

### К теории распределения энергии излучения нормального спектра.

М. Планк  
Берлин  
(Получено 1900)

— — ◊ ◊ ◊ — —

Русский перевод взят из сборника: М. Планк “Избранные научные труды”, стр. 251, под редакцией А.П. Виноградова

— — ◊ ◊ ◊ — —

Господа!

Когда несколько недель тому назад я имел честь обратиться к вашему вниманию на новую формулу, которая, как мне представлялось, могла быть использована для выражения закона распределения энергии излучения во всем диапазоне нормального спектра<sup>1</sup> я уже упомянул, что с моей точки зрения полезность этого выражения базируется не только на исключительном хорошем согласии с несколькими численными значениями, о которых я тогда мог сообщить на основе имевшихся экспериментальных данных,<sup>2</sup> но, главным образом, на простой структуре формулы, а особенно на том факте, что с ее помощью можно получить очень простое логарифмическое выражение, связывающее энтропию излучающего монохроматического резонатора с его энергией колебаний. Эта формула, как нам кажется, в каждом отдельном случае дает возможность общей интерпретации в гораздо большей степени, чем другие выражения, которые предполагались, за исключением формулы Вина, которая, однако, не была подтверждена данными эксперимента.

Энтропия означает беспорядок, и я думал, что следует искать этот беспорядок в тех нерегулярностях, с которыми колебания резонатора даже в случае полностью стационарного поля излучения изменяют свои амплитуды и фазы постольку, поскольку рассматриваются интервалы времени, большие по сравнению с периодом колебаний, но малые по сравнению с продолжительностью эксперимента. Постоянная энергия стационарно колеблющегося резонатора могла, таким образом, рассматриваться как средняя во времени или, иначе говоря, как мгновенная энергия, усредненная по большому числу идентичных резонаторов, помещенных в одно и то же стационарное

<sup>1</sup>Там же, стр. 202.

<sup>2</sup>Тем временем г-н Рубенс и г-н Курльбаум (H. Rubens, F. Kurlbaum. Sitzungsber. Acad. Wiss. Berlin, 1900, 929) дали прямое подтверждение ее справедливости и в области очень длинных волн.

поле излучения и расположенных друг от друга настолько далеко, что они не влияют друг на друга. Хотя энтропия резонатора и определялась таким образом, что энергия в один и тот же момент распределяется по большому числу резонаторов, я думал, что эта величина может быть оценена с помощью электромагнитной теории излучения, если в нее будут привнесены статистические представления, важность которых для второго закона термодинамики была открыта, прежде всего, г-ном Л. Больцманом.<sup>3</sup> Это ожидание оправдалось; я смог дедуктивно вывести выражение для энтропии монохроматически колеблющегося резонатора и, тем самым, для распределения энергии в случае стационарного излучения, т.е. в случае нормального спектра. Для того чтобы сделать это, было необходимо лишь до некоторой степени расширить гипотезу о “естественном излучении”, которая была введена электромагнитной теорией. Кроме этого, я получил другие соотношения, которые, как мне представлялось, имели существенное значение и для других областей физики, а также и химии.

Я не собираюсь систематически и во всех деталях воспроизвести сегодня этот вывод, который базируется на законах электромагнитного излучения, термодинамики и теории вероятностей, но скорее хочу объяснить как можно более ясно истинный смысл теории. Это может быть сделано наиболее простым способом, если я опишу вам новый, совершенно элементарный подход, из которого можно получить без какого-либо знания вида спектральной формулы и без какой-либо теории распределение некоторой заданной энергии по длинам волн нормального спектра, причем соответствующая связь будет выражена с помощью мировой постоянной, в то время как другая мировая постоянная свяжет величину температуры и данную энергию излучения. Многие пункты этого подхода покажутся вам произвольными и сложными, но, как я только что указывал, я не хочу обращать внимание на доказательство необходимости и на простые, практические детали, а сосредоточусь на том, чтобы продемонстрировать его убедительность и показать единственность предложенной процедуры для решения данной проблемы.

Рассмотрим большое число монохроматически колеблющихся резонаторов :  $N$  – с частотой  $\nu$  (1/сек.),  $N'$  – с частотой  $\nu'$ ,  $N''$  –  $\nu''$  и т.д.. (причем все эти числа резонаторов большие); все резонаторы расположены далеко друг от друга и заключены в диатермическую среду, в которой свет распространяется со скоростью  $c$  и которая ограничена отражающими стенками. Пусть, далее, в нашей системе содержится определенное количество энергии, причем эта энергия  $E_t$  (эрг) частично заключена в излучении, которое распространяется в среде, а частично связана с колебательным движением резонаторов. Вопрос заключается в том, каким образом эта энергия в стационарном состоянии распределена по колебаниям резонаторов и по различным частотам излучения, имеющегося в среде, и также, какова будет температура всей системы.

