

Вычисление магнитных полей с помощью поверхностных токов и закона сохранения полного тока

В.М. Кораблев, Л.М. Ткаченко

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий, Протвино, Россия

Введение

В некоторых конфигурациях магнитных систем с малыми воздушными зазорами в магнитопроводе численный расчет магнитных полей с использованием стандартного метода объемного интегрирования (VIM) для намагниченного магнитопровода, реализованный в программах GFUN [1] и MULTIC [2], затруднителен. Эти трудности стимулировали авторов реализовать метод вычисления магнитного поля с помощью поверхностных токов и закона сохранения полного тока (SCM), который позволяет вычислять магнитные поля, более близкие к реальным, с меньшими затратами вычислительных ресурсов.

1. Описание метода

При помещении образца железа в магнитное поле на его поверхности возникают молекулярные токи, обусловленные намагничиванием железа [3]. Разделив поверхность магнитопровода на N элементов, тангенциальная составляющая магнитного поля для каждого элемента в железном ярме и в воздухе может быть представлена как

$$\vec{B}_{iron} = \vec{B}_c + \vec{B}_{ex} + \vec{B}_{int}, \quad \vec{H}_{air} = \vec{H}_c + \vec{H}_{ex} - \vec{H}_{int}. \quad (1)$$

Здесь \vec{B}_c, \vec{H}_c — магнитные поля, создаваемые проводником; $\vec{B}_{ex}, \vec{H}_{ex}$ — магнитные поля, создаваемые поверхностными токами других элементов; \vec{B}_{int} и \vec{H}_{int} — магнитные поля от поверхностного тока данного элемента.

В силу сохранения тангенциальной составляющей магнитного поля мы имеем

$$\vec{B}_{iron} = \vec{B}_c + \vec{B}_{ex} + \vec{B}_{int} = \mu \vec{H}_{air} = \mu(\vec{H}_c + \vec{H}_{ex} - \vec{H}_{int}). \quad (2)$$

В вакуумном представлении уравнений (1)—(2) $\vec{B}_c = \vec{H}_c, \vec{B}_{ex} = \vec{H}_{ex}, \vec{B}_{int} = \vec{H}_{int}$ и уравнение (2) может быть преобразовано к виду

$$\vec{B}_{int} = \frac{\mu - 1}{\mu + 1}(\vec{B}_c + \vec{B}_{ex}), \quad (3)$$

связывающему собственную с внешней тангенциальные составляющие поля.

Для учета распределения магнитного потока в магнитопроводе используем закон сохранения полного тока, задающий абсолютный масштаб поля, тем самым приводя к правильному относительно B решению:

$$\oint \frac{1}{\mu(l')} (\vec{B}(l') \cdot d\vec{l}') = I. \quad (4)$$

Пусть двухкомпонентный вектор $\vec{\eta}_j = (\eta_{xj}, \eta_{yj})$ определяет поверхностную плотность тока элемента j в собственной системе координат, A_j задает матрицу преобразования из системы отсчета элемента j к базовой системе отсчета и C_j задает матрицу обратного преобразования, тогда трехмерное магнитное поле \vec{B}_j выражается через двухкомпонентную плотность тока $\vec{\eta}_j$ как

$$\vec{B}_j = A_j \int_{S_j} \frac{[\vec{\eta}_j \times (\vec{R} - \vec{R}')] }{|\vec{R} - \vec{R}'|^3} dS'_j. \quad (5)$$

Индукция, создаваемая элементом j в системе отсчета элемента i , выглядит как

$$\vec{B}_{ij} = C_i A_j \int_{S_j} \frac{[\vec{\eta}_j \times (\vec{R} - \vec{R}')] }{|\vec{R} - \vec{R}'|^3} dS'_j. \quad (6)$$

Возвращаясь к уравнению (3), связь между поверхностным током элемента i и всеми остальными токами в системе отсчета элемента i может быть записана в виде

$$\int_{S_i} \frac{[\vec{\eta}_i \times (\vec{R} - \vec{R}')] }{|\vec{R} - \vec{R}'|^3} dS'_i = C_i \frac{\mu_i - 1}{\mu_i + 1} \left[\vec{B}_{ci} + \sum_{j \neq i} A_j \int_{S_j} \frac{[\vec{\eta}_j \times (\vec{R} - \vec{R}')] }{|\vec{R} - \vec{R}'|^3} dS'_j \right]. \quad (7)$$

Используя двухкомпонентную часть уравнения (7), можно получить систему алгебраических уравнений, состоящую из $2N$ уравнений и $2N$ неизвестных (η_{xi}, η_{yi}) .

