

Анализ способов подавления квадрупольных колебаний пучка протонов

П.Т. Пашков

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий, Протвино, Россия

Обычно для подавления синфазных квадрупольных колебаний пучка протонов используется модуляция амплитуды ускоряющего напряжения (см., например, [1]). Ниже показана принципиальная возможность использования для этой цели в ускорителе типа У-70 дополнительной цепи обратной связи в системе автоматической подстройки частоты ускоряющего. Проведен сравнительный анализ этих двух способов подавления квадрупольных колебаний. Расчёты выполнены в приближении широких полос пропускания цепей обратных связей.

Продольные колебания частиц в протонном синхротроне при наличии модуляции амплитуды и фазы ускоряющего напряжения описываются фазовым уравнением:

$$\frac{d\Delta p}{dt} = \frac{eV}{2\pi R_0} \left[\left(1 + \frac{\Delta V(t)}{V} \right) \cos\varphi - \cos\varphi_s \right]; \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{q\eta}{m_0\gamma R_0} \Delta p + \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2, \quad (2)$$

где $\Delta p = p - p_s$ — отклонение импульса частицы p от синхронного значения $p = p_s$; e — заряд, m_0 — масса протона; φ и φ_s — соответственно фаза частицы и синхронная фаза, отсчитываемые относительно максимума ускоряющего напряжения в отсутствие модуляции его амплитуды; R_0 — средний радиус ускорителя; γ — релятивистский фактор; $\eta = 1/\gamma_{tr}^2 - 1/\gamma^2$ (γ_{tr} — критическая энергия ускорителя в единицах энергии покоя протона); $\Delta\omega_1$ — поправка к частоте ускоряющего напряжения ω_{RF} , вырабатываемая системой автоматической подстройки частоты ускоряющего напряжения; $\Delta\omega_2$ — частотный сигнал, вырабатываемый дополнительной цепью обратной связи при возникновении колебаний длины сгустков частиц; V — номинальное значение амплитуды ускоряющего напряжения, а $\Delta V(t)$ — её модуляция на частоте квадрупольных колебаний.

Считая фазовые колебания частиц малыми ($|\varphi - \varphi_s| \ll 1$), перейдём от переменных $(\varphi, \Delta p)$ к переменным (x, y) , в которых фазовые траектории частиц в отсутствие возмущений являются окружностями,

$$x = \varphi - \varphi_s, \quad y = \frac{|\eta|\omega_{RF}}{\Omega_0} \frac{\Delta p}{p_s},$$

где Ω_0 — частота малых фазовых колебаний. Полагая далее $x = \bar{x} + \Delta x$, $y = \bar{y} + \Delta y$, где (\bar{x}, \bar{y}) — координаты центра тяжести пучка, а $(\Delta x, \Delta y)$ — соответственно отклонения координат частиц относительно (\bar{x}, \bar{y}) , получаем после усреднения системы уравнений (1), (2) по распределению частиц в сгустках:

$$\dot{y} = a\bar{x} + \frac{a \cot \varphi_s}{2} (\bar{x}^2 + \overline{\Delta x^2}) + a \frac{\Delta V}{V} \cot \varphi_s; \quad (3)$$

$$\dot{\bar{x}} = -ay + \Delta\omega_1(\bar{x}, \bar{y}) + \Delta\omega_2(\overline{\Delta x^2}, \overline{\Delta y^2}), \quad (4)$$

где k_x, k_y пропорциональны коэффициентам усиления в цепях фазового и радиального контуров системы соответственно; $|a| = \Omega_0$, а знак a противоположен знаку параметра η .

Ниже при выводе формул для декрементов затухания квадрупольных колебаний в пучке используется также система дифференциальных уравнений для вторых моментов [2, 3]:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= u_0 = \text{const}; \\ \dot{\bar{v}} &= -2a\bar{w};\end{aligned}\tag{5}$$

$$\dot{\bar{w}} = 2a\bar{v} + au_0 \frac{\Delta V}{V} + au_0 \cot \varphi_s \bar{x},$$

где $u = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$, $v = (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2$, $w = 2\Delta x \Delta y$.