Для ответа на этот вопрос мы рассмотрим сначала колебания резонаторов и произвольным образом наделим их определенным количеством энер-

---

<sup>3</sup>L. Boltzmann. Sitzungsber. Acad. Wiss. Wien, 1887, 76, 373.

гии; например, пусть энергия  $E$  будет принадлежать  $N$  резонаторам частоты  $\nu$ ,  $E'$  – резонаторам  $N'$  частоты  $\nu'$  и т.д. Сумма

$$E + E' + E'' + \dots = E_0$$

должна, естественно, быть меньше  $E_t$ . Тогда разность  $E_t - E_0$ , будет приходиться на излучение в среде. Мы должны теперь дать выражение для распределения энергии между отдельными резонаторами из группы  $N$  резонаторов частоты  $\nu$ . Если  $E$  рассматривается как безгранично делимое количество, такое распределение может быть произведено бесконечно большим числом способов. Мы предположим, однако, – и в этом состоит самый важный момент всего расчета, – что  $E$  может быть разделено на точно определенное число равных частей, и используем при этом мировую постоянную  $h = 6.55 \cdot 10^{-27}$  эрг · сек. Эта константа, помноженная на общую для резонаторов данной группы частоту, дает нам элемент энергии  $\epsilon$  в эргах; деля  $N$  на  $\epsilon$ , мы получим число  $P$  этих элементов энергии, которые и должны быть распределены между  $N$  резонаторами. Если указанное отношение не равно целому числу, мы берем для  $P$  ближайшее целое значение.

Ясно, что распределение  $P$  элементов энергии по  $N$  резонаторам может быть произведено только конечным и хорошо определяемым числом способов. Каждый из этих способов распределения мы назовем “комбинацией” используя выражение, введенное г-ном Больцманом для аналогичной величины. Если мы обозначим резонаторы цифрами 1, 2, 3, ...,  $N$  и за пишем их в строку и если, далее, под каждым резонатором запишем значение его энергии в виде числа ее элементов, то каждую комбинацию можно будет представить в следующей символической форме:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	38	11	0	9	2	20	4	4	5

Мы выбрали здесь  $N = 10$ , и  $P = 100$ . Число всех возможных комбинаций, очевидно, равно числу всех тех подобного вида рядов цифр, которые могут быть получены для данных значений  $N$  и  $P$ . Для того чтобы исключить возможность недоразумений, мы отметим, что две комбинации нужно считать различающимися друг от друга, если соответствующие ряды содержат одинаковые числа, однако расположенные в различном порядке. Из теории перестановок мы получаем для всех возможных комбинаций выражение

$$\frac{N(N+1) \cdot (N+2) \dots (N+P-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots P} = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!P!}$$

или, с использованием допустимого приближения,

$$= \frac{(N+P)^{N+P}}{N^N P^P}.$$

Подобный же расчет мы применили для резонаторов других групп, определяя каждую такую группу числом возможных комбинаций при данном значении энергии, приходящемся на группу. Умножая все полученные таким образом числа, мы находим полное число  $R$  всех возможных комбинаций при произвольном распределении энергии по всем резонаторам.

Итак, каждому произвольным образом выбранному распределению энергии  $E, E', E'', \dots$  будет соответствовать определенное число  $R$  всех возможных комбинаций, которое оценивается описанным выше образом. Среди всех возможных распределений, допустимых при постоянном значении энергии  $E_0 = E + E' + E'' + \dots$ , имеется одно вполне определенное, которому соответствует число комбинаций  $\mathfrak{R}$ , превосходящее подобные числа для любого другого распределения. Мы отыскиваем это распределение, если нужно, методом проб, потому что оно как раз и будет тем распределением, которое установится между резонаторами, помещенными в стационарное поле излучения, если все они вместе обладают энергией  $E_0$ . Величины  $E, E', E'', \dots$  могут тогда быть выражены в терминах  $E_0$ . Деля  $E$  на  $N, E'$  – на  $N'$  и т.д., мы получаем стационарные значения энергии отдельного резонатора каждой группы:  $U_\nu, U_{\nu'}, U_{\nu''}$ , и тем самым также объемную плотность соответствующей энергии излучения в диатермической среде и в спектральной области  $\nu, \nu + d\nu$

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot U_\nu d\nu,$$

так что энергия, заключенная в среде, также оказывается определенной.