Уравнение (4) позволяет включить любое количество дополнительных связей для закона сохранения полного тока вдоль произвольного контура, разбитого на k сегментов длиной Δl_k :

$$\sum_k \frac{1}{\mu_k} \Delta \vec{l}_k \left(\vec{B}_{ck} + \sum_j A_j \int_{S_j} \frac{[\vec{\eta}_j \times (\vec{R} - \vec{R}')] }{|\vec{R} - \vec{R}'|^3} dS'_j \right) = I. \quad (8)$$

Используя m контуров для закона сохранения полного тока и полагая $\vec{\eta}_j = const$ в пределах элемента j , можно решить переопределенную систему из $2N + m$ уравнений относительно $2N$ неизвестных (η_{xi}, η_{yi}) методом наименьших квадратов.

Новые значения (η_{xi}, η_{yi}) позволяют переопределить магнитные проницаемости μ_i в итерационном процессе для учета реальной зависимости $B(H)$.

В областях с большим градиентом магнитной проницаемости необходимо включать дополнительные внутренние поверхности в магнитопроводе. Тогда вместо коэффициента $(\mu - 1)/(\mu + 1)$ в уравнении (7) надо использовать $(\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \mu_2)$, где μ_1 и μ_2 — магнитные проницаемости на противоположных сторонах внутреннего поверхностного элемента.

Необходимо отметить, что выбор контуров для закона сохранения полного тока, количество и форма поверхностных элементов зависят от конкретной геометрии магнита. Эти аспекты являются объектом дальнейших методических исследований.

2. Сравнение SCM с VIM

Основная идея VIM состоит в представлении магнитного поля \vec{H} в виде суммы поля \vec{H}_c , создаваемого проводником с током, и поля \vec{H}_m , создаваемого магнитопроводом:

$$\begin{aligned}\vec{H}_i &= \vec{H}_{ci} + \sum_j \vec{H}_{mj}, \\ \vec{H}_{mj} &= \frac{1}{4\pi} \int_V (\mu_j - 1) \frac{3[\vec{H}_j \cdot (\vec{R} - \vec{R}')] (\vec{R} - \vec{R}') - (\vec{R} - \vec{R}')^2 \vec{H}_j}{|\vec{R} - \vec{R}'|^5} dV'.\end{aligned}\quad (9)$$

Иногда, для задач с полностью замкнутым железным сердечником и слабым наружным \vec{H}_c полем, выражение

$$\mu_i \vec{H}_i = \mu_i \vec{H}_{ci} \quad (10)$$

дает поле, более близкое к реальному, чем вычисленное на основании (9). Поэтому при сравнении SCM со стандартным методом VIM мы показываем результаты вычисления как по формуле (9), так и по (10).

В качестве примеров для сравнения мы взяли вычисления магнитного поля по обеим методикам для магнита двухплечевого спектрометра ФОДС [4] с малым по отношению к длине минимального контура вокруг проводника зазором и для магнита [5], в котором величина воздушного зазора варьировалась в широком диапазоне.

Первый магнит имеет полный ток в обмотке 324 кА, наружные габариты железного сердечника $300 \times 252 \times 220$ см³. Переменный воздушный зазор вдоль пучка в обоих плечах имеет средневзвешенную величину 31 см, что составляет 7.4% от длины минимального контура вокруг проводника.

Средняя величина измеренного магнитного поля в воздушном зазоре составляла 12.81 кГс. VIM со 137 объемными элементами в квадранте дает 9.44 кГс, из оценки по формуле (10) мы имеем 16.71 кГс, и SCM со 105 поверхностными элементами и тремя контурами (каждый из которых поделен на 33 сегмента) в квадранте дает 13.01 кГс. Второй магнит имеет ток 6 кА, внешние параметры сердечника $200 \times 120 \times 50$ см³.

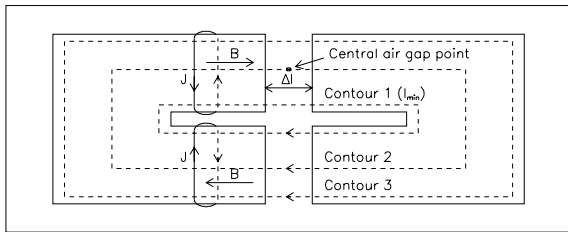


Рис. 1: Схема воздушного зазора и контуров для закона сохранения полного тока.

