Расчет порогов неустойчивости пучка с неодинаковыми сгустками в синхротроне

С.В. Иванов, М.Ю. Поздеев
ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий, Протвино, Россия

Введение. Рассмотрим два пучка, имеющих разную азимутальную структуру. Первый, именуемый далее *симметричным*, есть периодическая последовательность из M одинаковых равноудаленных сгустков, заполняющих всю орбиту. Второй *несимметричный* пучок, является подмножеством первого и отличается от него интенсивностью отдельных сгустков вплоть до полного отсутствия некоторых из них. Достаточно давно поднят вопрос о соотношении между критериями асимптотической (при $t \to \infty$) устойчивости таких пучков.

Чисто алгебраический подход к этой проблеме (пучок с пропущенными сгустками) предложен в [1], где инкремент неустойчивости и когерентный сдвиг частоты находятся как комплексные собственные значения (с.з.) матрицы взаимодействия между сгустками. В [2] рассматривается более общий вид несимметричного пучка с неодинаковой интенсивностью отдельных сгустков (пустой сгусток равен сгустку с нулевой интенсивностью). В ней также уточнена оценка области локализации с.з. несимметричного пучка: от прямоугольной в [1] к выпуклой оболочке[1] с.з. симметричного пучка в [2]. Основной качественный вывод из работ [1, 2] — *устойчивость симметричного пучка заведомо гарантирует устойчивость (производного из него) несимметричного пучка.*

К сожалению, далее будет показано, что это утверждение справедливо только для упрощенной динамической модели, в которой взаимодействие сгустков описывается матрицей $M \times M$. Учет широкополосности импеданса связи и(или) поперечной хроматичности требует введения 3-мерных массивов $M \times M \times N$ с $N \neq 1$. Поэтому область локализации с.з. несимметричного пучка может оказаться шире, чем в симметричном случае. Это говорит о возможности ухудшения ситуации с устойчивостью при переходе к несимметричному пучку.

1. Основная система уравнений. Пусть $\vartheta = \Theta - \omega_s t$ — азимут в сопровождающей системе, Θ — обобщенный азимут, ω_s — угловая скорость равновесной частицы, t — время. Пронумеруем сгустки в порядке следования $j = 0, 1, \ldots, M-1$ и обозначим $\vartheta_j = -2\pi j/M$ координаты их центров. Пусть J_{0b}, $J_{0b}^{(j)}$ — средний по орбите ток сгустка в симметричном и несимметричном пучках соответственно. Введем веса $\nu_j = J_{0b}^{(j)}/J_{0b} \leq 1$; $\nu_j = 0$ означает пропущенный j-ый сгусток. Пусть $x^{(j)}(\vartheta, t)$ — переменная, описывающая когерентное движение сгустка (плотность продольного тока или поперечного электрического дипольного момента). Представим ее в виде

$$x^{(j)}(\vartheta, t) = (2\pi)^{-1} \Sigma_k \int d\Omega \, x_k^{(j)}(\Omega) \, \exp\left(ik(\vartheta - \vartheta_j) - i\Omega t\right), \tag{1}$$

где Ω есть частота преобразования Фурье по t в сопровождающей системе. В лабораторной системе ей соответствует $\omega = k\omega_s + \Omega$. Гармоники $x_k^{(j)}(\Omega)$ вычисляются в

[1] Выпуклая оболочка $\mathrm{Co}(a_i)$ элементов a_i есть множество возможных значений линейной комбинации $\Sigma_i c_i a_i$, где $c_i = c_i^*$, $c_i \geq 0$ и $\Sigma_i c_i = 1$.

системе координат центра сгустка $\vartheta - \vartheta_j$. Набор величин x_k может быть записан в виде вектора столбца $\vec{x} = (\ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots)^T$ из линейного комплексного векторного пространства C_N. Здесь рассматривается конечная размерность N. Однако если соответствующие пределы существуют, возможен переход $N \to \infty$.