Проанализируем сначала процесс подавления квадрупольных колебаний с помощью частотной модуляции ускоряющего напряжения, полагая $\Delta V = 0$. При возникновении в пучке квадрупольных колебаний максимум линейной плотности заряда частиц в сгустках колеблется с частотой, равной удвоенной частоте фазовых колебаний, что можно использовать в качестве исходного сигнала в дополнительной цепи обратной связи. В таком случае формула для $\Delta\omega_2$ может быть записана в виде

$$\Delta\omega_2 = -k_x G \frac{\Delta\rho_{max}}{\rho_{max}},\tag{6}$$

где $\Delta\rho_{max} = \rho_{max,0} - \rho_{max}$ — отклонение максимума линейной плотности заряда сгустков ρ_{max} от его равновесного значения $\rho_{max,0}$; $G = |G|e^{i\chi}$ — комплексный коэффициент. Учитывая далее, что при малых отклонениях длины сгустков от равновесного значения на величину $|\Delta x_{max}| \ll x_{max}$ справедливы соотношения — $\Delta\rho_{max} = -\rho_{max} \Delta x_{max}/x_{max}$, $\bar{v} = 2u_0(\Delta x_{max}/x_{max})$, система уравнений (3), (4) может быть записана в виде

$$\ddot{\bar{x}} + k_x \dot{\bar{x}} + \kappa\Omega_0^2 \bar{x} = -k_x g \dot{\bar{v}},\tag{7}$$

где $\kappa = 1 + |k_y|/\Omega_0$. Правая часть этого уравнения пропорциональна $\dot{\bar{v}}$, поэтому оно должно быть дополнено дифференциальным уравнением относительно второго момента \bar{v} , которое, согласно (5), имеет вид

$$\ddot{\bar{v}} + 4\Omega_0^2 \bar{v} = -2u_0 \Omega_0^2 \cot \varphi_s \bar{x}.\tag{8}$$

Таким образом, квадрупольные колебания сгустков частиц в пучке описываются системой из двух дифференциальных уравнений второго порядка. Полагая $\bar{x}, \bar{v} \sim \exp(-i\omega t)$, приходим к характеристическому уравнению относительно частоты ω :

$$(\omega^2 - 4\Omega_0^2)(\omega^2 + ik_x \omega - \kappa\Omega_0) = i\omega k_x \Omega_0^2 \cot \varphi_s G.\tag{9}$$

Связь между дипольными и квадрупольными колебаниями в практически интересных случаях чрезвычайно слаба, поэтому решение уравнения (9) относительно частоты ω можно искать в предположении, что оно мало отличается от решения $\omega = 2\Omega_0$, имеющего место для квадрупольных колебаний сгустков в отсутствие нелинейности ускоряющего поля. Учитывая также, что обычно $k_x, |k_y| \gg 1$, можно получить из (9) следующую формулу для декремента $Im \omega$:

$$Im \omega = -\frac{|G|\Omega_0 k_x \cot \varphi_s}{2(k_y^2 + 4k_x^2)} (|k_y| \cos \chi - 2k_x \sin \chi).\tag{10}$$

Из формулы (10) видно, что экстремумы $Im \omega$ соответствуют значениям $\tan \chi = -2k_x/|k_y|$. Так как для затухания квадрупольных колебаний в пучке необходимо иметь $Im \omega < 0$, то из этого следует, что ниже критической энергии ($\gamma < \gamma_{tr}$, $\cot \varphi_s < 0$) максимум декремента имеет место при $\chi = \pi - \arctan 2k_x/|k_y|$, а за критической энергией ($\gamma > \gamma_{tr}$, $\cot \varphi_s > 0$) — при $\chi = -\arctan 2k_x/|k_y|$.

