

Нестационарная нелинейная динамика гало в самосогласованном поле излучения пучка в линейном резонансном ускорителе

В.Г. Куракин

Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Москва, Россия

П.В. Куракин

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва, Россия

Введение

Кумулятивное взаимодействие пучка с ускоряющей системой в многосекционном линейном ускорителе представляет собой вид конвекционной неустойчивости, когда возмущение растет в ограниченной области, которая сносится в направлении движения пучка. Механизм этой неустойчивости заключается в возбуждении головными сгустками несимметричных видов колебаний ускоряющей системы, которые воздействуют на остальную часть пучка, вызывая возмущение, нарастающее как во времени, так и по длине ускорителя [1, 2, 3, 4]. Многоволновой подход к проблеме [5, 6], учитывающий бесконечный спектр несимметричных волн, позволил выявить ряд новых особенностей кумулятивной неустойчивости, в том числе и нелинейный характер взаимодействия пучка и ускоряющей системы. Последнее заключается в сильной зависимости отклоняющего градиента от продольной и поперечной координат. Данная нелинейность приводит к возрастанию эффективного эмиттанса, и в наибольшей степени этот эффект имеет место для периферийных частиц сгустков, образующих гало пучка. Для количественной оценки данного эффекта используется метод компьютерного моделирования. Сначала рассчитывается самосогласованная когерентная динамика точечных сгустков в собственном поле несимметричных волн. На втором этапе исследуется динамика гало, которое, по предположению, вносит пренебрежимо малый вклад в возбуждение поля в ускорителе.

Основные соотношения

Предположим, что ускоритель состоит из расположенных вдоль одной прямой (совпадающей с осью z) не связанных друг с другом резонаторов, так что отсутствует механизм для развития регенеративной поперечной неустойчивости пучка. Будем также считать при расчете самосогласованной динамики, что пучок представляет собой последовательность точечных сгустков, движущихся со скоростью v вдоль оси z , совпадающей с осью ускорителя, и разделенных пространственным интервалом L . Согласно теореме Пановского-Венцеля [7, 8], при пролете через резонатор частица с зарядом e приобретает дополнительный поперечный импульс p_{\perp} , определяемый формулой

$$p_{\perp} = e \int_0^d \nabla_{\perp} A_z(x, 0, z, \tau + z/v) dz, \quad (1)$$

где \vec{A} — вектор-потенциал электромагнитного поля в резонаторе; x и 0 — поперечные координаты частицы при влете в резонатор; τ — момент влета в резонатор; d — длина резонатора, а интегрирование производится по продольной координате z . При выводе (1) предполагалось, что частица не смещается заметно в поперечном направлении при пролете резонатора. В работе используется система единиц СИ. Следуя [9], представим вектор-потенциал наведенного в резонаторе поля в виде разложения по собственным векторам $\vec{A}_{\lambda}(\vec{r})$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\lambda} q_{\lambda}(t) \vec{A}_{\lambda}(\vec{r}) \quad (2)$$

с зависящими от времени амплитудами $q_\lambda(t)$, удовлетворяющим дифференциальным уравнениям

$$\ddot{q}_\lambda + \frac{\omega_\lambda}{Q_\lambda} \dot{q}_\lambda + \omega_\lambda^2 q_\lambda = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\int_V \vec{j} \cdot \vec{A}_\lambda dV}{\int_V \vec{A}_\lambda^2 dV}, \quad (3)$$

где интегрирование производится по объему резонатора и собственными векторами \vec{A}_λ , удовлетворяющими условию $div \vec{A}_\lambda = 0$ и уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \vec{A}_\lambda + \frac{\omega_\lambda^2}{c^2} \vec{A}_\lambda = 0. \quad (4)$$

Здесь ω_λ и Q_λ — частота и добротность возбуждаемой моды; ϵ_0 — диэлектрическая постоянная; c — скорость света. Решение для амплитуды для точечного сгустка с зарядом q может быть представлено в форме

$$q_\lambda(k, N, t) = \frac{q}{\omega_\lambda \epsilon_0 \int_V A_\lambda^2 dV} Im exp[\omega_\lambda (\frac{1}{2Q_\lambda} - i)] \int_0^d A_{\lambda,z}(x_{k,N}, 0, z) exp[\frac{\omega_\lambda z}{v} (\frac{1}{2Q_\lambda} - i)] dz. \quad (5)$$

В вышеприведенной формуле индексы (переменные) k и N означают, что соответствующие значения берутся для сгустка с номером k и для резонатора с номером N . Отметим, что формула верна для момента времени, когда сгусток уже пролетел через резонатор. Чтобы получить выражение для дополнительного поперечного импульса, приобретаемого зарядом e в k -ом сгустке при пролете через N -ый резонатор, необходимо просуммировать поля, возбужденные в резонаторе всеми предыдущими сгустками, и подставить сумму в соотношение (1)

$$\Delta p_\perp(k, N) = eq Im \sum_\lambda \sum_{j=1}^{k-1} Z_\lambda(x_{j,N}) Y_\lambda(x_{k,N}) exp[\omega_\lambda (k-j) T (i - \frac{1}{2Q_\lambda})], \quad (6)$$

