Об условии равнораспределения энергии в RFQ

Ю.А. Буданов
ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий, Протвино, Россия

В интенсивных пучках ионов возможно перераспределение энергии по степеням свободы за счет коллективных процессов. Особую роль в связи с этим играют состояния с равными по степеням свободы энергиями. Согласно гипотезе равнораспределения [1] при этих состояниях минимизированы приводящие к ухудшению качества пучка переходы энергии из одной степени свободы в другую.

Условия равнораспределения для линейных систем сформулированы в работе [1]. Однако для ускорителей характерна исходная нелинейность продольных колебаний. Особенно это существенно для RFQ, так как здесь сгусток занимает долгое время практически всю область устойчивости по продольному движению. Здесь будут сформулированы условия равнораспределения для RFQ и получены условия адиабатического изменения параметров RFQ, при которых сохраняется равенство энергий вдоль всего ускорителя.

Кратко напомним условия равнораспределения для линейных систем, которые понадобятся для сравнения с полученными результатами. Для гармонических колебаний по продольной z– и поперечной x–координатам и согласованного пучка (постоянные поперечные a и продольные b огибающие) нормализованные эмиттансы

$$\epsilon_t = \frac{\mu}{\lambda} a^2, \qquad \epsilon_l = \frac{\sigma}{\lambda} b^2, \tag{1}$$

здесь μ и σ — набеги фаз на периоде фокусировки; λ — длина волны. Максимальная энергия будет у частиц с максимальными амплитудами

$$W_t = \frac{1}{2}\mu^2 a^2, \qquad W_l = \frac{1}{2}\sigma^2 b^2. \tag{2}$$

Равенство энергий при учете (1), (2) приводит к следующим условиям равнораспределения:

$$\frac{\epsilon_t}{\epsilon_l} = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{a}{b}\ . \tag{3}$$

В начале RFQ продольный размер сгустка можно считать заданным $b = \beta\lambda/2$, и при выполнения (3) можно определить исходный радиус пучка:

$$a = \frac{\beta\lambda\sigma}{2\mu}. \tag{4}$$

Конечно, уравнение (4) не так просто, так как условие самосогласованности связывает входящие в (4) величины.

1. Равнораспределение при $\varphi_s = -\pi/2$

Как в линейном, так и в нелинейном случаях гамильтонианы зависят от вида функций распределения фазовой плотности. Для сгустков, в которых продольный размер существенно больше поперечного, можно указать функцию распределения по z [2], [3], приводящую к зависимости гамильтониана от кулоновского взаимодействия только через один параметр — частоту малых продольных колебаний σ :

$$f(H) = f_o \theta(H_o - H)\sqrt{H_o - H}. \tag{5}$$

Для линейных продольных колебаний (5) приводит к линейным колебаниям и с учетом пространственного заряда [2]. Для нелинейных продольных колебаний в RFQ [3] распределение (5) приводит к потенциальной функции:

$$W_l(z) = \frac{\sigma^2}{k^2}[1 + \frac{sin(kz - \varphi_s)}{sin\varphi_s} - kzctg\varphi_s], \quad k = 2\pi/\beta\lambda, \tag{6}$$

отличающейся от $W_l(z)$ при токе, равном нулю, заменой σ на σ_o.

Поскольку для минимизации роста эмиттанса большое значение имеет первоначальное соотношение между максимальными значениями энергии W_l и W_t, рассмотрим условия равнораспределения для $\varphi_s = -\pi/2$. В этом случае равенство энергий

$$\frac{\sigma^2}{k^2}(1 - cos(kb)) = \frac{1}{2}\mu^2 a^2. \tag{7}$$

В отличие от гармонических колебаний нелинейность сразу накладывает ограничения на область изменения a, b:

$$0 \le b \le b_{max}, \qquad b_{max} = \pi/k = \beta\lambda/2, \tag{8}$$

$$0 \le a \le a_{max}, \qquad a_{max} = \frac{2\sigma}{k\mu} = \frac{2\sigma}{\pi\mu} b_{max}.$$

Поскольку реально b принимает при рассматриваемой синхронной фазе максимальное значение, то значение радиуса пучка при инжекции

$$a = \frac{\beta\lambda\sigma}{\pi\mu}. \tag{9}$$

Сравнивая полученный результат (9) с аналогом при линейном подходе (4), можно убедиться, что имеется весьма существенное различие в $\pi/2$ раз. Величина a в линейном случае завышена, так как в этом случае потенциальная функция $W_l(z)$ растет квадратично даже на краях сгустка, и значение энергии продольных колебаний получается сильно преувеличенным.

