Исследование спиновых резонансов в ускорителе с Сибирскими змейками

В.И.Птицын и Ю.М.Шатунов
Институт ядерной физики, Новосибирск, Россия

1. Случай двух змеек

Рассмотрим случай уединенного резонанса, когда можно считать, что возмущение движения спина частицы в ускорителе с вертикальным ведущим полем определяется главным образом одной гармоникой: $w_n = |w_n|^{i\phi_n} e^{i\nu_n\theta} \cdot \nu_n = n \pm \nu_z$ — для резонансов, обусловленных вертикальным бетатронным движением, $\nu_n = n$ — для резонансов, обусловленных искажениями вертикальной орбиты.

В случае двух змеек для того, чтобы держать спиновую частоту равной 1/2 и независимой от энергии пучка, змейки должны быть размещены в противоположных точках азимута ускорителя, а направления оси вращения спина в змейках (мы будем называть их также осями змеек) $\alpha_1,\ \alpha_2$ должны удовлетворять соотношению $\alpha_2 - \alpha_1 = \pm\pi/2$.

При анализе воздействия возмущения на движение спина удобно работать в системе координат, которая вращается с частотой $\nu_o = \gamma\alpha$ вокруг вертикальной оси в ведущих дипольных магнитах и поворачивается на угол π вокруг оси змейки в змейках. При отсутствии возмущения направление спина остается постоянным в такой вращающейся системе.

Преобразовывая возмущение w_n во вращающуюся систему и разлагая затем его в ряд Фурье, приходим к сумме линейных гармоник:

$$\tilde{w}_n = -e^{i(\alpha_1 - \nu_o\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} \sum_k i^k \tilde{w}_{nk} sin(\Delta_k\theta + \phi_n - \alpha_1),\ \text{где}\ \tilde{w}_{nk} = |w_n| \frac{sin(\chi_k\pi/2)}{\chi_k\pi/2}, \tag{1}$$

$\Delta_k = \nu_n - (k + 1/2)$ и $\chi_k = \nu_o - (k + 1/2)$.

Некоторые заключения могут быть сделаны из этой формулы:

1. Направления осей колебаний линейных гармоник не зависят от фазы гармоники возмущения так же, как и от ν_n.

2. Все гармоники $\tilde{w}_{nk}$ с нечетным (четным) номером k имеют ту же самую ось колебаний, которая ортогональна оси колебаний для гармоник с четным (нечетным) k.

3. При пересечении резонанса во время ускорения расстройка Δ_k остается постоянной, в то время как $\tilde{w}_{nk}$ изменяется сложным путем, достигая максимальной величины при $\nu_o = k + 1/2$.

4. Наиболее сильное влияние на спин оказывают гармоники с номерами, близкими к $k_o = [\nu_n]$ (целой части ν_n).

Рассматривая движение спина в сферических координатах ρ и ϕ:

$$S_x = sin\rho cos\phi, \quad S_y = sin\rho sin\phi, \quad S_z = cos\rho, \tag{2}$$

введем комплексную переменную $\Psi = \rho exp(i\phi)$. В первом приближении по отклонению спина от вертикального направления имеем для Ψ следующее уравнение: $\Psi' = -i\tilde{w}_n$.

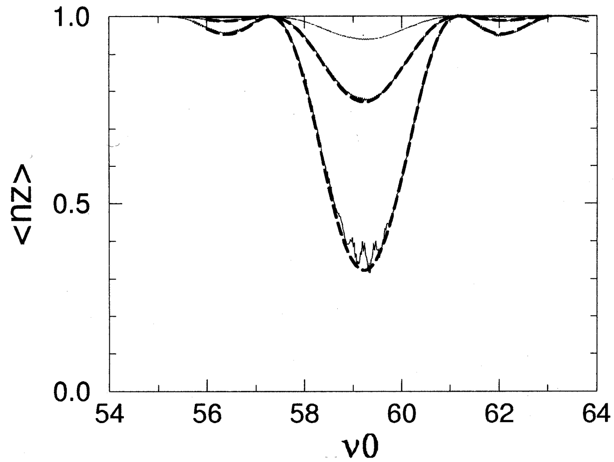

Рис. 1: Поляризация, наблюдаемая при азимуте $\theta = 0$ (сразу после змейки) при пересечении резонансов с величиной $|w_n|$=0,12; 0,25; 0,5. Пунктирные линии соответствуют аналитическим результатам. ν_n=59,23.

