Методика расчета влияния секступольной и декапольной нелинейностей магнитного поля на бетатронные частоты равновесной частицы

П.Н. Чирков
ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий, Протвино, Россия

Одной из важнейших характеристик сверхпроводящего (СП) циклического ускорителя является динамическая апертура, величина которой определяется не только силой ближайших к рабочей точке бетатронных резонансов, но и зависимостью бетатронных частот $\vec{Q} = \{Q_x, Q_y\}$ от амплитуд колебаний. В диполях при низких уровнях магнитного поля из-за незатухающих (persistent) токов в СП-жилах обмотки возбуждаются относительно большие систематические нормальные секступольная C_3 и декапольная C_4 нелинейности. Наличие таких нелинейностей и соответственно больших корректирующих их полей приводит к тому, что первого порядка теории возмущений (метода усреднения) при нахождении сдвига частот $\Delta\vec{Q}$ будет недостаточно. Как показывают измерения [1], зависимость динамической апертуры от импульсного разброса довольно слабая $\sim (\Delta p/p)^2$. Поэтому в первую очередь представляет интерес расчет $\Delta\vec{Q}$ во втором порядке для равновесной частицы ($\Delta p/p = 0$).

В сверхпроводящем ускорителе компоненты возмущения магнитного поля могут быть выражены через продольный векторный потенциал A_s [2],[3] :

$$A_s(s) = H_o \sum_{n\geq 2} \frac{C_n + iS_n}{2r^{n-1}n}(x+iy)^n + \textit{к.с.},$$

где C_n, S_n — относительные добавки к полю, вносимые соответственно нормальной и косой нелинейностями $(n-1)$-ой степени в точке $(x = r,\ y = 0)$; r — радиус нормализации.

Согласно [4] во втором порядке получаются следующие уравнения для медленно меняющихся квадратов амплитуд $\vec{I} = (I_x, I_y)$ и фаз $\vec{\eta} = (\eta_x, \eta_y)$ бетатронных колебаний равновесных частиц:

$$\frac{dI_\zeta}{d\theta} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_\zeta}, \qquad \frac{d\eta_\zeta}{d\theta} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial I_\zeta} \qquad \zeta = r\sqrt{\frac{\beta_\zeta(\theta)}{\beta_{max}}}\sqrt{I_\zeta}\cos(\mu_\zeta(\theta) + \eta_\zeta),$$

где ζ — общее обозначение для x и y; R_0 и R — средний радиус и радиус кривизны идеальной орбиты в поле H_o; θ — обобщенный азимут, связанный с продольной координатой s соотношением $\theta = s/R_0$; $\beta_\zeta(\theta)$ — бета-функция и $\mu_\zeta = Q_\zeta\theta + \chi_\zeta$ — фаза невозмущенных бетатронных колебаний с периодической частью $\chi_\zeta(\theta)$. Таким образом, $\sqrt{I_\zeta}$ представляет собой нормированную на r амплитуду ζ-колебаний на азимуте, где $\beta_\zeta = \beta_{max}$.

Гамильтониан $\mathcal{L}$ во втором порядке имеет вид [4],[5]

$$\mathcal{L} = \left\langle D(\vec{I},\vec{\eta},\theta)\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle\left[D(\vec{I},\vec{\eta},\theta), \widehat{D}(\vec{I},\vec{\eta},\theta)\right]\right\rangle, \tag{1}$$
$$D = \frac{2\beta_{max}R_o}{r^2 H_o R}\cdot A_s\Big(\zeta(I_\zeta,\eta_\zeta,\theta),\theta\Big),$$

где [...] — скобки Пуассона по переменным $\{\eta_\zeta, I_\zeta\}$; оператор $\langle\ldots\rangle$ означает усреднение по θ.

Учитывая периодическую зависимость D от $\vec{\mu} = (\mu_x, \mu_y)$ и азимута θ, можно представить

$$D = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\vec{n}} D_{\vec{n},k}(I_x, I_y) \exp\{i(\vec{n}\vec{Q} - k)\theta + i\vec{n}\vec{\eta}\} \ ,$$

$$D_{\vec{n},k} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_0^{2\pi} D\{r\sqrt{\frac{\beta_\zeta(\theta)}{\beta_{max}}}\sqrt{I_\zeta}\cos\alpha_\zeta, \theta\} \exp\{i[k\theta + \vec{n}\vec{\chi}(\theta) - \vec{n}\vec{\alpha}]\}\, d\alpha_x d\alpha_y d\theta \ ,$$

где $\vec{n} = (n_x, n_y)$, $\quad n_{x,y}, k$ — целые числа.