Фазовая траектория при потенциальной функции (6)

$$\dot{z} = \frac{\sqrt{2}\sigma}{k}\sqrt{1 + coskz}\ .$$

Вычислив площадь, ограниченную этой кривой, найдем и нормализованный эмиттанс:

$$\epsilon_l = \frac{16}{\pi^3\lambda}\sigma b^2. \tag{10}$$

В силу нелинейности эмиттанс ϵ_l почти вдвое меньше (при той же амплитуде), чем в линейном случае.

Окончательно условия равнораспределения для $\varphi_s = -\pi/2$ можно привести к следующему виду:

$$\frac{\epsilon_t}{\epsilon_l} = \frac{\pi\sigma}{4\mu} = \frac{\pi^2 a}{8b}\ . \tag{11}$$

2. Равнораспределение и изменение параметров ускоряющего канала

Максимальная потенциальная энергия в продольном движении W_l достигается в седловой точке z_m потенциальной функции (6) $kz_m = 2\varphi_s$:

$$W_l = 2\frac{\sigma^2}{k^2}[1 - \varphi_s ctg\varphi_s]. \tag{12}$$

В (12) взято условие максимальной длины сгустка, естественно, по (6) можно вычислить W_l для любой длины, однако рассмотрение максимального значения W_l обеспечивает верхнюю оценку для перехода энергии из продольного в поперечное движение.

Итак, условие равнораспределения:

$$2\frac{\sigma^2}{k^2}[1 - \frac{\varphi_s}{tg\varphi_s}] = \frac{1}{2}\mu^2 a^2. \tag{13}$$

Если в самом начале ускорения это условие служит для оценки исходного поперечного размера a, то в дальнейшем уравнение (13) определяет такую связь параметров ускорителя, при которой все время выполняется равенство $W_l = W_t$ (либо более широкое условие $W_l \leq W_t$). Если a выбрано по исходному ограничению (9) $\mu^2 a^2 = 4\sigma_i^2/k_i^2$ (индекс i описывает начальные значения), то изменение параметров в связи с (13) должно быть таким:

$$\frac{k^2\sigma_i^2}{k_i^2\sigma^2} \geq [1 - \varphi_s ctg\varphi_s]. \tag{14}$$

Если используется режим ускорения с постоянной частотой малых продольных колебаний, то отсюда получается ограничение на изменение β.

Подставим теперь в (14) k, k_i, σ, σ_i и, учитывая, что в (14) стоит отношение частот, которые примерно одинаково зависят от тока, получаем:

$$\theta U sin\varphi_s \leq \theta_i U_i sin\varphi_i [1 - \varphi_s ctg\varphi_s]^{-1}, \tag{15}$$

здесь θ — эффективность ускорения (коэффициент пролетного времени); U — амплитуда напряжения на электродах. Если в начале ускорения синхронная фаза $\varphi_s = -\pi/2$ и $U = U_i$ (постоянное напряжение), то изменение θ вдоль ускорителя ограничено следующим образом:

$$\theta \leq \theta_i \frac{1}{\varphi_s cos\varphi_s - sin\varphi_s}\,. \tag{16}$$

Например, при ускорении до $\varphi_s = -\pi/6$ величина θ должна возрастать не более чем в 22 раза. При ускорении с постоянной синхронной фазой из (15) следует, что равнораспределение будет выполняться при невозрастающей амплитуде эквивалентной ускоряющей волны, естественно, при выполнении начальных условий равнораспределения.

Список литературы

1. R.A.Jameson. — Report of Los Alamos Nat. Lab., LA-UR-92-2474, 1992.
2. D.Neuffer. Partical Accelerators, 1980, v. 11, pp. 23-36.
3. Ю.А.Буданов. — Препринт ИФВЭ 85-104, Серпухов, 1985.