Решение этого уравнения, соответствующее периодическому спиновому решению $\mathbf{n}$, есть

$$\Psi = \frac{|w_n|}{sin(\Delta\pi)} e^{i\tilde{\alpha}} \frac{1}{\delta} (B_1(\theta) e^{i\Phi} + B_2(\theta) e^{-i\Phi}), \tag{3}$$

где $\Phi = \Delta\theta + \phi_n - \alpha_1$, $\delta = \nu_o - \nu_n$, $\tilde{\alpha} = \alpha_1 - \nu_o \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ и $\Delta = \Delta_{k_o}$. $B_{1,2}$ представляют собой периодические функции азимута ускорителя θ.

Выбирая точку наблюдения сразу после змейки (при $\theta = 0$), получаем

$$\Psi = \frac{\pi |w_n|}{sin(\Delta\pi)} e^{i(\tilde{\alpha} - \Delta\frac{\pi}{2})} \frac{sin(\delta\frac{\pi}{2})}{\delta\frac{\pi}{2}} cos\Phi. \tag{4}$$

Максимальное отклонение величины ρ от нулевого значения

$$|\rho|_{max} = \frac{\pi |w_n|}{sin(\Delta\pi)} \frac{sin(\delta\frac{\pi}{2})}{\delta\frac{\pi}{2}} \tag{5}$$

может быть названо глубиной резонанса, так как оно описывает максимальное отклонение спина от вертикального направления. Глубина резонанса возрастает, когда дробная часть резонансной частоты ν_n близка к $1/2$, что соответствует спиновому резонансу первого порядка. При некоторых значениях энергии, когда $\delta = m$, где m — четное и не равное нулю целое число, глубина резонанса равна нулю (так называемые узловые точки). Идя дальше приближения первого порядка, точная позиция узловых точек дается использованием $\lambda = \sqrt{\delta^2 + |w_n|^2}$ вместо δ [1].

Используя λ вместо δ и усредняя по бетатронной фазе (фазе гармоники ϕ_n), приходим к выражению для наблюдаемой вертикальной поляризации при $\theta = 0$:

$$< n_z > = < cos\rho > = J_o\Big(\frac{\pi |w_n|}{sin(\Delta\pi)} \frac{sin(\lambda\frac{\pi}{2})}{\lambda\frac{\pi}{2}}\Big). \tag{6}$$

Этот аналитический результат сравнивался с результатами, полученными численным путем с использованием программы SPINK [2] на примерной ФОДО структуре. Анализ показал хорошее согласие аналитических и численных результатов даже при достаточно большой величине силы резонанса ($|w_n| = 0,5$) при условии, что вертикальная бетатронная частота находится достаточно далеко от значений, соответствующих резонансам высокого порядка (змеечным резонансам). На рис.1 приведены результаты для наблюдаемой поляризации в зависимости от ν_o при разных силах резонанса.

При наблюдении движения спина на половине пути между змейками (при $\theta = \pi/2$) можно получить из (3) (снова используя λ вместо δ:)

$$\rho = \frac{2|w|sin(\lambda\frac{\pi}{4})}{sin(\Delta\pi)\lambda}\sqrt{cos^2(\lambda\frac{\pi}{4}) + cos^2(\lambda\frac{\pi}{4}+\Delta\pi) + 2cos(\lambda\frac{\pi}{4})cos(\lambda\frac{\pi}{4}+\Delta\pi)cos(2\Phi)}. \quad (7)$$

Из этой формулы очевидно более редкое расположение узловых точек, чем в предыдущем случае, и несимметричная зависимость поляризации от энергии. Рис. 2 демонстрирует снова поведение $< cos\rho >$ при пересечении резонанса.

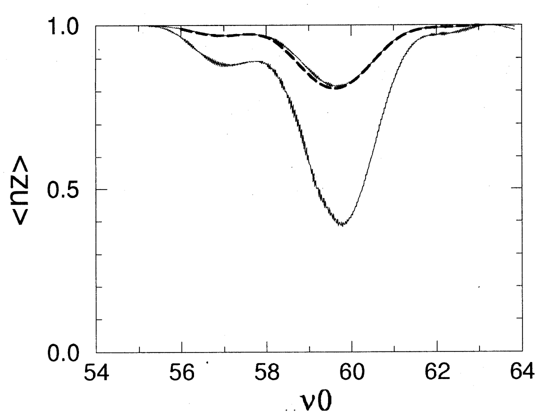

Рис. 2: Поляризация, наблюдаемая при азимуте $\theta = \pi/2$ (на половине пути между змейками) при пересечении резонансов с величиной $|w_n|$=0,25; 0,5. Пунктирная линия соответствует аналитическому результату $|w_n|$=59,23.

