Нестационарная трехмерная динамика заряженных сгустков-эллипсоидов

Ю.А. Буданов

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий, Протвино, Россия

Получение пучков высокого качества с большими импульсными токами на низкие энергии по-прежнему является проблемой в теории и практике современных линейных ускорителей. Причем токи в ускорителях на низкую энергию, например в RFQ, весьма далеки от предельных и, по существу, ресурсы ускорителей используются далеко не в полном объеме. Рост эмиттанса в RFQ, по-видимому, происходит по всей длине, однако наибольшие негативные изменения в динамике пучка происходят в самом начале ускорения при преобразовании практически нулевого продольного эмиттанса в конечный продольный фазовый объем сгустка. Плотность заряда при этом изменяется в большом диапазоне значений, что необратимым образом сказывается на качестве пучка.

Краткий анализ начала этого процесса проведен здесь на модели самосогласованного сгустка-эллипсоида с равномерным распределением заряда. Конечно, рассмотрение такой простой модели без учета нелинейности собственного и внешнего поля не в состоянии дать адекватное описание динамики, но, как показывает сравнение с численным моделированием [1], полученные здесь результаты дают качественную оценку значений параметров, при которых продольная динамика в сгустке существенно меняется. Удается отобразить ситуацию, при которой сгусток частиц в процессе увеличения влияния пространственного заряда переходит в качественно новое состояние с удвоенной частотой продольных колебаний, и хотя это состояние впоследствии разрушается из-за нелинейности колебаний, оно влияет на всю последующую динамику.

Для получения простых оценок рассмотрим эллипсоид вращения с поперечными полуосями a, продольной полуосью c и зарядом Q. Внешнее продольное поле будем характеризовать частотой колебаний в нем частицы ω_0 без учета пространственного заряда. Пусть величина a пока постоянна и в нашей системе отсчета все частицы первоначально имеют нулевую продольную скорость. Электростатическая энергия такого эллипсоида [2]

$$W_e = \frac{3}{20\,\varepsilon_0}\cdot\frac{Q^2}{\pi a^2 c}\cdot M_0\ , \tag{1}$$

где $M_0 = 2a^2M_a + c^2M_c$; M_a – поперечный; M_c – продольный коэффициент формы эллипсоида. Под воздействием фазирующих сил эллипсоид начнет сжиматься в продольном направлении. При сжатии электростатическая энергия эллипсоида возрастает, в случае сжатия до диска его энергия

$$W_d = \frac{3Q^2}{40\varepsilon_0 a}\ . \tag{2}$$

Следует отметить, что и продольные и поперечные кулоновские силы при сжатии эллипсоида в диск остаются конечными. Рост электростатической энергии идет за счет убыли потенциальной энергии частиц во внешнем поле. Если этот прирост $\Delta W = W_d - W_e$ приравнять исходной потенциальной энергии сгустка

$$W_{ext} = \frac{m\omega_0^{\ 2}}{2e}\iiint\limits_V \rho(x,y,z)z^2 dV\ , \tag{3}$$

то мы получим условие, при котором частицы уже не могут преодолеть центр сгустка. Решение уравнения $\Delta W = W_{ext}$ есть

$$Q_b = \frac{4\pi\varepsilon_0 m\omega_0^{\ 2}a^2c^3}{3e(\pi ac - 2M_0)}\ . \tag{4}$$

Если перейти от зарядов сгустков к току пучка $I = Q\lambda / C$ (λ – длина волны ускоряющего поля; С – скорость света) и ввести традиционную величину I_l предельного тока, при котором силы кулоновского расталкивания и внешнего сжатия полностью равны, то (4) преобразуется к следующему:

$$I_b = I_l\cdot\frac{M_c}{(\pi a/c - 2M_0/c^2)}\,. \tag{5}$$

Итак, I_b – ток бифуркации, при котором происходит удвоение частоты продольных колебаний и, начиная с которого, частицы более не могут преодолеть центр сгустка. Этот ток существенно меньше предельного, например уже для шара $I_b = I_l/(3\pi - 6)$, т.е. $I_b \approx 0.3 I_l$. Общая зависимость I_b / I_l от c/a отражена на рис. 1.

