рассчитана аналогичным образом; для нее мы получаем

$$\begin{aligned} s_{c2} &= s_{c2a}, & (M + \mu)^2 < s < (M + 2\mu)^2, \\ s_{c2} &= \min(s_{c2a}, s_{c2b}), & (M + 2\mu)^2 < s < \infty, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где

$$\begin{aligned} (s_{c2a} - u)^{1/2} &= 2\mu \left\{ \frac{s^2 - s(3M^2 + 2\mu^2) + 2(M^2 - \mu^2)}{[s - (M + \mu)^2][s - (M - u)^2]} \right\}^{1/2} + \\ &+ \left\{ \frac{[M^2s - (M^2 - \mu^2)^2][s^2 - 2s(M^2 + 3\mu^2) + (M^2 - \mu^2)^2]}{s[s - (M + \mu)^2][s - (M - \mu)^2]} \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$s_{c2b}(s) = s(s_{c2a}). \quad (4.12)$$

Уравнение  $s_c = s_{c2b}$  фактически определяет границу области, в которой  $A_{12}$  отлично от нуля. Следует отметить, что, как только в рассмотрение включается мезон-мезонное взаимодействие, эта область асимптотически приближается к линии  $s = (M + 2\mu)^2$ , а не к линии  $s = 9M^2$ . Причина этого обстоятельства заключается в том, что теперь в наше приближение включаются процессы, соответствующие диаграммам типа б (фиг. 4), так что перекрестный член будет содержать вклад от промежуточного состояния, содержащего нуклон и два  $\pi$ -мезона (диаграмма в).

Для заданного вещественного значения  $s$  абсорбтивная часть  $A$  амплитуды рассеяния будет аналитической функцией передаваемого импульса в интервале

$$t_2 < t < t_1, \quad (4.13a)$$

где  $t_1$  определяется формулой (4.9), а  $t_2$  — формулами (4.10) и (2.13). Разложение по парциальным волнам сходится, если

$$-t_1 - 4q^2 < t < t_1, \quad (4.13)$$

так как  $-t_1 - 4q^2$  всегда больше  $t_2$ .

Отметим, наконец интересный пункт, касающийся спектральных свойств амплитуды рассеяния. Условие унитарности может использоваться, строго говоря, только в физической области; результаты такого применения должны аналитически продолжаться в нефизическую область. Указанная процедура была проделана как для процесса (I), так и для процесса (III) при  $t > 4M^2$ . Для процесса (III) условие унитарности в области  $4\mu^2 < t < 4M^2$  нужно применять при значении масс нуклонов не на поверхности масс, а при несколько меньшем значении, при котором все импульсы остаются вещественными. Затем полученный результат должен быть аналитически продолжен на поверхность масс. В нашем случае подобный способ действий не приводит к какому-либо отличию, но если бы наряду с нуклоном входил барион с массой  $M_B$ , удовлетворяющий неравенству

$$M_B^2 < M^2 - \mu^2, \quad (4.14)$$

то было бы необходимо фактически проделать описанные вычисления. При продолжении к поверхности масс абсорбтивная часть  $A_3$  продолжается ниже предела  $t = 4M^2$ . Некоторыми авторами [17] [18] [19] было показано, что если удовлетворяется неравенство типа (4.14), то вершинная функция будет обладать аналогичными аналитическими свойствами. Диаграмма на фиг. 4 является простейшей диаграммой, демонстрирующей указанные аналитические свойства в нашем случае, и она, очевидно, обладает такими же свойствами, что и вершинная диаграмма. Таким образом, подобные спектральные особенности не ограничивают применимости нашего метода, а, наоборот, следуют из него.

## § 5. Схема приближенного получения амплитуды рассеяния

В методах, развитых в предыдущих параграфах настоящей статьи, условие унитарности для процесса (I) удовлетворяется в одномезонном приближении для состояний с любым моментом количества движения. Условие унитарности для процесса (III) удовлетворяется только для  $S$ -состояний в двухмезонном приближении или в приближении двух мезонов и одной пары. Условие унитарности для состояний с более высокими моментами количества движения в процессе (III) не удовлетворяется,



однако амплитуда рассеяния обнаруживает ожидаемое поведение на пороге реальных конкурирующих процессов.