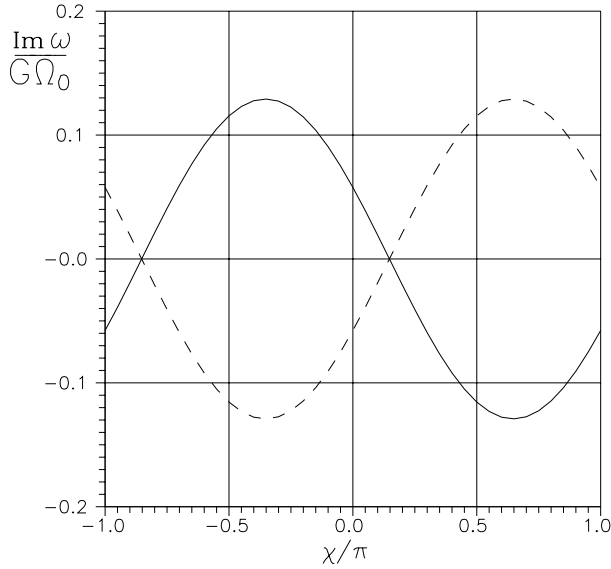


Рис. 1: Зависимость $Im \omega$ от фазы χ ($\gamma < \gamma_{tr}$ — сплошная линия, $\gamma > \gamma_{tr}$ — пунктир).

работе, воспользуемся для определения сигнала обратной связи $\Delta V/V$ соотношением, подобным (6): $\Delta V/V = G\Delta\rho_{max}/\rho_{max}$. Отбросим на время в (5) член, пропорциональный \bar{x} , и положим $\Delta V/V = -G\bar{v}/2u_0$. В результате приходим к дифференциальному уравнению относительно второго момента \bar{v} :

$$\ddot{\bar{v}} - \Omega_0^2 G \bar{v} + 4\Omega_0^2 \bar{v} = 0, \quad (11)$$

из которого, полагая $\bar{v} \sim e^{-i\omega t}$ и считая возмущение фазового движения достаточно слабым ($|Im \omega| \ll \Omega_0$), имеем:

$$Im \omega = -\frac{1}{4}\Omega_0 Im G. \quad (12)$$

Видно, что наибольшая скорость затухания квадрупольных колебаний имеет место при чисто мнимой величине коэффициента G . Сравнивая максимальную величину декремента $|Im \omega|_{max}$, получающуюся из формулы (12) с аналогичной величиной, даваемой рис. 1, можно видеть, что при одинаковых коэффициентах G в первом случае (при модуляции амплитуды ускоряющего напряжения) величина декремента примерно в два раза больше, чем во втором.

Найдём добавку $\Delta(Im \omega)$ к величине декремента (12), обусловленную работой системы автоподстройки частоты ускоряющего напряжения. С этой целью снова воспользуемся системой (3), (4), в которой пренебрежём нелинейным членом, а также положим $\Delta\omega_2 = 0$. Уравнение для \bar{x} ,

$$\ddot{\bar{x}} + k_x \dot{\bar{x}} + \kappa\Omega_0^2 \bar{x} = -\kappa \frac{\Omega_0 G}{2u_0} \cot \varphi_s, \quad (13)$$

должно решаться совместно с уравнением (8). Полагая $\bar{x}, \bar{v} \sim \exp(-i\omega t)$, снова приходим к характеристическому уравнению четвёртой степени, подобному уравнению (9), но с другой правой частью:

$$(\omega^2 - 4\Omega^2)(\omega^2 + ik_x - \kappa\Omega_0^2) = -\kappa G \Omega_0^2 \cot^2 \varphi_s. \quad (14)$$

С учётом слабой связи дипольных и квадрупольных колебаний отсюда имеем (в приближении $k_x, |k_y| \gg 1$):

$$\Delta(Im \omega) = \frac{G\Omega_0 \cot^2 \varphi_s}{2} \frac{k_x |k_y|}{k_y^2 + 4k_x^2}. \quad (15)$$

На рис. 1 представлена зависимость $Im \omega(\chi)$ в единицах $|G|\Omega_0$, рассчитанная с помощью формулы (10) для случая $k_x = |k_y|$ и $\cos \varphi_s = 0,5$. Видно, что ниже критической энергии (сплошная линия) затухание квадрупольных колебаний обеспечивается в случае, если фаза χ удовлетворяет условию $0,46 < \chi < 3,6$; выше критической энергии (пунктир) диапазон фаз, для которого $Im \omega < 0$, сдвигается на $-\pi$: $-2,68 < \chi < 0,46$. Максимальная величина декремента затухания квадрупольных колебаний в рассматриваемом случае равна: $|Im \omega|_{max} \simeq 0,13\Omega_0|G|$.