На рис. 2 изображены фазовые траектории одной частицы в сгустке при $I < I_b$ (a), $I \approx I_b$ (b), $I > I_b$ (c) . Аналогичным образом можно рассчитать ток, при котором может сжаться до заранее заданного размера.

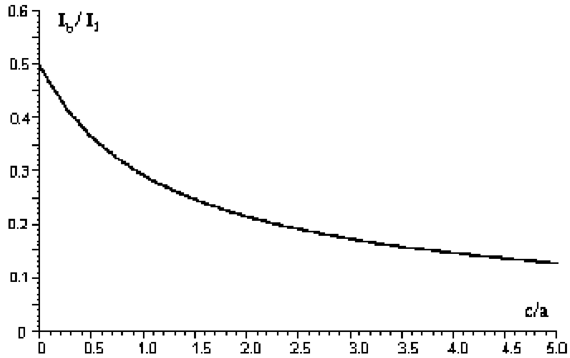

Рис. 1. Зависимость тока бифуркации от геометрии сгустка.

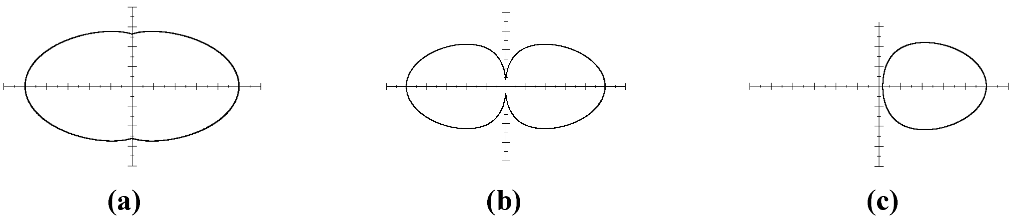

Рис. 2. Фазовые траектории на плоскости ($z, \dot{z}$) для тока в пучке (a) $I < I_b$; (b) $I \le I_b$; (c) $I > I_b$.

Рассмотрим трехмерный случай. Уравнения движения по всем координатам в RFQ будут следующего вида:

$$\ddot{x} + (Q_x(\tau) - \frac{3r_c^3}{r_x r_y r_z} M_x) x = 0 \quad , \tag{6}$$

где $r_c^3 = I\lambda^3 / I_0 \gamma^3$; $I_0 = 4\pi\varepsilon_0 m_0 c^3 / e$; $\tau = t/T$; r_i – огибающие; M_i – соответствующие коэффициенты формы. Если сгусток исходно монохроматичен и в каждом поперечном сечении удовлетворяет микроканоническому (K-V) распределению [3], то из (6) получается система уравнений для огибающих

$$\begin{gathered} \ddot{r}_x + Q_x r_x - \frac{3r_c^3}{r_y r_z} M_x - \frac{F_0^2}{r_x^3} = 0 \quad , \\ \ddot{r}_y + Q_y r_y - \frac{3r_c^3}{r_x r_z} M_y - \frac{F_0^2}{r_y^3} = 0 \quad , \\ \ddot{z}_m + Q_z z_m - \frac{3r_c^3}{r_x r_y} M_z \cdot sign(z_m) = 0 \quad , \quad r_z = |z_m| \quad , \end{gathered} \tag{7}$$

где z_m – координата частицы по z, максимально удаленной от центра. Строгое доказательство (7) следует из функции распределения фазовой плотности, приведенной позднее. В уравнениях (6), (7), (8) при $r_z \to 0, z_m \to 0$ не возникает неопределенности вследствие соответствующего поведения коэффициента формы эллипсоида. В приближении усреднения для полуосей сгустка

$$\begin{gathered} \ddot{a} + \mu_{0,r}^2 a - \frac{3r_c^3}{ac} M_a - \frac{F_0^2}{a^3} = 0 \quad , \\ \ddot{z}_m + \mu_{0,z}^2 z_m - \frac{3r_c^3}{a^2} M_c \cdot sign(z_m) = 0 \quad , \quad c = |z_m| \quad . \end{gathered} \tag{8}$$

Численный анализ решений (7), (8) показывает, что предсказанное в (5) явление бифуркации имеет место и в общем случае. Существенным различием здесь является то, что точка бифуркации по I в одномерном примере, превращается в область бифуркации. Это связано прежде всего с тем, что поперечный размер сгустка теперь является переменным.

