Влияние синхротронного излучения на изменение амплитуд связанных бетатронных колебаний

О.Е. Шишанин

Московский государственный индустриальный университет, Россия

При движении электронов в циклических ускорителях с ультрарелятивистскими скоростями происходит радиационное затухание и одновременно квантовая раскачка поперечных колебаний под воздействием синхротронного излучения [1–5]. В упомянутых теоретических и экспериментальных работах имеется в основном неплохое согласие, однако вопрос о ненулевой стабилизации амплитуды вертикальных колебаний до сих пор остается открытым.

В работе рассмотрена близкая задача уже в несимметричном магнитном поле с учетом излучения. Для анализа взят частный случай искажения магнитного поля, вызванного наклоном магнитов, и, соответственно, медианной поверхности [6,7]. Влияние возникающей здесь связи бетатронных колебаний на свойства синхротронного излучения было рассмотрено в статье [8].

Для медианной поверхности радиальная составляющая магнитного поля $H_r = 0$. Если она наклонена на малый угол δ, то компоненты магнитного поля во втором приближении можно представить следующим образом:

$$
\begin{aligned}
H_z &= H_0\left[1 - n(1-\frac{1}{2}\delta^2)\frac{\rho}{R} - \delta n\frac{z}{R}\right],\\
H_r &= H_0\left[-n(1+\frac{1}{2}\delta^2)\frac{z}{R} + \delta n\frac{\rho}{R}\right],
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $H_0 = b/R^n$; b — const; n — градиент магнитного поля; R — радиус круговой орбиты; $r = R + \rho$.

Соответствующие уравнения движения примут вид

$$
\ddot{\rho} + \omega_0^2(1 - n + \frac{1}{2}\delta^2 n)\rho = \delta n\omega_0^2 z, \quad \ddot{z} + \omega_0^2 n(1-\frac{1}{2}\delta^2)z = \delta n\omega_0^2\rho, \tag{2}
$$

где $\omega_0 = ce_0H_0/E$. Их решения с точностью до δ^2 будут:

$$
\begin{aligned}
\rho &= A\cos(\omega_\rho\omega_0 t + \chi) - B\frac{\delta n}{2n-1}\cos(\sqrt{n}\omega_0 t + \psi),\\
z &= B\cos(\omega_z\omega_0 t + \psi) + A\frac{\delta n}{2n-1}\cos(\sqrt{1-n}\omega_0 t + \chi),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где A — амплитуда радиальных колебаний; B — вертикальных; χ и ψ — их фазы, а частоты определяются как

$$
\omega_\rho = \sqrt{1 - n - \frac{\delta^2 n}{2(2n-1)}}, \qquad \omega_z = \sqrt{n(1 + \frac{\delta^2 n}{2(2n-1)})}.
$$

Угловая скорость электрона

$$
\dot{\varphi} = \omega_0\left[1 - \frac{\rho}{R} + \frac{3-n}{2}\frac{\rho^2}{R^2} + \frac{n}{2}\frac{z^2}{R^2} - \delta n\frac{\rho}{R}\frac{z}{R} + \frac{\delta^2 n}{4}\left(\frac{\rho^2}{R^2} - \frac{z^2}{R^2}\right)\right],
$$

а полная скорость $v = \beta c$ будет постоянной величиной.

В приведенных выше обозначениях известные формулы [5] для изменения амплитуд радиальных и вертикальных колебаний при фиксированной энергии E имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1-n}{2}\frac{A^2}{R^2}\right) = -\frac{n}{1-n}\left(\frac{1-n}{2}\frac{A^2}{R^2}\right)\frac{W}{E} + \frac{55}{48\sqrt{3}}\frac{e^2\hbar}{m_0ER^3(1-n)}\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^6, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{n}{2}\frac{B^2}{R^2}\right) = -\left(\frac{n}{2}\frac{B^2}{R^2}\right)\frac{W}{E} + \frac{13}{48\sqrt{3}}\frac{e^2h}{m_0ER^3}\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^4, \tag{5}$$

где

$$W = \frac{2}{3}\frac{ce^2}{R^2}\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^4$$

есть полная интенсивность излучения заряженной частицы.

Ввиду сложности последующих расчетов, далее задачу удобнее решать с помощью квазиклассического метода Ю.Швингера, примененного, в частности, в работе [9].

