

Некогерентный кулоновский сдвиг бетатронных частот в синхротроне ИФВЭ

В.В. Комарова, П.Н. Чирков

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий, Протвино, Россия

Введение

Увеличение интенсивности пучка в синхротроне ограничивается многими причинами, одной из которых является некогерентный кулоновский сдвиг бетатронных частот $\Delta Q_{x,y}$, вызываемый действием сил пространственного заряда в банче при инжекции. Нелинейная зависимость сдвига от поперечных и продольных амплитуд колебаний приводит к разбросу бетатронных частот частиц пучка на плоскости $\{Q_x, Q_y\}$. При большой величине разброса часть частиц может оказаться в области действия опасных бетатронных резонансов, возбуждаемых неидеальностью магнитного поля ускорителя.

Предельное число частиц в банче часто оценивают по величине максимального некогерентного сдвига частот от положения невозмущенной рабочей точки до линий ближайших суммовых резонансов второго порядка у частиц с нулевыми амплитудами бетатронных и синхротронных колебаний. Но такая оценка может заметно занижать величину предельной интенсивности [1–3]. Вклад в ограничение предельной интенсивности вносят прежде всего потери частиц с большими амплитудами бетатронных колебаний, рост которых из-за действия резонансов 3- и 4-го порядков в значительной степени может определяться нелинейной зависимостью бетатронных частот от амплитуд. Поэтому дальнейшее повышение интенсивности требует более детального анализа некогерентного кулоновского сдвига в пучке с максимально реальными функциями распределений частиц.

В работе приводится расчет сдвигов бетатронных частот при гауссовском распределении частиц по координатам поперечного и продольного движений. Гауссовские распределения, являясь в определенной степени идеализацией, достаточно хорошо описывают реальные “колоколообразные” распределения частиц в банче. Проведенные расчеты позволяют составить представление о распределении частиц пучка по бетатронным частотам и выделить бетатронные резонансы, требующие тщательной коррекции. Расчет некогерентного сдвига делается без учета относительно слабого влияния проводящих стенок вакуумной камеры и ферромагнитных полюсов магнитов [4].

1. Распределение заряда и электромагнитного поля в банче

Предполагаем, что распределение частиц в банче по относительному импульсу $\delta \equiv \Delta p/p$ и продольной координате \tilde{s} , отсчитываемой от центра банча, является стационарным гауссовским распределением, согласованным с линейными радиально-фазовыми колебаниями:

$$f(\delta, \tilde{s}) = \frac{1}{2\pi\sigma_p\sigma_s} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma_p^2} - \frac{\tilde{s}^2}{2\sigma_s^2}\right), \quad \text{где} \quad \sigma_s = R_0 \kappa \sigma_p \quad \text{и} \quad \kappa = \sqrt{\frac{2\pi}{q} \frac{\alpha\gamma^2 - 1}{\gamma^2 - 1} \gamma\beta^4 \frac{E_0}{eV}},$$

R_0 – средний радиус синхротрона; E_0 – энергия покоя протона; $q = 30$ – кратность ускорения; α – коэффициент расширения орбиты; V – полное ускоряющее напряжение в ускорителе. Кроме того, считаем, что распределение частиц в поперечном фазовом пространстве является также гауссовским, независимым от распределения в продольном пространстве, стационарным и согласованным с соответствующими невозмущенными фазовыми траекториями. Тогда плотность $\rho(x, y, s, \tilde{s})$ заряда в сечении \tilde{s} банча на азимутальной (продольной) координате s магнитной структуры ускорителя определяется выражением

$$\rho(x, y, s, \tilde{s}) = eN_b \int_{-\infty}^{\infty} f_{\perp}(x - \psi(s)\delta, y, s) \cdot f(\delta, \tilde{s}) \cdot d\delta, \quad \text{где} \quad f_{\perp}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi\sigma_{0,x}\sigma_{0,y}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_{0,x}^2} - \frac{y^2}{2\sigma_{0,y}^2}\right),$$

$\psi(s)$ – дисперсионная функция магнитной структуры, N_b – число протонов в банче. Величина $\sigma_{0,\zeta}(s)$ связана с соответствующим эмиттансом пучка соотношением: $\varepsilon_{\zeta} = 6\pi\sigma_{0,\zeta}^2(s)/\beta_{\zeta}(s)$, где ζ – общее обозначение для x и y . При таком определении эмиттанс содержит около 95 % частиц пучка.