Вопрос о 6-мерном фазовом распределении, требует отдельного рассмотрения. Здесь лишь кратко наметим путь получения подобного распределения без подробных (достаточно длинных) доказательств. Итак, эллипсоид канонический и уравнения движения разделены по степеням свободы. Тогда продольное движение допускает следующие интегралы:

$$C_1 = z\dot{z}_1 - \dot{z}z_1 \quad , \quad C_2 = z\dot{z}_2 - \dot{z}z_2 \quad , \tag{9}$$

где z_1 , z_2 – линейно независимые частные решения уравнения продольных колебаний. Например, можно выбрать начальные условия для них так:

$$z_1(0) = 0\,,\ \dot{z}_1(0) = 1\,,\ \ z_2(0) = -1\,,\ \dot{z}_2(0) = 0 \quad . \tag{10}$$

При таком выборе C_1 , C_2 имеют ясный физический смысл начальных условий $C_1 = z(0)$, $C_2 = \dot{z}(0)$. В случае неканонического эллипсоида возможно применение линейных интегралов более общего вида [4]. Если, как в нашем случае, начальные продольные скорости всех частиц равны нулю, то $C_2 = 0$ и монохроматическая функция распределения

$$f \sim \delta(C_2). \tag{11}$$

Интегралов (9) вполне достаточно для описания продольного движения, но для данной задачи ($C_2 = 0$) для краткости изложения можно ввести дополнительный интеграл

$$C_4 = \frac{z^2 + \dot{z}^2}{z_m{}^2 + \dot{z}_m{}^2}\,. \tag{12}$$

Действительно, $\dot{C}_4 \sim C_2$, а $C_2 = 0$, т.е. C_4 – интеграл движения; здесь использовано условие $z_m(\tau) = -z_m(0)z_2$. Интеграл C_4 обладает удобными для последующего интегрирования свойствами: на гиперплоскости $C_2 = 0$ (12) можно преобразовать к двум эквивалентным формам $C_4 = \dfrac{z^2}{z_m{}^2}$ и $C_4 = \dfrac{\dot{z}^2}{\dot{z}_m{}^2}$. Первое представление используется для эллипсоида, второе для вырожденного в диск эллипсоида.

Если в каждом поперечном сечении эллипсоида по z частицы распределены по $K - V$ распределению, то эмиттанс $F_0(z)$ в каждом сечении будет зависеть от z так $F_0(z) = F_0(1 - z^2 / z_m{}^2)$ или через интеграл движения

$$F_0(z) = F_0(1 - C_4)\,, \tag{13}$$

где F_0 – эмиттанс в центре сгустка. Уравнения поперечного движения (6) явно от z не зависят, тогда как и в случае чисто поперечного $K - V$ распределения можно ввести квадратичный интеграл движения [3]

$$F = A_x{}^2 + A_y{}^2\,. \tag{14}$$

Следует, однако, иметь в виду, что интеграл (14) лишь внешне похож на соответствующий ему интеграл из $K - V$, поскольку уравнения движения (6) для (14) описывают существенно трехмерную динамику, и влияние продольного движения на поперечное осуществляется параметрически через огибающую r_z . Приравнивая (13) и (14), получаем, что функция распределения должна быть пропорциональна $\delta(1 - F / F_0 - C_4)$. Окончательно 6-мерное самосогласованное распределение имеет следующий вид:

$$f = f_0\delta(C_2)\delta(1 - \frac{F}{F_0} - C_4) \quad . \tag{15}$$

Остается лишь прямым интегрированием проверить, что (15) приводит в проекции на конфигурационное пространство к равномерно заряженному эллипсоиду.

Литература

[1] Yu.A. Budanov, A.V. Zherebtsov. The Dynamics of the Longitudinal Beam Emittance in the RFQ. – In: Proceeding of the International Workshop, BDO, 1994, St.-Petersburg, p. 45-54.

[2] Р.З. Муратов. Потенциалы эллипсоида. - М.: Атомиздат, 1976.

[3] И.М. Капчинский. Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. - М.: Атомиздат, 1966.

[4] Ю.А. Буданов, В.И. Швецов. О решениях уравнения Власова для равномерно заряженного эллипсоидального сгустка. - Труды X Всесоюзного Совещания по ускор. зар. частиц, Дубна, 1987, т. 1, с. 446-447.