Проанализируем теперь случай подавления квадрупольных колебаний с помощью отрицательной обратной связи, воздействующей на амплитуду ускоряющего напряжения ($\Delta\omega_2 = 0, \Delta V \neq 0$). С целью облегчения сравнительного анализа способов подавления квадрупольных колебаний, рассматриваемых в настоящей

Чтобы выяснить пределы применимости полученных выше аналитических формул, а также рассчитать поправки к декрементам $Im\omega$, связанные с учётом конечной длительности сгустков частиц, численно интегрировалась исходная нелинейная система уравнений (1), (2); результат численных расчётов иллюстрируется рис. 2, на котором представлен сигнал $\Delta\omega_2(t)/\Omega_0$ в случае, когда для подавления квадрупольных колебаний используется частотная модуляция ускоряющего напряжения. Сплошная линия соответствует короткому сгустку ($B = 0,05$), а пунктирная линия — нелинейным фазовым колебаниям ($B = 0,3$). Расчёт выполнен для случая У-70 ($\gamma = \sqrt{3}\gamma_{tr}$, $\cos\varphi_s = 0,5$, $G = -i$). Величины декрементов получились равными $0,121\Omega_0$ и $0,153\Omega_0$ соответственно. Возрастание величины декремента $Im\omega$ с увеличением длины сгустков частиц обусловлено собственным затуханием колебаний, то есть действием разброса синхротронных частот $\Delta\Omega \sim B^2$.

Для нахождения поправки к величине декремента, связанной с учётом конечной длины сгустков, можно воспользоваться оценочной формулой для порога продольной квадрупольной неустойчивости (см., например, работу [4]), которая может быть представлена в виде: $\lambda/\Delta\Omega = 1/2\sqrt{2}$, где λ — инкремент неустойчивости, рассчитанный в пренебрежении разбросом $\Delta\Omega$. Для короткого сгустка ($B = 0,05$) можно пренебречь влиянием на результат разброса $\Delta\Omega$, поэтому данные для декремента $Im\omega$, полученные с помощью формулы (10) и численного расчёта, совпадают. В случае $B = 0,3$ разброс синхротронных частот равен $\Delta\Omega/\Omega_0 \simeq 0,96B^2 = 0,087$. Следовательно, поправка к величине декремента затухания квадрупольных колебаний равна: $\Delta|Im\omega| = \Delta\Omega/2\sqrt{2} = 0,031\Omega_0$.

Данный результат хорошо согласуется с соответствующей величиной декремента, приведенной выше.

Список литературы

1. Schneider G.G. Preprint CERN/PS/90-59(RF). Geneva, 1990.
2. Пашков П.Т. Препринт ИФВЭ 99-11. Протвино, 1999.
3. Hereward H.G. - In: *Proc. 1961 Intern. Conf. on High Energy Accel.* Upton, BNL, 1962, p. 236.
4. Sacherer F. IEEE Trans. Nucl. Sci., **NS-20**, 1973, p. 825.

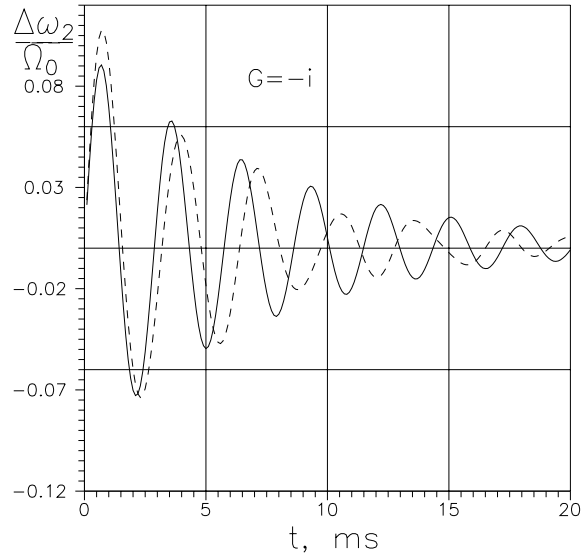


Рис. 2: Сигнал $\Delta\omega_2$, вырабатываемый в цепи обратной связи ($B = 0,05$ — сплошная линия, $B = 0,3$ — пунктир).