2. Случай четырех змеек

При достаточно большой величине возмущения применение более чем 2 змеек может требоваться для сохранения поляризации. Рассмотрим случай четырех змеек, размещенных в ускорителе при $\theta = 0$; $\pi/2$; и $3\pi/2$. Чтобы держать спиновую частоту равной $1/2$, оси змеек должны удовлетворять соотношению $\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_4 = \pm\frac{\pi}{2}$. Преобразуя снова резонансную гармонику w_n во вращающуюся систему координат, находим

$$\tilde{w}_n = \frac{1}{2}\sum_k \tilde{w}_{nk}e^{i\beta_k}(C_{1k}e^{i(\Delta_k\theta+\tilde{w}_o)} + C_{2k}e^{-i(\Delta_k\theta+\tilde{w}_o)}), \text{ где } \tilde{w}_{nk} = |w_n|\frac{sin(\chi_k\pi/4)}{\chi_k\pi/4}, \quad (8)$$

$C_{1k} = cos(\alpha_2 - \alpha_1 - (k+1/2)\pi/2)$, $C_{2k} = cos(\alpha_3 - \alpha_2 - (k+1/2)\pi/2)$. β_k и $\tilde{\omega}_o$ — некоторые константы.

Какая конфигурация осей змеек является оптимальной? Предполагая дробную часть резонансной частоты ν_n в диапазоне [0,1; 0,9], для того чтобы эффективно уменьшить глубину резонанса, нужно занулить гармонику с номером k_o. Из условий $C_{1k_o} = 0$ и $C_{2k_o} = 0$ находим следующие соотношения между осями змеек: $\alpha_3 - \alpha_1 = \pi/2$ и $\alpha_4 - \alpha_2 = \pi/2$ для любых k_o; $\alpha_2 - \alpha_1 = -\pi/4$ (для четных k_o) или $\alpha_2 - \alpha - 1 = \pi/4$ (для нечетных k_o). Таким образом, существует различие в оптимальных конфигурациях, необходимых для подавления резонансов с четной и нечетной целой частью резонансной частоты. Более того, наиболее эффективная конфигурация для нечетных (четных) резонансов является наиболее неэффективной для четных (нечетных) резонансов. Однако из (8) можно найти компромиссный вариант — конфигурацию, которая уменьшает глубину четных и нечетных резонансов в равной степени: $\alpha_1 = \alpha_3$, $\alpha_2 = \alpha_4$ и $\alpha_1 - \alpha_2 = \pi/4$. Рис. 3 демонстрирует пересечение резонанса для наиболее эффективного, наиболее неэффективного и компромиссного вариантов конфигураций осей змеек.

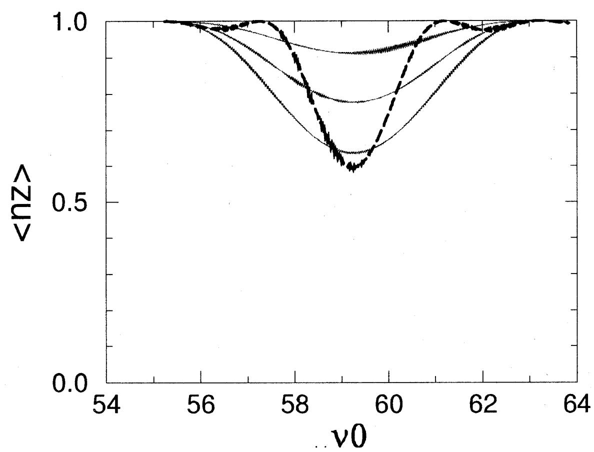

Рис. 3: Пересечение резонанса при различных конфигурациях осей змеек. Пунктирная линия соответствует применению двух змеек. ν_n=59,23.

Список литературы

[1] S.Y.Lee. 11th International Symposium on High Energy Spin Physics, Bloomington in 1994, ISBN 1-56396-374-4, AIP Conference Proceedings **343** (1995) 719.

[2] A.Luccio. “Numerical Spin Tracking in a Synchrotron Computer Code SPINK”, BNL-52481, September 1995.