Из всех встречающихся в рассмотрении величин только  $E^0$  все еще остается произвольной. Однако легко видеть, как мы можем в конце концов оценить  $E_0$  из общей энергии  $E_t$ , поскольку, если выбранное значение  $E_0$  ведет, например, к слишком большим величинам  $E_t$ , мы должны уменьшить это значение и снова повторить весь цикл расчетов.

После того, как стационарное распределение энергии будет определено подобным способом, с использованием постоянной  $h$ , мы можем найти соответствующую температуру  $\vartheta$  в абсолютных градусах, используя вторую постоянную  $k = 1.346 \cdot 10^{-16}$  эрг/град с помощью соотношения

$$\frac{1}{\vartheta} = k \frac{d \ln \mathfrak{R}_0}{dE_0}.$$

Произведение  $k \ln \mathfrak{R}_0$  является энтропией системы резонаторов; она равняется сумме энтропий всех отдельных резонаторов.

Представляется, конечно, очень сложным выполнить в явной форме все указанные выше расчеты, хотя было бы и небезынтересно проверить степень точности данного приближения в каком-либо простом случае. Более общий расчет, который может быть проведен очень просто с использованием указанной выше процедуры, показывает гораздо более прямым способом, что нормальное распределение энергии, определяемое таким образом

для среды, содержащей излучение, дается выражением

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} \frac{d\nu}{e^{h\nu/k\Theta} - 1},$$

которое в точности соответствует спектральной формуле, которую я нашел ранее,

$$E_\lambda d\lambda = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{c_2/\lambda\vartheta} - 1} d\lambda.$$

Формальные различия этих двух выражений связаны с различием в определении величин  $u_\nu$  и  $E_\lambda$ . Первое выражение является в какой-то мере более общим, поскольку оно справедливо для произвольной диатермической среды, в которой свет распространяется со скоростью  $c$ . Численные значения постоянных  $h$  и  $k$ , которые приведены выше, получены с использованием данных измерений Ф. Курльбаума, О. Луммера и Э. Прингсхейма.<sup>4</sup>

Теперь я сделаю несколько кратких замечаний, касающихся вопроса о необходимости приведенного выше вывода. Тот факт, что выбранный элемент  $\varepsilon$  для данной группы осцилляторов должен быть пропорционален частоте  $\nu$ , немедленно следует из исключительно важного закона смещения Вина. Выражение, дающее связь между  $u$  и  $U$ , является одним из основных соотношений электромагнитной теории излучения. В остальном весь вывод основывается на теореме, согласно которой энтропия системы резонаторов с данной энергией пропорциональна логарифму полного числа возможных комбинаций при данном значении энергии.

Эта теорема может быть подразделена на две другие: 1) энтропия системы в данном состоянии пропорциональна логарифму вероятности этого состояния; 2) вероятность любого состояния пропорциональна числу соответствующих комбинаций или, иными словами, каждая определенная комбинация столь же вероятна, как и любая другая. Первая теорема, поскольку речь идет об явлениях излучения, есть как раз определение вероятности состояния, ибо для энергии излучения мы не имеем никакого априорного пути определения вероятности, кроме как определения энтропии излучения. Ситуация здесь отличается от соответствующего положения дел в кинетической теории газов. Вторая теорема является ядром всей представленной здесь теории, ибо в конечном счете ее доказательство может быть получено только эмпирическим путем. Она может быть понята также как более детализированное определение гипотезы об естественном излучении, введенное мною. Эту гипотезу я сформулировал ранее<sup>5</sup> в той форме, что энергия излучения совершенно “случайным образом” распределена по различным собственным колебаниям, присутствующим в излучении.<sup>6</sup> Я предполагаю

<sup>4</sup>Ф. Курльбаум (Ann. Phys., 1989, 88, 759) дает значение  $S_{100} - S_0 = 0.0731$  вт/см<sup>2</sup>, в то время как О. Луммер и Э. Прингсхейм (Verhandl. Dtsch. phys. Ges., 1900, 2, 176) дают  $\lambda_m \vartheta = 2490 \mu \cdot \text{град.}$

<sup>5</sup>Ann. Phys., 1900, 1, 73.

<sup>6</sup>Когда г-н Вин в своем парижском сообщении о теории излучения не счел мою теорию о необратимых явлениях излучения удовлетворительной (поскольку она не давала доказательства того, что гипотеза об естественном излучении является той единственной,

в дальнейшем сообщить в деталях о том рассмотрении, сущность которого здесь была только намечена, с приложением всех вычислений и с обзором успехов развития теории, достигнутых к настоящему времени.