Данные свойства немедленно указывают дальнейшее приближение, согласующееся с остальными нашими приближениями. Большая часть работы и, во всяком случае, большая часть времени, посвященного расчетам, заключается, конечно, в вычислении спектральных функций, так как при этом берутся двойные интегралы, которые сами являются функциями двух переменных. Вычисления значительно упрощаются, если пренебречь теми вкладами в спектральные функции, которые появляются, начиная с порога процессов, идущих с более чем двумя частицами. Для  $A_{13}$  и  $A_{23}$  тогда остались бы вклады, начинающиеся при  $t = (4\mu)^2$ . Их можно получить, подставив в (3.18)  $\delta$ -образную часть  $B_2$ . В этом приближении спектральная функция  $A_{12}$  будет обращаться в нуль.

Условие унитарности для процесса (I) не будет более выполняться для состояний с высшими моментами количества движения. Однако оказывается, что отброшенные члены имеют такой же вид, что и члены, обусловленные промежуточными состояниями процесса (III) с более чем двумя частицами; таким образом, новое приближение соответствует по своему духу уже сделанным ранее приближениям. Действительно, в условии унитарности для  $S$ -волн в процессе (III) уже было сделано точно такое же приближение. Условие унитарности для состояний с низшими моментами количества движения в процессе (I) и, в частности, для состояний  $j = \frac{1}{2}$  или  $\frac{1}{2}$  по-прежнему выполняется, так как оно было введено отдельно. Процессы (I) – (III) рассматриваются в настоящем приближении на равном основании.

Итак, наш метод применяется в следующей последовательности. Находятся первые несколько амплитуд состояний с определенными моментами количества движения в разложении  $A_1$  и  $A_3$  по парциальным волнам, основываясь на предположении, что каждая парциальная амплитуда является аналитической функцией в комплексной плоскости квадрата энергии в системе центра масс, за исключением предсказываемых теорией возмущений сингулярностей и разрезов на положительной вещественной оси. Это вычисление может быть проделано точно, если при помощи условия унитарности определен скачок на разрезе вдоль положительной вещественной оси (когда соотношения, связывающие  $a$  и  $b$  с  $A$  и  $B$ , включают квадратный корень от кинематических множителей, возникают усложнения, которые, однако, приводят к соответствующему изменению методов расчета). Функции  $A_{13}$  и  $A_{12}$  находятся тем же путем. Аналитические свойства амплитуды рассеяния, представленные соотношением (2.12), определяют аналитические свойства амплитуд со-

стояний с низшими моментами количества движения. Сингулярности могут быть вычислены через  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ . В свою очередь эти абсорбтивные части могут быть получены из  $A_{13}$  и  $A_{23}$  при помощи дисперсионных соотношений (2.16), (2.17) и (2.19) с вычитательными членами, которые могут быть найдены из амплитуд состояний с низшими моментами количества движения. В следующей итерации все сингулярности амплитуд состояний с низшими моментами количества движения, за исключением сингулярностей на положительной вещественной оси, находятся из величин, полученных в первой итерации, а сингулярности на положительной вещественной оси определяются из условия унитарности. Итерирование продолжается до тех пор, пока ряд итераций будет сходиться. Как и в вычислениях § 4, в абсорбтивных частях  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  необходимо провести обрезание на высоких энергиях, прежде чем вычислять в следующей итерации сингулярности амплитуд состояний с низшими моментами количества движения. Однако обрезание применяется лишь выше порога процессов, отброшенных в условии унитарности, и, в частности, выше порога рождения пары в процессе (I).

Данное приближение можно считать первым в ряду приближений, в которых учитывается все большее число вкладов в спектральные функции, пока не получится окончательное решение, для которого условие унитарности удовлетворяется в одномезонном приближении для всех парциальных волн. В более высоких приближениях спектральные функции уже не определяются теорией возмущений, но, поскольку входит вклад от перекрестного члена, они должны пересчитываться после каждой итерации. Однако выход за рамки одномезонного приближения был бы более предпочтительным при одновременном учете вкладов в спектральные функции от высших промежуточных состояний. Иначе говоря, следовало бы продолжать рассмотрение процессов (I) – (III) на равном основании, включая в рассмотрение высшие промежуточные состояния всех трех реакций сразу. Если бы описанная схема приближения была свободна от расходимостей, то условие унитарности для всех трех реакций выполнялось бы в конце концов для всех состояний с любыми моментами количества движения. Практически, конечно, невозможно достигнуть более чем первого или второго приближения.

