Общее волновое уравнение в электростатическом приближении

А.В. Агафонов
Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.

Рассмотрены равновесия сильноточных электронных пучков в продольном магнитном поле для случаев инжекции пучков с экранированного и иммерсионного катодов. Выведено общее волновое уравнение в электростатическом приближении, которое имеет компактный вид и применимо для самосогласованных равновесий (как для сплошных, так и для трубчатых пучков) при условии постоянства полной энергии частиц.

Введение

Одним из необходимых условий корректного исследования волновых процессов в интенсивных пучках является построение моделей равновесных состояний, допускающих аналитические решения, но отвечающих конкретным условиям экспериментов. Последнее замечание обусловлено тем, что часто решабельность модели затмевает ее соответствие физическим условиям. Не менее важным является вывод общего волнового уравнения для точных стационарных состояний, что позволяет сопоставлять между собой различные перекрестные члены, вопрос об учете которых часто также рассматривается, исходя из условия решабельности без сопоставления их относительного влияния.

1. Общий подход к описанию равновесий ламинарных пучков

В цилиндрических координатах r, θ, z, при условиях $\partial/\partial t = \partial/\partial z = \partial/\partial\theta = 0$, стационарные состояния пучков в продольном магнитном поле B_{z0} описываются следующими уравнениями:

$$\frac{\gamma v_\theta^2}{r} + E_r + v_\theta B_z - v_z B_\theta = 0; \frac{dB_z}{dr} = -4\pi\rho v_\theta; \frac{1}{r}\frac{d}{dr}rB_\theta = 4\pi\rho v_z; \frac{1}{r}\frac{d}{dr}rE_r = 4\pi\rho,$$

где $v_\theta = \omega_0 r, v_z$ — равновесные скорости; $\omega_0 \geq 0$ — угловая скорость вращения пучка как целого; ρ — плотность заряда; $B_z \leq 0$ — полное продольное магнитное поле; E_r, B_θ — собственные поля пучка; $\gamma = 1/\sqrt{1 - v_\theta^2 - v_z^2}$.

Система уравнений является неполной, и для ее замыкания необходимо задать, вообще говоря, произвольным образом две из шести входящих в нее функций или две связи, с помощью которых можно попытаться привязать рассматриваемую модель к условиям экспериментов. Для этой цели воспользуемся постановкой задачи, предложенной в [1], в которой описание в рамках гидродинамики с нулевой температурой скомбинировано с законами сохранения, которые используются при микроскопическом описании пучка с помощью уравнения Власова. Потребуем сохранения полной энергии частиц в сечении пучка

$$H = \gamma + \phi = const \tag{1}$$

(что соответствует их эмиссии с эквипотенциального катода) и сохранения обобщенного момента импульса:

$$P_\theta = r(p_\theta + A_\theta) = const \tag{2}$$

(что соответствует сохранению азимутальной симметрии потока), где $A_\theta = A_\theta(r)$ в источнике.

Три следующих варианта: 1) $P_\theta = 0$; 2) $P_\theta = \mathrm{const}$ и 3) $P_\theta = B_0 r^2/2$ позволяют описать три соответствующих случая эмиссии частиц: 1) источник, экранированный от магнитного поля; 2) формирование трубчатого пучка с поверхности катода, совпадающей с поверхностью постоянного магнитного потока; 3) источник, катод которого находится во внешнем продольном магнитном поле. Два физических соотношения (1, 2) позволяют замкнуть систему уравнений и записать ее в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
(r\gamma^2 v_z')' + \gamma\left(\frac{v_\theta P_\theta'}{v_z}\right)' &= 0, \\
(r\gamma^2 v_\theta')' - \frac{\gamma^2 v_\theta}{r} - r\gamma\left(\frac{P_\theta'}{r}\right)' &= 0,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где штрих означает d/dr. Для первых двух случаев с очевидностью следует

$$
r\gamma^2 v_z' = const. \tag{4}
$$

Для первого случая, соответствующего модели сплошного пучка, эмиттированого с экранированного катода, эта константа равна нулю (т.е. $v_z = \mathrm{const}$), как впрочем и для второго случая, соответствующего генерации пучка в бесфольговом диоде с магнитной изоляцией при условии отсутствия проводящих поверхностей и токов в области дрейфа. Общее решение уравнений в этих случаях получено в [2] и позже повторено в [1]. Приводить эти решения здесь не будем, заметим лишь, что во втором случае общее решение записано в виде эллиптических функций Якоби и может быть представлено в практически интересном случае тонкостенного трубчатого пучка в элементарных функциях [3].