Далее расчет некогерентного кулоновского сдвига проводится для инжектированного в У-70 пучка протонов с энергией 1.34 ГэВ и средней интенсивностью $N_b = 0.69 \times 10^{12}$ частиц в банче. В этом случае $\kappa \cong 18.2$. Для идеально инжектированного пучка принимаются следующие минимальные значения эмиттансов и импульсного разброса [5]: $\varepsilon_x = 21\pi$ мм·мрад, $\varepsilon_y = 11\pi$ мм·мрад и $-3 \leq \delta \times 10^3 \leq 3$ (95% достоверность). Отсюда для среднеквадратичной величины относительного импульсного разброса частиц в банче можно получить оценку: $\sigma_p \approx 1.5 \times 10^{-3}$.

Интегрирование предыдущего выражения дает

$$\rho(x, y, s, \tilde{s}) = \frac{eN_b}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_s} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{\tilde{s}^2}{2\sigma_s^2}\right),$$

$$\text{где: } \sigma_x(s) = \sqrt{\sigma_{0,x}(s)^2 + \psi(s)^2 \sigma_p^2}, \quad \sigma_y(s) = \sigma_{0,y}(s).$$

Для плоской задачи, когда длина банча намного больше его поперечных размеров, т.е. $\sigma_s \gg \sigma_{x,y}$, что с хорошей точностью выполняется в У-70 при инжекции, потенциал электрического поля, создаваемого распределением заряда ρ в сечении \tilde{s} банча на координате s магнитной структуры, имеет вид [1, 6]

$$U(x, y, s, \tilde{s}) = eN_b \lambda(\tilde{s}) \int_0^\infty \frac{dt}{\Omega_x \Omega_y} \exp\left(-\frac{x^2}{2\Omega_x^2} - \frac{y^2}{2\Omega_y^2}\right),$$

$$\text{где: } \Omega_\zeta = \sqrt{\sigma_\zeta^2 + t}, \quad \lambda(\tilde{s}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} \exp\left(-\frac{\tilde{s}^2}{2\sigma_s^2}\right).$$

При слабом влиянии проводящих стенок и ферромагнитных полюсов движущийся банч возбуждает магнитное поле, продольная компонента векторного потенциала которого просто выражается через электрический потенциал $A_s = \beta U$. Действие такого электромагнитного поля на бетатронное движение в первом порядке по возмущению описывается следующими каноническими уравнениями для медленно меняющихся “инвариантов” $\vec{I} = (I_x, I_y)$ и фаз $\vec{\eta} = (\eta_x, \eta_y)$

$$\frac{dI_\zeta}{d\theta} = -\frac{\partial \langle D \rangle}{\partial \eta_\zeta}, \quad \frac{d\eta_\zeta}{d\theta} = \frac{\partial \langle D \rangle}{\partial I_\zeta}, \quad \zeta = A_\zeta \cos(\mu_\zeta(\theta) + \eta_\zeta), \quad A_\zeta = \sqrt{\beta_\zeta(\theta) I_\zeta},$$

где: θ – обобщенный азимут ускорителя, связанный с продольной координатой s соотношением $\theta = s/R_0$; $\mu_\zeta(\theta) = Q_\zeta \theta + \chi_\zeta(\theta)$ – фаза невозмущенных бетатронных колебаний с периодической частью $\chi_\zeta(\theta)$; оператор $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по θ .

Для частиц, совершающих линейные синхротронные колебания с импульсной амплитудой δ_0 , выражение для D имеет вид

$$D = \frac{2r_0}{\beta^2 \gamma^3} \frac{N_b \exp\left[-(\delta_0/\sigma_p)^2 \sin^2(w)/2\right]}{\sqrt{2\pi} \kappa \sigma_p} \int_0^\infty \frac{dt}{\Omega_x \Omega_y} \exp\left(-\frac{(x + \psi\delta)^2}{2\Omega_x^2} - \frac{y^2}{2\Omega_y^2}\right),$$

где: r_0 – классический радиус протона; $\delta = \delta_0 \cos(w)$ – изменения относительного импульса; w – фаза синхротронных колебаний.