В заключение я хотел бы отметить важное следствие из этой теории, которое в то же время делает возможным дальнейшую проверку ее правильности. Г-н Больцман<sup>7</sup> показал, что энтропия одноатомного газа в состоянии равновесия равна  $\omega R \ln P_0$ , где  $P_0$  – число возможных комбинаций, соответствующих наиболее вероятному распределению скоростей,  $R$  – известная газовая постоянная ( $R = 8.31 \cdot 10^7$  для кислорода),  $\omega$  – отношение массы молекулы к массе моля, которое постоянно для всех веществ. Если в газе имеются какие-либо излучающие резонаторы, энтропия всей системы должна быть, согласно развитой здесь теории, пропорциональна логарифму всех возможных комбинаций, включая как скорости, так и излучение. Поскольку в соответствии с электромагнитной теорией излучения скорости атомов полностью независимы от распределения энергии излучения, полное число комбинаций просто равно произведению числа их соответствующих скоростей на число комбинаций, соответствующих излучению. Таким образом, мы получаем для полной энтропии

$$f \ln (P_0 \mathfrak{R}_0) = f \ln P_0 + f \ln \mathfrak{R}_0,$$

где  $f$  – коэффициент пропорциональности. сравнивая это соотношение с найденными ранее выражениями, мы находим

$$f = \omega R = k,$$

или

$$\omega = \frac{k}{R} = 1.62 \cdot 10^{-24},$$

т.е. что реальная молекула составляет  $1.62 \cdot 10^{-24}$  часть грамм-молекулы, а атом водорода весит  $1.64 \cdot 10^{-24}$  г, поскольку  $H = 1.01$ ; в грамм-молекуле любого вещества оказывается, таким образом,  $1/\omega = 6.175 \cdot 10^{23}$  реальных молекул. Г-н О.Е. Майер<sup>8</sup> дает для этого числа значение  $6.40 \cdot 10^{23}$ , которое близко совпадает с приведенным.

Число Лошмидта  $L$ , т.е. число молекул газа в  $1 \text{ см}^3$  при  $0^\circ \text{ C}$  и давлении в 1 атм, равняется

$$L = \frac{1013200}{R \cdot 273 \cdot \omega} = 2.76 \times 10^{19}.$$

которая ведет к необратимости), он, конечно с моей точки зрения, предъявлял к этой гипотезе очень большие требования. Если бы можно было доказать гипотезу, она перестала бы быть гипотезой, и тогда бы и не формулировалась в качестве таковой. Кроме того, в этом случае из нее нельзя было бы вывести ничего нового. С указанной точки зрения можно было бы утверждать, что кинетическая теория газов является неудовлетворительной, поскольку пока никто еще не доказал, что атомная гипотеза является единственной, которая объясняет необратимость. Подробное же возражение с большим или меньшим правом можно было бы выдвинуть против всех индуктивно построенных теорий.

<sup>7</sup>Sitzungsber. Acad. Wiss. Wien, 1877, 76, 428.

<sup>8</sup>O.E. Meyer. Die Kinetische Theorie der Gase, 1899, S. 337.

Г-н Друде<sup>9</sup> нашел, что  $L = 2.1 \cdot 10^{19}$ .

Постоянная Больцмана – Друде  $\alpha$ , т.е. средняя кинетическая энергия атома при  $1^\circ \text{K}$ , равна

$$\alpha = \frac{2}{3}\omega R = \frac{2}{3}k = 2.02 \times 10^{16}$$

Г-н Друде дает для  $\alpha$  значение  $\alpha = 2.65 \cdot 10^{-16}$ .

Элементарный квант электричества  $e$ , т.е. электрический заряд одновалентного положительного иона или электрона, будет равняться (если  $e$  – известное значение заряда грамм-иона одновалентного вещества)

$$e = \epsilon\omega = 4.69 \times 10^{-10} CGSE.$$

Г-н Ф. Рихарц<sup>10</sup> получил для  $e$  значение  $1.29 \cdot 10^{-10}$ , а г-н Дж.Дж. Томсон<sup>11</sup> (недавно) –  $6.5 \cdot 10^{-10}$ .

Если данная теория является полностью правильной, все эти соотношения должны быть верными не приближенно, а абсолютно. Точность рассчитанных величин поэтому по существу совпадает с точностью определений постоянной  $k$ , менее всего известной; поэтому приведенная оценка  $k$  может считаться много лучшей, чем все другие, сделанные к настоящему времени. Проверка ее более прямыми методами является важной и необходимой задачей дальнейшего исследования.

---

<sup>9</sup>P. Drude. Ann. Phys., 1900, 1, 578.

<sup>10</sup>F. Richarz. Ann. Phys., 1894, 52, 397.

<sup>11</sup>J.J. Thomson Philos. Mag., 1898, 46, 528.