Проблему устойчивости несимметричного пучка можно сформулировать как задачу на с.з. линейного оператора, действующего в расширенном векторном пространстве $C_{N \cdot M} = \oplus \Sigma_j C_N^{(j)}$, где $C_N^{(j)} \ni \vec{x}^{(j)}$,

$$\lambda\, x_k^{(j)} = M^{-1} \Sigma_{k',j'} \nu_j P_{kk'}(\Omega) \exp\left(ik'(\vartheta_j - \vartheta_{j'})\right) x_{k'}^{(j')}. \tag{2}$$

Матрица $P_{kk'}(\Omega)$ оператора $\widehat{P}(\Omega)$, действующего в C_N, имеет вид (для продольного (L) или поперечного (T) движения соответственно)

$$P_{kk'}(\Omega) = Y_{kk'}^{(L)}(\Omega)\, Z_{k'}^{(L)}(k'\omega_s + \Omega)/k', \qquad P_{kk'}(\Omega) = Y_{kk'}^{(T)}(\Omega)\, Z_{k'}^{(T)}(k'\omega_s + \Omega). \tag{3}$$

Импедансы связи $Z_k^{(L)}(\omega)/k$ и $Z_k^{(T)}(\omega)$ обладают сходными свойствами симметрии относительно $\omega, k = 0$. Передаточные функции пучка $Y_{kk'}^{(L,T)} \propto J_{0b}$ включают эффект затухания Ландау, разложение по системе мультипольных мод (L) или дипольных мод ‘голова-хвост’ (T) и т.д. Их вид хорошо известен и здесь не приводится.

Функции от j представляем с помощью дискретного преобразования Фурье (ДПФ):

$$\vec{x}^{(n)} = M^{-1} \Sigma_j \vec{x}^{(j)} \exp\left(2\pi i n j/M\right), \qquad \vec{x}^{(j)} = \Sigma_n \vec{x}^{(n)} \exp\left(-2\pi i n j/M\right), \tag{4}$$

где $n = 0, 1, \ldots, M-1$ есть волновое число ДПФ. Применив ДПФ к (2), получим

$$\lambda\, \vec{x}^{(n)} = \Sigma_{n'} \Delta_{nn'}\, \widehat{P}(\Omega) \widehat{I}_{n'}\, \vec{x}^{(n')}, \qquad \Delta_{nn'} = M^{-1} \Sigma_j \nu_j \exp\left(2\pi i (n - n') j/M\right), \tag{5}$$

где $\Delta_{nn'}$ — интерференционный фактор, $\widehat{I}_n$ — оператор проектирования из C_N в $C_{N/M}$ с элементами $\delta_{kk'} \Sigma_l \delta_{k,n+Ml}$ в матричном представлении, δ_{ij} — символ Кронекера.

Из системы (5) видно, что при развитии неустойчивостей в несимметричном пучке с $\nu_j \neq \mathrm{const}$ перемешиваются все гармоники ДПФ. Характеристическое уравнение неустойчивости и достаточное условие устойчивости пучка имеют вид

$$\lambda_p(\Omega) = 1, \qquad \max_{p,\Omega_1} |\lambda_p(\Omega = \Omega_1 + i0)| \leq 1, \tag{6}$$

где p — обобщенный индекс собственной моды. Собственные частоты Ω_p являются корнями первого из уравнений (6). Неустойчивость имеет место если $\mathrm{Im}\Omega_p > 0$.

2. Симметричный пучок. Его собственные значения (с.з.) и собственные векторы (с.в.) отмечаем символом “$\bullet$” и индексом ℓ. Теперь $\nu_j = 1$ и $\Delta_{nn'} = \delta_{nn'}$, поэтому (5) распадается на M независимых задач

$$\lambda_\bullet\, \vec{x}_\bullet^{(n)} = \widehat{P}(\Omega) \widehat{I}_n\, \vec{x}_\bullet^{(n)}, \qquad n = 0, 1, \ldots, M-1. \tag{7}$$