Наконец, для пучка эмиттированного с плоского катода P_θ зависит от радиуса, поскольку A_θ меняется по радиусу эмиттирующей поверхности квадратично. Поскольку в данном подходе не рассматривается переходная область между диодом и участком транспортировки, остается только предположить, что пучок сжимается или расходится без пересечения траекторий, т.е. радиус r_c, на котором электрон находится в канале транспортировки, связан с радиусом r, с которого он был эмиттирован, соотношением $r = \alpha r_c$, где α — константа.

Получить аналитическое решение системы в этом случае не удается, но нетрудно показать, что невозможны состояния ни с $v_z = \mathrm{const}$, ни с $\omega_0 = \mathrm{const}$. Кроме того, приближенное решение показывает, что при эмиссии пучка в спадающее магнитное поле невозможно существование стационарных состояний, однородных в продольном направлении (по-видимому, пучок в спадающем магнитном поле должен быть пульсирующим). Природа возникающих пульсаций обусловлена раскруткой пучка на B_r–составляющей поля. При входе в спадающее (нарастающее) магнитное поле на быстрое циклотронное движение электрона, привязанное к силовой линии магнитного поля, накладывается дрейф под влиянием B_r-составляющей, который парамагнитен в спадающем (диамагнитен в нарастающем) поле. Поскольку в канале транспортировки пучок как целое ведет себя диамагнитным образом, участок спадающего поля действует рассогласующе, что и ведет к незатухающим пульсациям.

Следует отметить, что в данном анализе из рассмотрения выпадает переходная область, которая может существенным образом сказываться на волновых свойствах пучка. Кроме того, как показывают результаты численного моделирования [4], для формирования пучка с параметрами близкими к параметрам аналитических моделей, форма магнитного поля в переходной области должна быть достаточно сложной и прецизионной.

2. Общее волновое уравнение в электростатическом приближении

Весьма часто при исследовании электростатических неустойчивостей и медленных волн пользуются потенциальным приближением, считая, что возмущение магнитного поля $\vec{B} = \nabla \times \vec{E} \approx 0$ и $\vec{E} = -\nabla\phi = \{-\partial\phi/\partial r, im\phi/r, ikz\}$ (все возмущения $\propto exp(i\omega t - ikz - im\theta)$, ω – частота, k – продольное волновое число, m – число вариаций по азимуту).

Не будем делать никаких предположений и упрощений относительно стационарного состояния, т.е. не будем выбирать конкретную модель, которая в гидродинамическом случае определяется двумя свободными функциями радиуса. Потребуем выполнения лишь одного условия (1) сохранения полной энергии частиц. Выполняя стандартные процедуры линеаризации полной системы уравнений можно записать волновое уравнение в потенциальном приближении в следующем виде:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rL^2\left(1+\frac{\omega_p^2\gamma_0}{F_5-\gamma_0^2L^2}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \Phi\left\{\left(\frac{m^2}{r^2}+k^2\right)\left(L^2-\frac{\omega_p^2}{\gamma_0}\right)+\frac{\omega_p^2}{\gamma_0}\left(\frac{m}{r}v_\theta+kv_z\right)^2+\right.$$
$$\left.\frac{\omega_p^2}{\gamma_0}\frac{(\frac{m}{r}F_1+kF_2)^2}{F_5-\gamma_0^2L^2}-\frac{L}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial L}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\omega_p^2L(\frac{m}{r}F_1+kF_2)}{F_5-\gamma_0^2L^2}\right\}=0, \qquad (5)$$