Формула для изменения функции оператора импульса p_μ вследствие излучения имеет вид

$$\frac{d\hat{F}(p_\mu)}{dt} = \int dw[\hat{F}(p_\mu - \hbar\varkappa_\mu) - \hat{F}(p_\mu)],$$

где $\varkappa_\mu$ — волновой вектор. Вероятность излучения в данном случае

$$dw = \frac{d^3\varkappa}{(2\pi)^3}\cdot\frac{ce^2}{R}(1+\frac{\hbar\omega}{E})\{|\int_{-\infty}^{\infty} dt\cdot v_x e^{i(1+\hbar\omega/E)(\omega t-\bar{\varkappa}\bar{r})}|^2 +$$

$$+|\int_{-\infty}^{\infty} dt(v_y\cos\theta - v_z\sin\theta)e^{i(1+\hbar\omega/E)(\omega t-\bar{\varkappa}\bar{r})}|^2\},$$

где $\omega = \nu\omega_0$ — частота излучения; θ — сферический угол вылета фотона,

$$v_x = \dot{\rho}\cos\varphi - (R+\rho)\dot{\varphi}\sin\varphi,\ v_y = \dot{\rho}\sin\varphi + (R+\rho)\dot{\varphi}\cos\varphi,\ v_z = \dot{z}.$$

В дальнейшем ограничимся только вертикальными колебаниями. Поскольку оператор энергии колебаний вдоль оси z определяется как

$$\hat{F}(p_z) = \frac{c^2p_z^2}{2E} + \frac{\omega_z^2\omega_0^2z^2E}{2c^2},$$

то

$$\frac{d\hat{F}(p_z)}{dt} = \int dw\cdot\frac{c^2}{2E}(-2\hbar\varkappa_z p_z + \hbar^2\varkappa_z^2), \tag{6}$$

где компонента $\varkappa_z = \varkappa\cos\theta$. После суммирования по спектру, интегрирования по углу θ и усреднения по обеим фазам колебаний χ и ψ левой и правой частей выражение (6) примет вид

$$\frac{E\omega_0^2}{2c^2}\frac{d}{dt}(\omega_z^2B^2) + \frac{E\omega_0^2}{2c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta^2n^2}{2(2n-1)^2}A^2\right) = \tag{7}$$

$$-W\left(\frac{1}{2}\omega_z^2\frac{B^2}{R^2} + \frac{\delta^2n^2(1-n)}{2(2n-1)^2}\frac{A^2}{R^2}\right) + \frac{13e^2h}{48\sqrt{3}R^3m_0}\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^4.$$

Поскольку в (7) слева второе слагаемое пропорционально δ^2, то можно использовать производную от квадрата амплитуды радиальных колебаний из формулы (4). Тогда вместо (5), пренебрегая малой квантовой добавкой, в данном случае получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\omega_z^2\frac{B^2}{R^2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\omega_z^2\frac{B^2}{R^2}\right)\frac{W}{E} - \tag{8}$$

$$\frac{\delta^2 n^2}{2(2n-1)^2(1-n)}\left[\frac{2+2n^2-3n}{2}\frac{A^2}{R^2}\frac{W}{E}+\frac{55}{48\sqrt{3}}\frac{e^2 h}{m_0 E R^3(1-n)}\left(\frac{E}{m_0 c^2}\right)^6\right].$$

Как видим из (8), учет линейного резонанса связи приводит к незначительному увеличению затухания вертикальных колебаний. Для более глубокого изучения данного вопроса необходимо также рассмотреть влияние нелинейностей магнитного поля и прямолинейных промежутков.

Список литературы

1. Соколов А.А., Тернов И.М. // ЖЭТФ, 1955, т. 28, с. 431.
2. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. // ЖЭТФ, 1956, т. 30, с.207, с.1161.
3. Kolomenskij A.A. and Lebedev A.N. // Nuovo Cim. Suppl., 1958, vol. 1(7), p. 43.
4. Королев Ф.А., Куликов О.Ф., Ершов А.Г. // Докл. АН СССР, 1960, т. 134, с. 314.
5. Синхротронное излучение. Сб. статей. / Под ред. Соколова А.А. и Тернова И.М. — М.: Наука, 1966.
6. Грин Г., Курант Э. В сб.: Ускорители. / Под ред. Яблокова Б.Н. — М.: Госатомиздат, 1962.
7. Брук Г. Циклические ускорители заряженных частиц. — М.: Атомиздат, 1970.
8. Шишанин О.Е. // Изв. вузов. Физика, 1979, № 8, с. 82.
9. Байер В.Н., Катков В.М. // Докл. АН СССР, 1969, т. 188, с.56.