Особенности магнитотормозного излучения в синхротронах

О.Е. Шишанин
Московский государственный индустриальный университет, Россия

При использовании синхротронного излучения в прецизионных физических экспериментах и прикладных задачах нужно знать более полно его отдельные характеристики. На практике было замечено [1], что в ускорителях и накопительных кольцах мало меняются только суммарная интенсивность и спектральные свойства излучения по сравнению со случаем однородного магнитного поля. Оказывается, на угловые свойства излучения существенное влияние оказывают также бетатронные колебания электронов [2-5]. В этой работе сделана попытка описать данный эффект в произвольной магнитной системе с помощью бета-функции.

Как известно [6], вертикальные бетатронные колебания заряженной частицы в ускорителях можно описать функцией

$$z = \sqrt{\frac{\beta_z A}{\pi}} \cos(\int \frac{ds}{\beta_z} + \delta_0), \qquad (1)$$

где A — эмиттанс; β_z — бетатронная функция, зависящая от длины орбиты S; δ_0 — начальная фаза. Пусть $\varphi = s/R_0$ будет обобщенным азимутом, а R_0 в магнитных системах с прямолинейными промежутками будет средним радиусом (длина орбиты, деленная на 2π). Тогда соответствующая составляющая скорости из (1) определится как

$$v_z = c\sqrt{\frac{A}{\pi\beta_z}} \sqrt{1 + (\frac{1}{2}\frac{d\beta_z}{ds})^2} \cos(\int \frac{ds}{\beta_z} + \delta_1 + \delta_0), \qquad (2)$$

где $\sin\delta_1 = 1/\sqrt{1 + (d\beta_z/ds)^2/4}$.

Поскольку радиальные колебания мало влияют на угловые распределения излучения, то можно считать, что частица движется по кругу с радиусом R_0 и можно допустить усреднение магнитного поля в поворотных магнитах на периоде. Таким образом, положение частицы будем определять радиус-вектором

$$\vec{r} = \{(R_0 + \rho)\cos\varphi,\ (R_0 + \rho)\sin\varphi,\ z\}.$$

Раскладывая поперечные составляющие магнитного поля в ряд Фурье, для угловой скорости найдем следующее выражение:

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_0}{1+k}[1 - \frac{\rho}{R_0} + \frac{3}{2}\frac{\rho^2}{R_0^2} + \frac{1}{R^2}\int (z\dot{z} - \rho\dot{\rho})n(\varphi)dt], \qquad (3)$$

где $\omega_0 = eH/mc$, k — отношение длин свободных пробегов частицы к длинам поворотных магнитов, $R_0 = (1+k)R$. Периодическая функция $n(\varphi)$ имеет определенный вид для конкретной магнитной структуры.

При изучении свойств синхротронного излучения будем следовать операторному методу [3]. Пусть вектор излучения $\vec{\kappa} = \omega\vec{n}/c$, где $\vec{n} = \{0, \sin\theta, \cos\theta\}$, а θ — сферический угол. Векторы линейной поляризации определим как

$$\vec{e}_\sigma = \{1, 0, 0\}, \;\; \vec{e}_\pi = \{0, \cos\theta, -\sin\theta\}.$$

Тогда компоненты интенсивности излучения в первом квантовом приближении можно записать в виде

$$\frac{dW_\sigma}{d^3\kappa} = W_1 \mid \int dt\, v_x \, \exp(i\frac{\nu'}{\nu}(\omega t - \vec{\kappa}\vec{r})) \mid^2,$$
$$\frac{dW_\pi}{d^3\kappa} = W_1 \mid \int dt(v_y \cos\theta - v_z \sin\theta) \exp(i\frac{\nu'}{\nu}(\omega t - \vec{\kappa}\vec{r})) \mid^2, \tag{4}$$

где

$$W_1 = \frac{ce^2}{(2\pi)^3 R_0}\frac{\nu'}{\nu}, \; \omega = \nu\frac{\omega_0}{1+k}, \; \nu' = \nu(1 + \frac{h\omega}{E}).$$

Отсчет угла φ можно начать с любой точки орбиты. Тогда малыми параметрами будут $\varphi \sim m_0c^2/E, \tau = N\varphi (N$ — число магнитных периодов), а также $\cos\theta (\theta \sim \pi/2), \rho/R_0, z/R_0$. С учетом этого в параметре

$$\omega t - \vec{\kappa}\vec{r} = \nu\frac{\omega_0}{1+k}[t - \frac{1}{c}(R_0 + \rho)\sin\varphi\, \sin\theta - \frac{z}{c}\cos\theta]$$

примем $\sin\varphi \approx \varphi - \varphi^3/6$, $\sin\theta \sim 1$.