где использованы следующие соотношения:

$$Z_\lambda(x) = \frac{\int_0^d A_{\lambda,z}(x_{k,N}, 0, z) exp[\frac{\omega_\lambda z}{v} (\frac{1}{2Q_\lambda} - i)] dz}{\omega_\lambda \epsilon_0 \int_V A_\lambda^2 dV}, \quad (7)$$

$$Y_\lambda(x) = \int_0^d \frac{\partial A_{\lambda,z}}{\partial x}(x, 0, z) exp[\frac{\omega_\lambda z}{v} (i - \frac{1}{2Q_\lambda})] dz. \quad (8)$$

Для конкретных расчетов предположим, что линейный ускоритель образован последовательно цилиндрических резонаторов. Для таких резонаторов компоненты векторов отклоняющих ТМ мод имеют вид

$$\begin{aligned} A_r &= -\frac{k_z}{k_c} J'_n(rk_c) \cos n\varphi \sin k_z z, \\ A_\varphi &= \frac{k_z n}{k_c^2} \frac{J_n(rk_c)}{r} \sin n\varphi \sin k_z z, \\ A_z &= J_n(rk_c) \cos n\varphi \cos k_z z, \end{aligned} \quad (9)$$

и при пролете через резонатор частица изменяет угол наклона к продольной оси $\Delta\alpha_k = \frac{\Delta p_k}{p_k}$ на величину, определяемую формулой

$$\Delta\alpha_k = \frac{eI}{mc^3 \epsilon_0 \beta \gamma \rho^3} Im \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{n,m,p} \frac{\nu_{n,m}^3 W_{n,m,p}}{k_{n,m,p} J_{n,m,p}} J'_n(\frac{\nu_{n,m} \xi_{k,N}}{\rho}) J_n(\frac{\nu_{n,m} \xi_{j,N}}{\rho}) exp[k_{n,m,p} (k-j) (i - \frac{1}{2Q_\lambda})], \quad (10)$$

где $I = \frac{q}{T}$ обозначает средний ток пучка и

$$W_{n,m,p} = -\left(i\frac{k_{n,m,p}}{\beta} - \frac{k_{n,m,p}}{2\beta Q_{n,m,p}}\right)^2 \frac{(-1)^p \exp\left(\frac{\delta k_{n,m,p}}{2Q_{n,m,p}} - i\frac{\delta k_{n,m,p}}{\beta}\right) - 1}{\left(-\frac{ip\pi}{\delta} + \frac{ik_{n,m,p}}{\beta} - \frac{k_{n,m,p}}{2\beta Q_{n,m,p}}\right)^2} \frac{(-1)^p \exp\left(-\frac{\delta k_{n,m,p}}{2Q_{n,m,p}} + i\frac{\delta k_{n,m,p}}{\beta}\right) - 1}{\left(\frac{ip\pi}{\delta} + \frac{ik_{n,m,p}}{\beta} - \frac{k_{n,m,p}}{2\beta Q_{n,m,p}}\right)^2}. \quad (11)$$

Здесь строчные греческие буквы обозначают нормализованные значения, $R = \rho\Lambda$, $d = \delta\Lambda$, $x = \xi\Lambda$, Λ — длина волны моды ТМ010; $\Lambda = cT$, R — радиус резонатора, $\nu_{n,m}$ представляет собой m -ый нуль функции Бесселя порядка n $J_n(x)$ $\beta = v/c$; $k_z = \pi p/d$; $k_c = \nu_{n,m}/R$ $p = 0, 1, \dots$, $m, n=1, 2, \dots$, а

$$J_{n,m,p} = \frac{\pi^3 \rho^2 p^2}{2\delta \nu_{n,m}^2} (A_{n,m} + B_{n,m}) + \pi \delta C_{n,m} \begin{pmatrix} 1, p = 0 \\ 1/2, p \neq 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$A_{n,m} = \int_0^{\nu_{n,m}} J_n^2(x) x dx, \quad B_{n,m} = \int_0^{\nu_{n,m}} \frac{J_n^2}{x} dx,$$

$$C_{n,m} = \int_0^{\nu_{n,m}} J_n^2(x) x dx, \quad k_{n,m,p} = \sqrt{\frac{\nu_{n,m}^2}{\rho^2} + \frac{\pi^2 p^2}{\delta^2}}. \quad (13)$$