Обозначим через $D^{(m)}$ часть D, создаваемую мультиполем m-го порядка, а соответствующее этому мультиполю ограниченное множество гармоник $\vec{n}$ через Ω_m. Множество Ω_m — это все бетатронные резонансы $\vec{n}\vec{Q} - k = 0$, которые могут возбуждаться данным мультиполем в первом порядке теории возмущений. На рис.1 показаны такие множества для мультиполей разных типов.

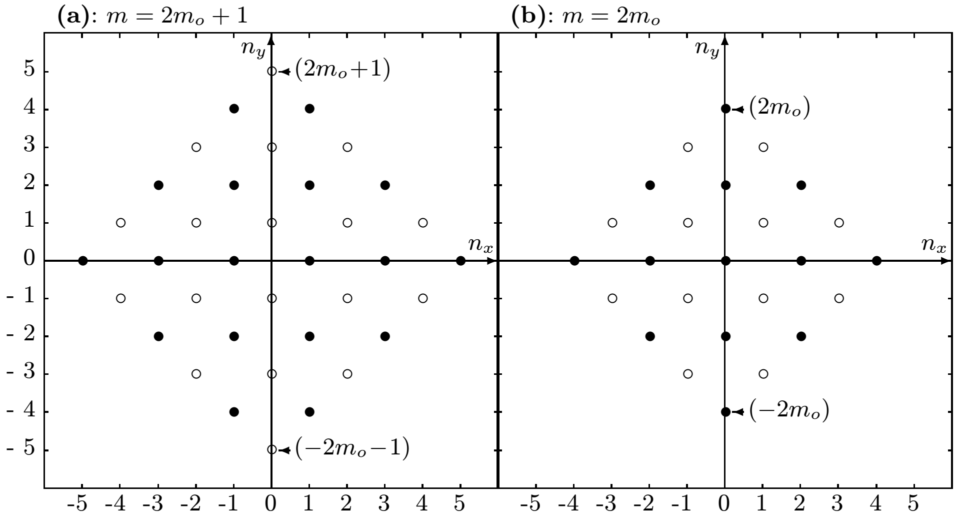

Рис. 1: Множества гармоник $\vec{n}$ для нечетных (а) и четных (б), нормальных (•) и косых (◦) мультиполей.

Для рассматриваемых мультиполей C_3 и C_5 имеем $\Omega_3 \subset \Omega_5$, и оба множества симметричны относительно $n_x = 0$. Будем обозначать через Ω_m^+ половину Ω_m с $n_x > 0$. Когда $\vec{Q}$ не удовлетворяет резонансному условию $|\vec{n}\vec{Q} - kN| \ll 1$ (N — периодичность магнитной структуры с учетом возмущения), получаем $\langle D^{(3)} + D^{(5)} \rangle = 0$. В этом случае согласно [4] действие оператора " $\widehat{\ldots}$ " в (1) определяется следующим выражением:

$$\widehat{D} = -i \sum_{\vec{n},k} D_{\vec{n},k}\, \mathbf{e}^{i\Phi(\vec{n},k)} / (\vec{n}\vec{Q} - kN) \qquad \text{где:} \quad \Phi(\vec{n},k) = (\vec{n}\vec{Q} - kN)\theta + \vec{n}\vec{\eta}.$$

Подстановка такого $\widehat{D}$ в (1) дает

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big\langle \sum_{\vec{n},k} \sum_{\vec{p},l} \frac{\mathbf{e}^{i\Phi(\vec{n}+\vec{p},k+l)}}{(\vec{p}\vec{Q} - lN)} \sum_\zeta \Big\{ n_\zeta D_{\vec{n},k} \frac{\partial D_{\vec{p},l}}{\partial I_\zeta} - p_\zeta \frac{\partial D_{\vec{n},k}}{\partial I_\zeta} D_{\vec{p},l} \Big\} \Big\rangle \ . \qquad (2)$$

Нерезонансная часть $\mathcal{L}_{non}$ гамильтониана $\mathcal{L}$, определяющая сдвиг бетатронных частот, содержит только те члены (2), для которых одновременно выполняются условия $\vec{n}+\vec{p}=0$ и $k+l=0$. Следовательно,

$$\mathcal{L}_{non} = \mathrm{div}_{\vec{I}} \left\{ \frac{1}{2N} \sum_{\vec{n},k} \vec{n} \; \frac{|D_{\vec{n},k}|^2}{(k-\vec{n}\vec{Q}/N)} \right\} . \tag{3}$$