Для нахождения φ в (3) надо выполнить интегрирование, в частности в нулевом приближении $\varphi = \omega_0 t/(1+k)$. Из равенства $v^2 = \dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$ найдем величину $R\omega_0/c$, а компоненты скорости определятся как $v_x \approx \dot{\rho} - c\varphi$, $v_y \approx c\beta$, $v_z = \dot{z}$.

Сделаем подстановку $\xi = -v_x/c = \varphi - \dot{\rho}/c$, а также проведем разложения типа

$$z = z|_{\tau=0} + \frac{dz}{d\tau}|_{\tau=0} \cdot \tau + ... \approx z_0 + R_0\frac{v_z}{c}\varphi.$$

В итоге, оставляя члены третьего порядка малости, получаем для $\omega t - \vec{\kappa}\vec{r}$ выражение

$$\nu\xi[1 - \beta\sin\theta + \frac{\xi^2}{6} - \frac{v_z}{c}\cos\theta + \frac{1}{2}(\frac{v_z}{c})^2] + const.$$

В ультрарелятивистском случае $1 - \beta\sin\theta \approx \varepsilon/2$, где $\varepsilon = 1 - \beta^2\sin^2\theta$.

Проводя в (4) интегрирование по новой переменной ξ, а также усреднение по начальным фазам, получим спектрально-угловые распределения в следующем виде:

$$\frac{dW_\sigma(\nu)}{d\Omega} = W_2 \int_0^{2\pi} d\delta\, \varepsilon_1^2 \; K_{2/3}^2(\frac{\nu'}{3}\,\varepsilon_1^{3/2}),$$
$$\frac{dW_\pi(\nu)}{d\Omega} = W_2 \int_0^{2\pi} d\delta\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2 \; K_{1/3}^2(\frac{\nu'}{3}\,\varepsilon_1^{3/2}), \tag{5}$$

где

$$W_2 = \frac{ce^2\nu\nu'}{12\pi^4 R_0^2}, \;\; \varepsilon_1 = 1 - \beta^2 + \varepsilon_2, \;\; \varepsilon_2 = (\cos\theta - \nu_v\, \cos\delta)^2,$$

$$\nu_v = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{\beta_z}} \sqrt{1 + (\frac{1}{2}\frac{d\beta_z}{ds})^2} \right]_{\tau=0} .$$

Если ввести угол ψ, который отсчитывается от плоскости орбиты, то тогда в (5) $\cos\theta$ можно заменить на ψ. Если в (5) провести суммирование по спектру, то угловые распределения выразятся через эллиптические интегралы и также будут зависеть от вертикального движения электрона.

Формулы (5) пригодны и для накопительных колец. При их практическом использовании нужно иметь в виду, что обычно график β_z-функции для всей орбиты известен. Тогда ее значение нужно взять для той точки, откуда снимается излучение, а производную приближенно можно заменить отношением $\triangle\beta_z/\triangle s$. Для поворотных магнитов график β_z-функции приблизительно линейный, поэтому здесь можно также использовать тангенс угла наклона этого участка прямой.

Алгоритм вычисления интегралов (5) описан, в частности, в [4]. В наиболее интересном случае (при малых амплитудах колебаний или при малых размерах пучка) можно провести разложение по параметру $q^2 = \nu_v^2/2\varepsilon$, где $\varepsilon \approx 1 - \beta^2\cos^2\theta = (1+\gamma^2\psi^2)/\gamma^2$. Тогда в классическом случае правые части выражений (5) можно заменить соответственно на

$$W_3\,[K_{2/3}^2 + q^2\varepsilon\psi^2\nu^2(K_{1/3}^2 + K_{2/3}^2) - q^2\sqrt{\varepsilon}\nu(1+2\psi^2/\varepsilon)K_{1/3}\,K_{2/3}],$$

$$W_3\,[(\psi^2+q^2)K_{1/3}^2 + q^2\varepsilon\psi^4\nu^2(K_{1/3}^2 + K_{2/3}^2) - 5q^2\sqrt{\varepsilon}\psi^2\nu K_{1/3}K_{2/3}], \tag{6}$$

где

$$W_3 = \frac{ce^2\nu^2\varepsilon^2}{6\pi^3R_0^2}, \;\; K_i = K_i(\nu\,\varepsilon^{3/2}/3).$$

Переход к известным формулам для однородного магнитного поля здесь осуществляется при $q^2 = 0$ (вертикальные колебания отсутствуют) и заменой R_0 на R.