Учитывая периодическую зависимость D от $\mu_{x,y}$ и азимута θ , можно представить

$$D = \sum_{\vec{n}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_{\vec{n},k}(\vec{I}) e^{i(\vec{n}\vec{Q}-k)\theta + i\vec{n}\vec{\eta}}, \quad \vec{n} = (n_x, n_y), \quad n_{x,y}, k - \text{целые числа},$$

$$D_{\vec{n},k}(\vec{I}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} D(\zeta = \sqrt{\beta_\zeta(\theta) I_\zeta} \cos(\alpha_\zeta), \theta) e^{-i(\vec{n}\vec{Q}-k)\theta - i\vec{n}\vec{\eta}} d\alpha_x d\alpha_y d\theta.$$

Систематическое изменение величин I_{ζ}, η_{ζ} происходит при отличном от нуля $\langle D \rangle$, вклад в который вносят медленно меняющиеся гармоники с $|\tilde{n}\bar{Q} - k| \ll 1$. Среди таких гармоник только нерезонансная гармоника $\{\tilde{n} = (0,0) \cap k = 0\}$ определяет сдвиг частот бетатронных колебаний

$$\Delta Q_{\zeta} = \frac{\partial D_{\bar{0},0}}{\partial I_{\zeta}} \quad (1)$$

и имеет следующий вид:

$$D_{\bar{0},0} = \frac{2r_0}{\beta^2 \gamma^3} \frac{N_b \exp[-(\delta_0/\sigma_p)^2 \sin^2(w)/2]}{\sqrt{2\pi} \kappa \sigma_p} \left\langle \int_0^{\infty} \frac{dt}{\Omega_x \Omega_y} e^{-\frac{A_y^2}{4\Omega_y^2}} I_0 \left(\frac{A_y^2}{4\Omega_y^2} \right) \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-\frac{(A_x \cos(\alpha) + x_0)^2}{2\Omega_x^2}} \right\rangle, \quad (2)$$

где I_m – модифицированная функция Бесселя первого рода m -го порядка; $x_0 = \psi(s) \delta_0 \cos(w)$.

Представление о распределении частиц банча по бетатронным частотам на плоскости $\{Q_x, Q_y\}$ и поведении частот у частиц с разными бетатронными амплитудами в процессе синхротронных колебаний можно получить, рассмотрев ряд предельных случаев:

1. Распределение по бетатронным частотам частиц с нулевыми амплитудами синхротронных колебаний ($\delta_0 = 0$) и частиц с произвольными значениями δ_0 при фазе синхротронных колебаний $w = \pi/2$.
2. Сдвиги частот у частиц с нулевыми амплитудами бетатронных колебаний, т.е. при $I_{x,y} = 0$.
3. Сдвиги частот у частиц, совершающих одномерные вертикальные бетатронные колебания.

2. Сдвиги бетатронных частот

Случай 1. Частицы с нулевыми амплитудами синхротронных колебаний ($\delta_0 = 0$) колеблются относительно идеальной замкнутой орбиты ($x_0 = 0$) и, согласно (1) и (2), имеют сдвиги бетатронных частот, определяемые следующими выражениями:

$$\Delta Q_x(\vec{I}, \delta_0 = 0) = -\frac{r_0}{\beta^2 \gamma^3} \frac{N_b}{\sqrt{2\pi} \kappa \sigma_p} \left\langle \frac{\beta_x}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\Omega_x^3 \Omega_y} e^{-R_x - R_y} I_0(R_y) [I_0(R_x) - I_1(R_x)] \right\rangle,$$

$$\Delta Q_y(\vec{I}, \delta_0 = 0) = -\frac{r_0}{\beta^2 \gamma^3} \frac{N_b}{\sqrt{2\pi} \kappa \sigma_p} \left\langle \frac{\beta_y}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\Omega_x \Omega_y^3} e^{-R_x - R_y} I_0(R_x) [I_0(R_y) - I_1(R_y)] \right\rangle,$$

где $R_{\zeta} = \frac{A_{\zeta}^2}{4\Omega_{\zeta}^2}$.