Идеальная периодичность пучка приводит к расцеплению гармоник ДПФ. Каждая из них соответствует (изолированной) моде связанных колебаний сгустков. Отсюда естественно определяется первая компонента обобщенного индекса мод колебаний симметричного пучка $\ell = (n, m)$, где m — обобщенный индекс внутрисгустковой моды. Пространственная структура моды ℓ достаточно проста:

$$\vec{x}_{\bullet\ell}^{(n')} = \vec{x}_{\bullet\ell}^{(n)}\, \delta_{nn'}, \qquad \vec{x}_{\bullet\ell}^{(j)} = \vec{x}_{\bullet\ell}^{(n)} \exp\left(-2\pi i n j/M\right). \tag{8}$$

Это обычные колебания пучка с фазовым сдвигом $2\pi n/M$ между соседними сгустками. Такие моды взаимноортогональны (нормальны), если их рассматривать как векторы из расширенного пространства $\mathrm{C}_{N\cdot M}$ со скалярным произведением

$$\langle \breve{a}, \breve{b} \rangle = M^{-1} \Sigma_{k,j} w_k \, a_k^{(j)} \, b_k^{(j)*}, \qquad \breve{a}, \breve{b} \in \mathrm{C}_{N\cdot M} \tag{9}$$

с вещественным весом $w_k > 0$. Вектор $\vec{x} \in \mathrm{C}_N$ является проекцией $\breve{x} \in \mathrm{C}_{N\cdot M}$.

Для $M > 1$ задача (7) вырождена: лишь каждое M-тое ее с.з. $\lambda_{\bullet\ell} \not\equiv 0$. Эти нетривиальные с.з. можно получить, спроецировав (7) в подпространство $\vec{x}' = \widehat{I}_n \vec{x} \in \mathrm{C}_{N/M}$,

$$\lambda_\bullet \, \vec{x}_\bullet'^{(n)} = \widehat{I}_n \widehat{P}(\Omega) \; \vec{x}_\bullet'^{(n)}. \tag{10}$$

Обычно это задача относительно невысокой размерности, и ее несложно решить численно. Затем с помощью (7) легко восстанавливаются оставшиеся компоненты с.в. $\vec{x}_{\bullet\ell}^{(n)} \in \mathrm{C}_N$, описывающего наблюдаемые моды колебаний отдельного сгустка. Формально эти с.в. принадлежат образу $\mathbf{im}\widehat{P}\widehat{I}_n$ оператора $\widehat{P}\widehat{I}_n$.

Напротив, векторы из ядра $\mathbf{ker}\widehat{P}\widehat{I}_n$ с $\lambda_{\bullet\ell} \equiv 0$ описывают вырожденное, ненаблюдаемое движение. Из (7) видно, что $\mathbf{ker}\widehat{P}\widehat{I}_n$ суть множество $\vec{x}$: $\widehat{I}_n \vec{x} = \vec{0}$. Поэтому с.в. вырожденного движения могут быть построены, скажем, как естественный ортогональный набор из $\vec{x}_{\bullet\ell}^{(n)} = (\ldots, 0, 1, 0, \ldots)^T$ с единственной нетривиальной компонентой — единицей, стоящей поочередно во всех строках кроме $(n + Ml)$-тых, где l — целое.

Таким образом, легко построить полный набор с.з. и с.в. задачи (7). Для $\forall n$, линейная оболочка $\vec{x}_{\bullet\ell}^{(n)}$ порождает все C_N. Поэтому $\vec{x}_{\bullet\ell}^{(n)}$ образуют координатный базис в C_N. Его (эрмитовая положительно определенная) матрица Грама имеет вид

$$G_{mm'}^{(n)} = \left(\vec{x}_{\bullet(n,m)}^{(n)}, \vec{x}_{\bullet(n,m')}^{(n)} \right), \tag{11}$$

где $(\ldots)$ есть скалярное произведение, согласованное с определением (9),

$$\left(\vec{a}, \vec{b} \right) = \Sigma_k w_k \, a_k b_k^*, \qquad \vec{a}, \vec{b} \in \mathrm{C}_N. \tag{12}$$

Оператор $\widehat{P}\widehat{I}_n$ не является нормальным, поэтому базис из $\vec{x}_{\bullet\ell}^{(n)}$ не ортогонален, а матрица $G_{mm'}^{(n)}$ не диагональна.