Если в (6) сохранить $\cos\theta$ вместо ψ и провести интегрирование по сферическому углу, то полученные спектральные формулы в соответствии с [1] совпадут с выражениями для однородного магнитного поля.

Для оценки параметра ν_v рассмотрим, например, сильнофокусирующую систему FOFDOD. С помощью метода усреднения [5] можно найти решение для вертикальных колебаний с точностью до $1/N^3$ в виде

$$z = B\sqrt{1+2S_1}\cos(\nu_z\tau/N + \delta_0 + \delta_2), \tag{7}$$

где B — амплитуда основного синусоидального движения, $\sin\delta_2 = \nu_z S_2$,

$$S_1 = \frac{8n(1+k)^2}{\pi N^2}\sum_{i=0}^{\infty} g_i \sin(2i+1)\tau, \;\; S_2 = \frac{16n(1+k)^2}{\pi N^3}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{g_i}{2i+1}\cos(2i+1)\tau,$$

$$g_i = \frac{1}{(2i+1)^3}\sin^2\frac{(2i+1)\pi a}{2(2a+l)}, \;\; \nu_z = \frac{\pi n}{2\sqrt{3}N}\sqrt{1+k}, \;\; k = \frac{l}{2a},$$

a и l — длины поворотных магнитов и прямолинейных промежутков.

Сравнивая (1) и (7), приходим к выводу, что $\beta_z A/\pi = B^2(1+2S_1)$ или $\bar{\beta}_z A/\pi = B^2$. С учетом того, что $\bar{\beta}_z = R_0/\nu_z$, константа $B = \sqrt{AR_0/\pi\nu_z}$. С другой стороны, так как β_z принимает максимальное значение при $\tau = \pi/2$, то для формфактора $F = \beta_{zmax}/\bar{\beta}_z$ находим величину $1 + \pi^2 n/4N^2$, которая совпадает с (8.27) в [6].

Таким образом, $\beta_z = R_0(1+2S_1)/\nu_z$ и с помощью (2) параметр ν_v, входящий в (5), определится через известные величины как $\sqrt{A\nu_z/\pi R_0}\sqrt{4+3k}$. Это также позволяет исследовать угловые свойства излучения.

Графики, построенные по формулам (5), показывают, что максимумы обеих компонент будут ниже кривых для однородного магнитного поля (для тех же энергий E и радиуса R). Излучение в плоскости орбиты уже не будет полностью линейно поляризованным. У π-компоненты при $\theta = \pi/2$ появляется максимум вместо минимума; не исключено также, что при экстремальных амплитудах у σ-компоненты в орбитальной плоскости будет незначительный минимум, а у π-компоненты дополнительно появятся симметричные локальные впадины.

Таким образом, наряду с теоретическими исследованиями данного эффекта представляется целесообразным проведение более точных опытов, чем раньше, на современных ускорителях.

Поскольку излучение в основном некогерентно, то полученные результаты будут хорошо описывать свойства излучения, генерируемого и пучком электронов.

Литература

1. Кулипанов Г.Н., Скринский А.Н.// УФН.1977, т.122, с.369-418.

2. Sokolov A.A., Ternov I.M. Synchrotron Radiation. Berlin, Akademie-Verlag, 1968, 202 p.

3. Жуковский В.Ч., Шишанин О.Е.// ЖЭТФ.1971, т.61, с.1371-1378.

4. Шишанин О.Е.// ЖЭТФ. 1993, т.103, с.1117-1126.

5. Шишанин О.Е.// ТМФ. 1996, т.106, с.285-299.

6. Брук Г. Циклические ускорители заряженных частиц. – М.: Атомиздат, 1970, 311 с.