На рис.1 показаны сдвиги частот у таких частиц в У-70 при инжекции для разных значений амплитуд бетатронных колебаний $\{I_x/I_{0x}, I_y/I_{0y}\}$, где $I_{0\zeta} = \varepsilon_{\zeta}/6\pi$. Кроме того, из последних формул следует известное выражение для сдвига частот у частиц с нулевыми амплитудами бетатронных колебаний:

$$\Delta \bar{Q}(\vec{0}, \delta_0 = 0) = -\frac{r_0}{\beta^2 \gamma^3} \frac{N_b}{\sqrt{2\pi} \kappa \sigma_p} \left\langle \frac{1}{(\sigma_x + \sigma_y)} \left(\frac{\beta_x/\sigma_x}{\beta_y/\sigma_y} \right) \right\rangle \cong \begin{pmatrix} -0.185 \\ -0.280 \end{pmatrix}.$$

Из выражения для $D_{\bar{0},0}$ видно, что по известным сдвигам частот у частиц с $\delta_0 = 0$ определяются сдвиги частот при $\delta_0 \neq 0$ в момент $w = \pi/2$, т.е. когда $x_0 = 0$:

$$\Delta \bar{Q}(\vec{I}, \delta_0, w = \pi/2) = \Delta \bar{Q}(\vec{I}, \delta_0 = 0) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\delta_0}{\sigma_p} \right)^2}.$$

На рис. 2 показаны частоты на плоскости $\{Q_x, Q_y\}$ частиц, совершающих одномерные x - и y -бетатронные колебания (жирные замкнутые линии), при $\delta_0/\sigma_p = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ и $w = \pi/2$ (с увеличением δ_0 соот-

ветствующая замкнутая область уменьшается). При этом верхняя часть каждой замкнутой кривой, отвечающая определенному значению δ_0 , соответствует вертикальным колебаниям, нижняя – горизонтальным. Там же показаны линии суммовых резонансов 3- и 4-го порядков и линия диагональных разностных резонансов.

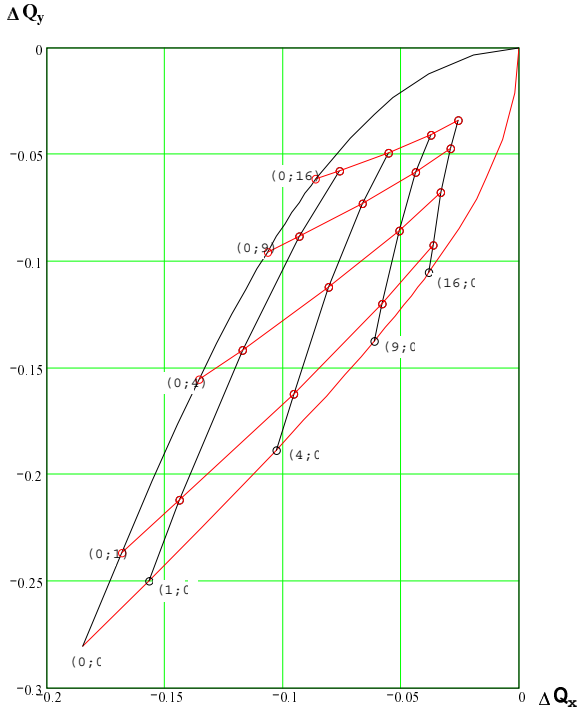


Рис. 1: Сдвиги частот у частиц с $\delta_0/\sigma_p = 0$.