1. Компьютерное моделирование динамики

Для моделирования динамики выведенное выше выражение для изменения угла заряда после пролета резонатора необходимо дополнить соотношениями для поперечного движения между резонаторами. Будем предполагать, что между резонаторами установлены одиночные квадрупольные чередующейся полярности, так что матрица перехода между выходом из резонатора и входом в последующий резонатор имеет вид

$$m_{1,1} = 1 + PD, \quad m_{1,2} = D(2 + PD), \quad m_{2,1} = P, \quad m_{22} = 1 + PD, \quad (14)$$

где P — сила квадрупольной линзы; $P = 1/F$; F — фокусное расстояние; D — длина промежутка между резонаторами. Для компьютерного моделирования самосогласованной динамики точечных сгустков использовались рекуррентные соотношения (10), согласно которым можно вычислить координаты и угол k -ой частицы на выходе N -го резонатора, если последние известны для резонатора с номером $N - 1$, а также известны координаты сгустков с номерами от 1-го до $k - 1$.

Рис. 1 представляет пример расчета для пучка энергией 5 МэВ и током 10 А, при этом параметр фокусировки принимался равным $PD = 1$, а значение добротности $Q = 1000$ для всех видов колебаний. Вычисления проводились для пучка с числом сгустков 300. На левом графике по оси ординат отложено максимальное значение отклонения сгустков, по оси абсцисс — номер резонатора. Нижняя кривая соответствует одноволновому приближению, при расчете верхней учитывались 10 дипольных мод с числом радиальных вариаций до 5 и числом продольных вариаций до 2. Те же самые соотношения использовались для расчета динамики галло, однако моделирование сводилось к вычислению траекторий во внешнем поле квадрупольных и зависящих от времени ВЧ-полей, возбужденных центральной частью пучка. На правом графике приведено распределение частиц в поперечном фазовом пространстве после пролета 50 резонаторов для периферийных частиц сгустка с номером 250 с равномерным начальным распределением в диапазоне поперечных смещений $0,03 - 0,1$. Кумулятивное взаимодействие приводит к росту эффективного эмиттанса, что проявляется в трансформации фазового сегмента в искривленную линию.

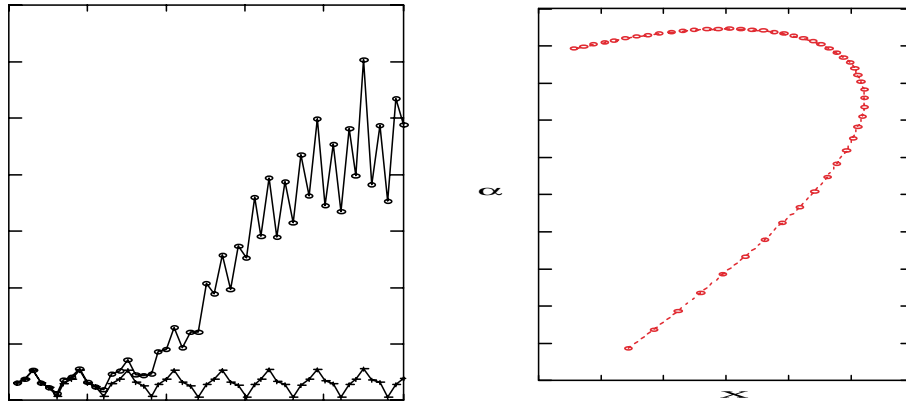


Рис. 1: Распределение максимальных амплитуд бетатронных колебаний по длине ускорителя и фазовый портрет гало на выходе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта 97-02-17082.

Список литературы

- [1] W.K.H. Panofsky and M. Bander. The Review of Scientific Instruments, vol. 39, pp. 206-212, February, 1968.
- [2] A.W. Chao, B. Richter and C.Y. Yao. Nuclear Instruments and Methods, vol. 178, pp. 1-8, 1980.
- [3] R.L. Gluckstern, R.K. Cooper and P.J. Channel. Particle Accelerators, vol. 16, pp. 125-153, 1985.
- [4] C.L. Bohn and J.R. Delayen. Physical Review A, vol. 45, No 8, pp. 5964-5993, April, 1992.
- [5] V.G. Kurakin. — In: Proceed. of the 4th European Particle Accelerator Conference, London, 27 June to 1 July 1994, pp. 1123-1125.
- [6] V. Kurakin. — In: Proceed. of the 1995 Particle Accelerator Conference and International Conference on High Energy Accelerators, May 1-5, 1995, Dallas, USA, 3049-3051.
- [7] W.K.H. Panofsky and W.A. Wenzel. The Review of Scientific Instruments, vol. 27, No 11, p. 967, November, 1956.
- [8] M. Jean Browman. — In: Proceed. of 1993 Particle Accelerator Conference, Washington, May 17 - 20, 1993, pp. 800 - 802.
- [9] В.М. Лопухин. Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. — Москва, ГТТИ, 1953, 324 с.