где $\Phi = \phi/L, L = \omega - kv_z - mv_\theta/r$. Функции F_i описывают равновесное состояние и имеют вид

$$\begin{aligned} F_1 &= B_{z0}+(v_\theta\gamma_0)'+v_\theta\gamma_0/r = P_\theta'/r; \\ F_2 &= (v_z\gamma_0)'-B_{\theta 0} = -(P_\theta'/r)v_\theta/v_z; \\ F_3 &= F_1-\gamma_0(v_\theta'-v_\theta/r); \\ F_4 &= F_2-v_z'\gamma_0; \\ F_5 &= F_1F_3+F_2F_4 \end{aligned} \qquad (6)$$

и $v_\theta F_1 + v_z F_2 \equiv 0$. Уравнение (5) является общим для широкого класса равновесных состяний как сплошных, так и трубчатых пучков [5, 6].

С учетом второго закона сохранения (2) можно переопределить функции F_i через P_θ. Эти выражения приведены в правых частях выражений (6).

Уравнение (5) можно записать в простейшем виде при условии, что $P_\theta = \mathrm{const}$, которое соответствует $v_z = \mathrm{const}$ классу равновесий (сплошной пучок, эмиттированный с экранированного катода и трубчатый пучок, эмиттированный из бесфольгового диода с магнитной изоляцией). В этом случае

$$F_1 \equiv F_2 \equiv F_4 \equiv F_5 \equiv 0; F_3 = -\gamma_0(v_\theta' - \frac{v_\theta}{r})$$

и уравнение (5) приобретает следующий (очевидно несущественное упрощение уравнения посредством перехода в систему, где $v_z = 0$) вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\left(L^2-\frac{\omega_p^2}{\gamma_0}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad - \quad \Phi\left\{\left(\frac{m^2}{r^2}+k^2\right)\left(L^2-\frac{\omega_p^2}{\gamma_0}\right)+\right.$$

$$\frac{\omega_p^2}{\gamma_0}\left(\frac{m}{r}v_\theta + kv_z\right)^2 \quad - \quad \frac{L}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial L}{\partial r}\Big\} = 0. \tag{7}$$

При эмиссии пучка с иммерсионного катода, находящегося в магнитном поле B_0, получаем

$$F_1 = B_0; F_2 = -B_0\frac{v_\theta}{v_z}; F_5 = B_0[B_0(1+\frac{v_\theta^2}{v_z^2}) - \gamma_0\frac{v_z}{r}(\frac{rv_\theta}{v_z})'].$$

В этом случае аналитическое решение может быть найдено только в различных приближениях, например, в случае малого тока и большого внешнего магнитного поля. Однако, приближенное решение стационарных уравнений в первом порядке является "универсальным" в том смысле, что при этом теряется вся информация о специфических характеристиках равновесия и, например, равновесия с однородным распределением плотности заряда и с однородным распределением угловой скорости вращения пучка (так называемый "жесткий ротатор") становятся неотличимыми.

Заключение

Приведенное общее волновое уравнение наряду с общей постановкой задачи о равновесиях обеспечивает замкнутое описание стационарных и волновых свойств интенсивных пучков и позволяет оценить влияние различных перекрестных членов, которые обычно опускаются в приближенных решениях, особенно для резонансных случаев.

Литература

[1] Raiser M. Phys. Fluids, 1977, v. 20, p. 477.

[2] Агафонов А.В., Воронин В.С., Лебедев А.Н., Пазин К.Н. ЖТФ, 1974, т. 44, с. 1909.

[3] Агафонов А.В., Лебедев А.Н. ЖТФ, 1977, т. 47, с. 1729.

[4] Agafonov A.V. et al. Proc. 10th Intern. Conference on High Power Particle Beams. June 20–24, 1994, San Diego, USA. Vol. 2, p. 522.

[5] Agafonov A.V. Ibid. Vol. 2, p. 511.

[6] Agafonov A.V. Proc. of the 1995 Particle Accelerator Conference. May 1–5, 1995, Dallas, USA. Vol. 5, p. 3272.