С учетом выражения для $D_{\vec{n},k}$ и симметричности Ω_{2m_o+1} проводим суммирование в (3) по всем значениям $k \in (-\infty,\infty)$:

$$\mathcal{L}_{non}(\vec{I}) = \mathrm{div}_{\vec{I}} \Bigg\{ -\frac{1}{2\Theta_o} \int\limits_0^{\Theta_o}\int\limits_0^{\Theta_o} d\theta_1 d\theta_2 \sum_{\vec{n}\in\Omega^+} \vec{n}\mathcal{F}_{\vec{n}}(\theta_1,\theta_2) D_{\vec{n}}(\theta_1) D_{\vec{n}}(\theta_2) \Bigg\} , \tag{4}$$

где

$$\mathcal{F}_{\vec{n}}(\theta_1,\theta_2) = \frac{\cos(\vec{n}\vec{F}(\theta_1,\theta_2))}{\sin(\vec{n}\vec{\mu}_o/2)} , \quad D_{\vec{n}}(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\alpha_x d\alpha_y \, D(\vec{\alpha},\theta) \, \mathbf{e}^{i\vec{n}\vec{\alpha}} ,$$

$$\vec{F}(\theta_1,\theta_2) = \vec{\mu}(\theta_1) - \vec{\mu}(\theta_2) - \frac{\vec{\mu}_o}{2} \, \mathrm{sgn}(\theta_1-\theta_2) , \quad \vec{\mu}_o = \vec{Q}\Theta_o , \quad \Theta_o = 2\pi/N .$$

Для рассматриваемого случая $D = D^{(3)} + D^{(5)}$ сумма в выражении (4) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{n}\in\Omega^+} \ldots \; &= \; \sum_{\vec{n}\in\Omega_3^+} \vec{n}\mathcal{F}_{\vec{n}}(\theta_1,\theta_2) D_{\vec{n}}^{(3)}(\theta_1) D_{\vec{n}}^{(3)}(\theta_2) + 2 \sum_{\vec{n}\in\Omega_3^+} \vec{n}\mathcal{F}_{\vec{n}}(\theta_1,\theta_2) D_{\vec{n}}^{(3)}(\theta_1) D_{\vec{n}}^{(5)}(\theta_2) \\ &+ \; \sum_{\vec{n}\in\Omega_5^+} \vec{n}\mathcal{F}_{\vec{n}}(\theta_1,\theta_2) D_{\vec{n}}^{(5)}(\theta_1) D_{\vec{n}}^{(5)}(\theta_2) . \end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом, первая сумма — вклад в $\mathcal{L}_{non}$, вносимый только секступольной нелинейностью, вторая определяется влиянием и секступольной и декапольной нелинейностей, третья сумма — эффект только от декапольной нелинейности.

Поскольку $D^{(m)}$ с $m = 2m_o + 1$ может быть представлена в виде разложения

$$D^{(m)} = \frac{2\beta_{max}R_o}{rR} \frac{C_m(\theta)}{m} \sum_{j=0}^{m_o} (-1)^j \binom{m}{2j} \left(\sqrt{\frac{\beta_x(\theta)}{\beta_{max}}} I_x \mathrm{cos}\alpha_x \right)^{m-2j} \left(\sqrt{\frac{\beta_y(\theta)}{\beta_{max}}} I_y \mathrm{cos}\alpha_y \right)^{2j} ,$$

то с учетом выражения для $D_{\vec{n}}(\theta)$ получаем

$$D_{\vec{n}}^{(m)}(\theta) = \frac{C_m(\theta)}{m} \sum_{j=0}^{m_o} f_{\vec{n},j}^{(m)} Y_{m-2j,2j} \; I_x^{m/2-j} I_y^j ,$$

где

$$Y_{i,l}(\theta) = \frac{\beta_{max}R_o}{rR} \left(\frac{\beta_x(\theta)}{4\beta_{max}} \right)^{i/2} \left(\frac{\beta_y(\theta)}{4\beta_{max}} \right)^{l/2} .$$

Величины коэффициентов $f_{\vec{n},j}^{(m)}$ для секступольной и декапольной нелинейностей приведены в табл. 1. И окончательно, из (4),(5) получаем

$$\mathcal{L}_{non} = \sum_{j=2}^{4} \sum_{k=0}^{j} q_{j-k,k} I_x^{j-k} I_y^k$$

Таким образом, сдвиг частот, вызываемый рассматриваемыми C_3 и C_5, во втором порядке по возмущению равен

$$\Delta\vec{Q} = \begin{pmatrix} \Delta Q_x \\ \Delta Q_y \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathcal{L}_{non}}{\partial \vec{I}} = \sum_{j=2}^{4} \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{j-1} (j-k)\, q_{j-k,k} I_x^{j-k-1} I_y^k \\ \sum\limits_{k=1}^{j} \quad k \quad q_{j-k,k} I_x^{j-k}\, I_y^{k-1} \end{pmatrix} .$$

Зависимость коэффициентов $q_{i,l}$ от β- и μ-функций, секступольных и декапольных полей приведена в приложении. Показаны только коэффициенты, определяющие сдвиг частот, пропорциональный I_ζ и I_ζ^2.