Мы искусственно ввели воздушные зазоры (рис. 1), чтобы показать зависимость магнитного поля от величины воздушного зазора для обоих VIM и SCM методов. В вычислениях по методу VIM разбиение магнитопровода состояло из 144 объемных элементов, для SCM поверхность магнитопровода была разбита на 72 элемента с использованием трех контуров, каждый из которых разделен на 48 сегментов. Для данного магнита зависимость магнитного поля от величины воздушного зазора в центральной точке зазора приведена на рис. 2а. Сплошная линия соответствует SCM методу, пунктирная — VIM, треугольники — для оценки поля по формуле (10). Величина воздушного зазора нормирована на длину минимального контура вокруг проводника ($Gap = 2\Delta l/l_{min} \times 100\%$).

На рис. 26 показана зависимость средней намагниченности магнитопровода от величины воздушного зазора.

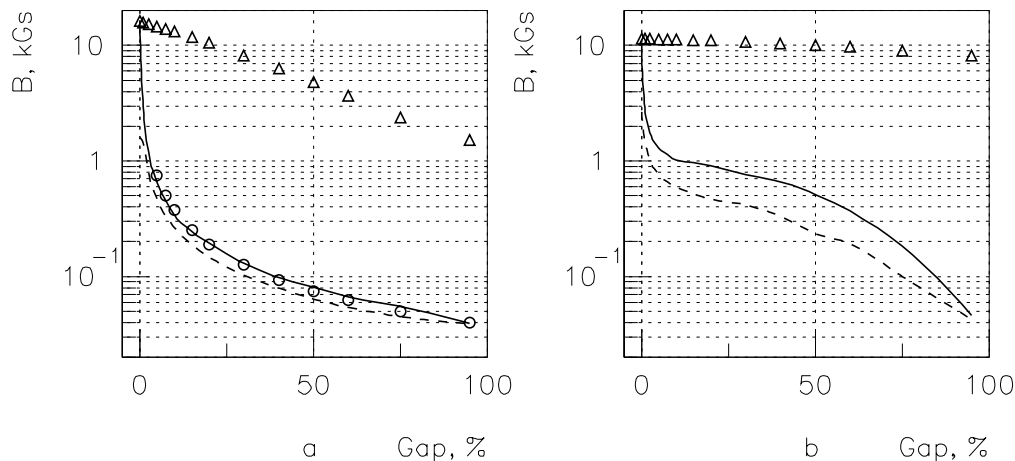


Рис. 2: Зависимости магнитного поля в зазоре (а) и средней намагниченности магнитопровода (б) от величины воздушного зазора.

Из сравнения данных SCM и VIM можно сделать вывод, что в рассмотренных конфигурациях магнитов VIM занижает поле в области малых воздушных зазоров (L_{gap}). SCM дает удовлетворительный результат для любых воздушных зазоров и магнитное поле в воздушном зазоре (рис.2а) согласуется, как и ожидалось, с $1/L_{gap}$ — зависимостью, помеченной кружочками, для $L_{gap} \gg L_{iron}/\langle\mu\rangle$. Если $L = L_{gap} + L_{iron}$ полная длина контура вокруг проводника, тогда

$$B \sim I/(L_{gap} + L_{iron}/\langle\mu\rangle) \sim I/L_{gap}, \quad (11)$$

где $\langle\mu\rangle$ — средняя магнитная проницаемость вдоль L_{iron} .

При нулевом воздушном зазоре $B \sim \mu(I/L_{iron}) \sim \mu H_c$, что также согласуется с вычислением по SCM.

Заключение

Результаты, приведенные в разделе 2, показывают, что предложенный SCM метод более предпочтителен для вычисления магнитных полей в магнитных системах с малыми воздушными зазорами, чем стандартный VIM метод.

Список литературы

- [1] A.G. Armstrong et al. RL-76-029/A, Rutherford Laboratory (1976).
- [2] Tkachenko L.M. In "Computer Codes in Accelerator Domain", DESY Internal Report HERA M-92-07 (1992) 40.
- [3] Теоретические основы электротехники. — М.: Высшая школа, 2 (1976) 252.
- [4] В.В. Абрамов и др. ПТЭ, 6 (1992) 75.
- [5] V.V. Ammosov et al. SERP-P-176, Protvino (1993).