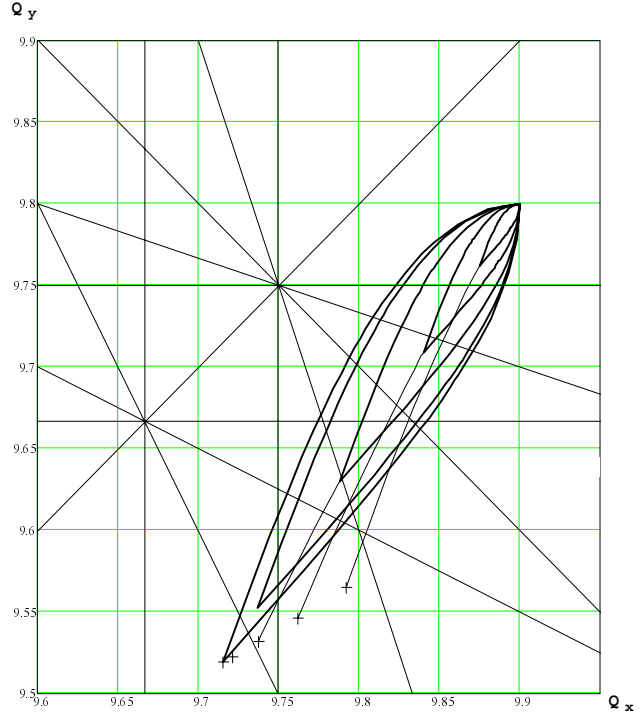


Рис. 2: Частоты у частиц с $\delta_0/\sigma_p = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ при $w = \pi/2$ – жирные замкнутые линии, тонкие линии – для частиц с $\vec{I} = \vec{0}$ при любых w .

Случай 2. Сдвиги частот у частиц с нулевыми амплитудами бетатронных колебаний ($\vec{I} = \vec{0}$) согласно (1) и (2) определяются следующим выражением:

$$\Delta\bar{Q}(\vec{0}, \delta_0, w) = -\frac{r_0}{\beta^2 \gamma^3} \frac{N_b}{\sqrt{2\pi} \kappa \sigma_p} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\delta_0}{\sigma_p}\right)^2 \sin^2(w)} \left\langle \frac{1}{2} \int_0^\infty \begin{pmatrix} \frac{\beta_x (1 - x_0^2 / \Omega_x^2)}{\Omega_x^3 \Omega_y} \\ \frac{\beta_y}{\Omega_x \Omega_y^3} \end{pmatrix} e^{-\frac{x_0^2}{2\Omega_x^2} t} dt \right\rangle.$$

Отсюда для рассматриваемых частиц при относительно малых амплитудах синхротронных колебаний ($\delta_0/\sigma_p \leq 2$ в У-70) приближенно получаем

$$\Delta\bar{Q}(\vec{0}, \delta_0, w) \cong e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\delta_0}{\sigma_p}\right)^2 \sin^2(w)} \left\{ \Delta\bar{Q}(\vec{0}, \delta_0 = 0) + \bar{C} \left(\frac{\delta_0}{\sigma_p}\right)^2 \cos^2(w) \right\},$$

где

$$\bar{C} = \frac{r_0}{\beta^2 \gamma^3} \frac{N_b}{\sqrt{2\pi} \kappa \sigma_p} \left\langle \frac{(\psi \sigma_p)^2}{2\sigma_x (\sigma_x + \sigma_y)^2} \begin{pmatrix} \frac{\beta_x}{\sigma_x} (2 + \sigma_y / \sigma_x) \\ \beta_y / \sigma_y \end{pmatrix} \right\rangle \cong \begin{pmatrix} 0.023 \\ 0.013 \end{pmatrix}.$$

На рис. 2 тонкими линиями показаны частоты частиц с нулевыми амплитудами бетатронных колебаний при $\delta_0/\sigma_p = 1, 1.5, 2$ в процессе линейных синхротронных колебаний (крестиком отмечен момент $w = 0$).