Количество состояний с определенными моментами количества движения, для которых условие унитарности применяется по отдельности, зависит, как показано в предыдущем разделе, от поведения  $A$  и  $B$  при  $t$  (или  $s_c$ ), стремящемся к бесконечности, когда  $s$  фиксировано. Однако в нашем первом приближении было бы достаточным рассмотрение по отдельности только состояний с  $j = \frac{1}{2}$  и  $j = \frac{3}{2}$ , так как состояния с

другими моментами количества движений не существенны ниже порога рождения  $\pi$ -мезона. Если бы мы вышли за рамки одномезонного приближения, то мы во всяком случае должны были бы рассматривать по отдельности состояния с более высокими моментами количества движения, так как, например, два  $\pi$ -мезона, находящиеся оба в резонансном состоянии  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$  с нуклоном, могут образовывать  $D_{5/2}$ -состояние. Для процесса (III) было бы необходимо рассматривать по отдельности как  $S$ -состояния, так, возможно, и  $P$ -состояния.

Если бы в процессе (III) пренебрегалось нуклон-антинуклонным промежуточным состоянием и учитывалось только двухмезонное промежуточное состояние, то все три спектральные функции —  $A_{13}$ ,  $A_{23}$  и  $A_{12}$  были бы равны нулю, так как они начинаются выше порога пренебрегаемых процессов. Тогда полная амплитуда рассеяния состояла бы из “вычитательных членов” для тех или иных дисперсионных соотношений. Такое приближение может быть наилучшим с точки зрения необходимого объема вычислений и точности результата, так как нуклон-антинуклонное промежуточное состояние существенно тяжелее отбрасываемых мезонных состояний. Хотя в подобном случае спектральные функции совсем не входят в расчет, этому можно найти оправдание в том, что такое приближение является первым в ряду приближений, включающих спектральные функции. Если в этом приближении пренебречь перекрестным членом при вычислении амплитуды рассеяния  $\pi$ -мезонов на  $\pi$ -мезонах, то для процесса (III) остаются только промежуточные  $S$ -состояния, так что условие унитарности для  $P$ -состояний вообще не будет входить.

Автор хотел бы выразить признательность за плодотворные дискуссии проф. Н.М. Кролю, проф. М.Л. Гольдбергу, проф. Р. Эме и проф. Г. Леману.

## Список литературы

- [1] Chew, Golgherger, Low, Nambu, Phys. Rev., 106, 1345, 1957.
- [2] Chew, Karplus, Gasiorowicz, Zachariasen, Phys. Rev., 110, 265, 1958.
- [3] Gell-Mann M., Proceeding of the Annual Rochester Conference High Energy Physics, 1956, Sec. III, p. 30.

- [4] Chew G.F., Low F.E., Phys. Rev., 101, 1570, 1956.
- [5] Salzman G., Salzman F., Phys. Rev., 108, 1619, 1957.
- [6] Lee T.D., Serber R., в печати.
- [7] Castillejo, Dalitz, Dyson, Phys. Rev., 101, 453, 1956.
- [8] Ford K.W., Phys. Rev., 105, 320, 1957.
- [9] Goldberger M.L., Phys. Rev., 99, 979, 1955. (См. перевод в сборнике “Проблемы современной физики”, N 2, 1957)
- [10] Capps R.H., Takeda G., Phys. Rev., 106, 1337, 1956.
- [11] Nambu Y., Phys. Rev., 100, 394, 1955. (См. перевод в сборнике “Проблемы современной физики.” N 2, 1957.)
- [12] Brown L.M., Feynman R.P., Phys. Rev., 85, 231, 1952.
- [13] Lehmann H., Nuovo Cimento, 10, 579, 1958. (См. перевод в сборнике “Проблемы современной физики”, N 3, 1959.)
- [14] Green H.S., Proc. Phys. Soc., 66, 873, 1953.
- [15] Lee T.D., Phys. Rev., 95, 1329, 1954.
- [16] Takahashi Y., Nuovo Cimento, 6, 372, 1957.
- [17] Karplus, Sommerfield, Wichman, Phys. Rev., 111, 1187, 1958.
- [18] Nambu Y., Nuovo Cimento, 9, 610, 1958.
- [19] Oehme R., Phys. Rev., 111, 1430, 1958.