Симметричный пучок подробно исследуется в обычной теории неустойчивостей. Естественно возникает желание использовать (предполагаемый известным заранее) спектр $\lambda_{\bullet\ell}$ и $G_{mm'}^{(n)}$ для локализации спектра λ_p несимметричного пучка, так чтобы исследовать его устойчивость с помощью второго из уравнений (6).

3. Несимметричный пучок. Умножим обе части (2) на $M^{-1} w_k x_k^{(j)*}/\nu_j$ и просуммируем по k, j. Перепишем полученное выражение, формально выделяя частное Релея-Ритца $\mathcal{R}$ для линейного оператора $Q_{kk'}^{(jj')} = M^{-1} P_{kk'} \exp\left(ik'(\vartheta_j - \vartheta_{j'})\right)$ в $\mathrm{C}_{N\cdot M}$,

$$\lambda_p = \xi \mathcal{R}, \quad \xi = \left(\Sigma_{k,j} w_k |x_k^{(j)}|^2 \right) / \left(\Sigma_{k,j} w_k |x_k^{(j)}|^2 / \nu_j \right), \quad \mathcal{R} = \langle \widehat{Q}\breve{x}, \breve{x} \rangle / \langle \breve{x}, \breve{x} \rangle. \tag{13}$$

Поскольку $|x_k^{(j)}| \propto \nu_j$ и $\nu_j \geq 0$, то $\xi \in \mathrm{Co}(\nu_j)$. Отсюда сразу следует оценка

$$\min_j \nu_j \leq \xi \leq \max_j \nu_j = 1. \tag{14}$$

Далее, подставим $\vartheta_j = -2\pi j/M$ и ДПФ (4) в $\widehat{Q}$ так, чтобы получить выражения

$$\langle \widehat{Q}\breve{x}, \breve{x} \rangle = \Sigma_n \left(\widehat{P}\widehat{I}_n \, \vec{x}^{(n)}, \vec{x}^{(n)} \right), \qquad \langle \breve{x}, \breve{x} \rangle = \Sigma_n \left(\vec{x}^{(n)}, \vec{x}^{(n)} \right) > 0. \tag{15}$$

Второе из них —- равенство Парсеваля, следующее из ортогональности мод n в $\mathrm{C}_{N\cdot M}$.

Для $\forall n$ с.в. $\vec{x}^{(n)}_{\bullet\ell}$ оператора $\widehat{P}\widehat{I}_n$ образуют полный счетный косоугольный базис в C_N. Используем его для координатного представления мод несимметричного пучка,

$$\vec{x}^{(n)}_p = \Sigma_m c_\ell \, \vec{x}^{(n)}_{\bullet\ell}. \tag{16}$$

Подставив это разложение в (15), получим

$$\langle \widehat{Q}\breve{x}, \breve{x}\rangle = \Sigma_{n,m,m'} \lambda_{\bullet\ell} \, c_\ell \, G^{(n)}_{mm'} \, c^*_{\ell'}, \quad \langle \breve{x}, \breve{x}\rangle = \Sigma_{n,m,m'} c_\ell \, G^{(n)}_{mm'} \, c^*_{\ell'} > 0, \quad \ell' = (n, m'). \tag{17}$$

Заранее координаты c_ℓ мод несимметричного пучка неизвестны. Пока позволим c_ℓ быть произвольными комплексными числами и изучим так называемое поле значений оператора $\widehat{Q}$ — множество $\overline{\mathcal{R}}$ возможных значений частного Релея-Ритца $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} = \Sigma_{n,m} a_\ell \lambda_{\bullet\ell}, \quad a_\ell = \left(c_\ell \Sigma_{m'} G^{(n)}_{mm'} c^*_{\ell'} \right) / \left(\Sigma_{n,m,m'} c_\ell G^{(n)}_{mm'} c^*_{\ell'} \right), \quad \Sigma_{n,m} a_\ell = 1. \tag{18}$$