Случай 3. Сдвиги частот у частиц, совершающих одномерные вертикальные бетатронные колебания, для которых в У-70 существуют жесткие апертурные ограничения, определяются из (1) и (2) при $I_x \rightarrow 0$ следующим выражением:

$$\Delta \bar{Q}_y(I_y, \delta_0, w) = -\frac{r_0}{\beta^2 \gamma^3} \frac{N_b e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\delta_0}{\sigma_p}\right)^2 \sin^2(w)}}{\sqrt{2\pi} \kappa \sigma_p} \left\langle \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{\beta_x (1 - x_0^2 / \Omega_x^2)}{\Omega_x^3 \Omega_y} I_0(R_y) \right) e^{-\frac{x_0^2}{2\Omega_x^2} - R_y} dt \right\rangle .$$

На рис. 3 приведены рассчитанные зависимости ΔQ_y от нормированных бетатронных “амплитуд” $\sqrt{I_y/I_{0y}}$ для двух фаз синхротронных колебаний $w = 0$ (жирные) и $w = \pi/2$ (тонкие линии) при значениях δ_0/σ_p , равных соответственно 0; 1; 1.5; 2; 1; 1.5; 2 при отсчете кривых “снизу вверх”.

Заключение

Из проведенных расчетов видно, что имеет место достаточно сильная нелинейная зависимость некогерентных кулоновских сдвигов бетатронных частот от амплитуд колебаний. Эти сдвиги осциллируют в интервале, увеличивающемся с ростом δ_0 . Частицы с амплитудами, соответствующими краю пучка ($I_y/I_{0y} \cong 6$), имеют интервал частотных осцилляций более чем вдвое меньший по сравнению с тем, что имеют частицы с малыми бетатронными амплитудами. При характерном положении рабочей точки У-70 в {9.90; 9.80} частоты граничных частиц пучка с учетом некогерентного сдвига будут находиться в области действия суммовых резонансов 3- и 4-го порядков и, следовательно, необходима коррекция прежде всего одномерных резонансов $4Q_y = 39$ и $3Q_y = 29$.

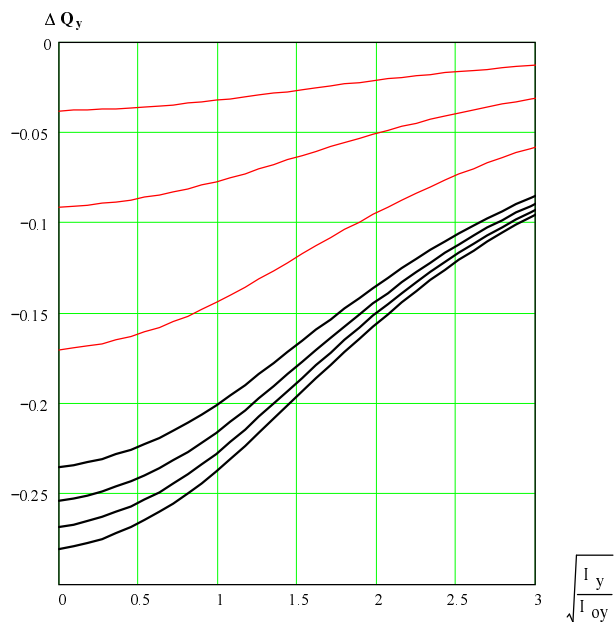


Рис. 3: Зависимость ΔQ_y от вертикальных амплитуд.

Авторы благодарят Е.Ф.Троянова за полезные обсуждения работы и сделанные замечания.

Список литературы

- [1] G. Parzen. “Space Charge Limits in Proton Synchrotrons”. Nuclear Instr. and Methods, A281, p.413, 1989.
- [2] S. Machida, G.Bourianoff, N.K.Mahale at al. “Space Charge Effects in the SSC Low Energy Booster”. – Proceed. of the 1991 IEEE Particle Accelerator Conference, Sun Francisco, 1991, v.1, p.383.
- [3] S. Machida “Space-Charge Calculation in Synchrotron. – Proceed. of the 1993 IEEE Particle Accelerator Conference, p.3224, 1993.
- [4] В.И. Балбеков, И.А. Шукейло. “Некоторые эффекты объемного заряда в Бустере и Основном ускорителе ИФВЭ”, Труды 2-го Всесоюзн. совещ. по ускорителям заряженных частиц, 1972, т.2, стр.52.
- [5] Е.Ф. Троянов и др. “О работе протонного синхротрона ИФВЭ и модернизации его систем”. (Настоящее совещание.)
- [6] L. Teng. “Primer on Beam Dynamics in Synchrotrons”, in *Physics of Particle Accelerator*, AIP Conf. Proc. #184, New York, 1989, v.2, p.1879.