Тогда первое из (13) и (14) приводят к ‘верхней’ оценке области локализации спектра $\lambda_p \in \overline{\mathcal{R}} \subset \mathrm{C}_1$. Из линейной алгебры известно: $\overline{\mathcal{R}}$ замкнуто и ограничено, $\forall \lambda_{\bullet\ell} \in \overline{\mathcal{R}}$ и $\overline{\mathcal{R}}$ выпукло (содержит 2 любые свои точки вместе с соединяющим их отрезком прямой).

Диагональность $G^{(n)}_{mm'}$ означала бы $a_\ell = a^*_\ell$, $0 \le a_\ell \le 1$ и $\overline{\mathcal{R}} = \mathrm{Co}\,(\lambda_{\bullet\ell})$. Отсюда следовало бы утверждение, выделенное курсивом во введении. В общем же случае $G^{(n)}_{mm'} \neq \delta_{mm'}$. Только в *одномодовой модели*, когда когерентное движение заранее ограничено m_1-ой степенью свободы ($\lambda_{\bullet\ell} = \lambda_{\bullet\ell}\delta_{mm_1}$, $c_\ell = c_\ell \delta_{mm_1}$) получается ‘диагональная’ матрица $G^{(n)}_{mm'}$ размерности 1×1. Это предположение неявно использовалось в [1, 2]. Оно вполне уместно, когда пучок взаимодействует с узкополосным высокочастотным резонатором ((L), (T) с нулевой хроматичностью) или с узкополосным низкочастотным импедансом резистивной камеры ((T) с любой хроматичностью).

Переходя к более общей *многомодовой модели*, подставим (16) в (5), чтобы установить структуру наблюдаемого ($\lambda_p \not\equiv 0$) движения несимметричного пучка

$$\vec{x}^{(n)}_p = \Sigma_{\{n', m' : \lambda_{\bullet\ell'} \not\equiv 0\}} \Delta_{nn'} \, c_{\ell'} \, (\lambda_{\bullet\ell'}/\lambda_p) \, \vec{x}^{(n')}_{\bullet\ell'}, \qquad \ell' = (n', m'). \tag{19}$$

Это линейная оболочка наблюдаемых мод $\vec{x}^{(n')}_{\bullet\ell'}$ симметричного пучка, и она не обязана порождать все C_N. Расчеты показывают, что для выбранной внутрисгустковой моды m структура с.в. $\vec{x}^{(n)}_{\bullet(n,m)}$ (в отличие от с.з. $\lambda_{\bullet(n,m)}$) крайне слабо зависит от межсгустковой моды n. Тогда сравнение (16) и (19) показывает, что хорошее приближение наблюдаемых мод несимметричного пучка достигается уже на обрезанном ряде

$$\vec{x}^{(n)}_p \simeq \Sigma_{\{m : \lambda_{\bullet\ell} \not\equiv 0\}} c_\ell \, \vec{x}^{(n)}_{\bullet\ell}, \qquad \ell = (n, m). \tag{20}$$

Последний шаг метода состоит в численном расчете границы $\overline{\mathcal{R}}$, например случайным перебором координат c_ℓ, (20). При этом свойство выпуклости $\overline{\mathcal{R}}$ позволяет сначала находить его частные границы, достигаемые на некоторых подпространствах из $\mathrm{C}_{N \cdot M}$, а затем законно расширять их до границ ближайшей выпуклой области. В итоге область локализации с.з. несимметричного пучка оказывается конечной, но шире, чем в симметричном случае. Согласно (6), это свидетельствует о возможности ухудшения ситуации с устойчивостью при переходе к несимметричному пучку.

Список литературы

[1] R.D. Kohaupt. — DESY Preprint 85–139, 1985.

[2] В.И. Балбеков, С.В. Иванов. — Препринт ИФВЭ 89–125, Серпухов, 1989.