Список литературы

[1] F.Zimmermann. Part. Acc. **49** (1995) 67.
[2] П.Н.Чирков. ОИЯИ: Д9-89-801, стр.109, Дубна (1989).
[3] И.И.Петренко, П.Н.Чирков. Труды XIV Совещания по ускорителям заряженных частиц, Протвино, 1994, том 3, стр.165.
[4] Н.Н.Боголюбов и Ю.А.Митропольский. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* М., Наука, 1974.
[5] Э.Л.Бурштейн, Л.С.Соловьев. ДАН СССР **139, 4** (1961), 855.

Таблица 1:

Коэффициенты $f^{(3)}_{\vec{n},j}$			Коэффициенты $f^{(5)}_{\vec{n},j}$			
$\vec{n}\in\Omega_3^+$	$j=0$	$j=1$	$\vec{n}\in\Omega_5^+$	$j=0$	$j=1$	$j=2$
(1, 0)	6	-12	(1, 0)	20	-120	60
(1,-2)	0	-6	(1,-2)	0	-60	40
(1, 2)	0	-6	(1, 2)	0	-60	40
(3, 0)	2	0	(3, 0)	10	-40	0
			(1,-4)	0	0	10
			(1, 4)	0	0	10
			(3,-2)	0	-20	0
			(3, 2)	0	-20	0
			(5, 0)	2	0	0

Приложение

$$\begin{pmatrix} q_{20} \\ q_{11} \\ q_{02} \end{pmatrix} = -\frac{N}{\pi} \int_0^{\Theta_o}\int_0^{\Theta_o} C_3(\theta_1) C_3(\theta_2) \mathbf{Y}_{ss}(\theta_1,\theta_2) \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{(1,\ 0)} \\ \mathcal{F}_{(1,-2)} \\ \mathcal{F}_{(1,\ 2)} \\ \mathcal{F}_{(3,\ 0)} \end{pmatrix} d\theta_1 d\theta_2,$$

$$\begin{pmatrix} q_{30} \\ q_{21} \\ q_{12} \\ q_{03} \end{pmatrix} = -8\frac{N}{\pi} \int_0^{\Theta_o}\int_0^{\Theta_o} C_3(\theta_1) C_5(\theta_2) \mathbf{Y}_{sd}(\theta_1,\theta_2) \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{(1,\ 0)} \\ \mathcal{F}_{(1,-2)} \\ \mathcal{F}_{(1,\ 2)} \\ \mathcal{F}_{(3,\ 0)} \end{pmatrix} d\theta_1 d\theta_2,$$

$$\mathbf{Y}_{ss} = \begin{pmatrix} 3Y_{30}\widetilde{Y}_{30} & 0 & 0 & Y_{30}\widetilde{Y}_{30} \\ -8Y_{12}\widetilde{Y}_{30} & -4Y_{12}\widetilde{Y}_{12} & 4Y_{12}\widetilde{Y}_{12} & 0 \\ 4Y_{12}\widetilde{Y}_{12} & Y_{12}\widetilde{Y}_{12} & Y_{12}\widetilde{Y}_{12} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y}_{sd} = \begin{pmatrix} 2Y_{30}\widetilde{Y}_{50} & 0 & 0 & Y_{30}\widetilde{Y}_{50} \\ -3Y_{12}\widetilde{Y}_{50} - 9Y_{30}\widetilde{Y}_{32} & -6Y_{12}\widetilde{Y}_{32} & 6Y_{12}\widetilde{Y}_{32} & -3Y_{30}\widetilde{Y}_{32} \\ 12Y_{12}\widetilde{Y}_{32} + 3Y_{30}\widetilde{Y}_{14} & 3Y_{12}\widetilde{Y}_{32} + 6Y_{12}\widetilde{Y}_{14} & 3Y_{12}\widetilde{Y}_{32} - 6Y_{12}\widetilde{Y}_{14} & 0 \\ -3Y_{12}\widetilde{Y}_{14} & -\,Y_{12}\widetilde{Y}_{14} & -\,Y_{12}\widetilde{Y}_{14} & 0 \end{pmatrix},$$

где $Y_{ij} \equiv Y_{ij}(\theta_1)$, $\quad \widetilde{Y}_{ij} \equiv Y_{ij}(\theta_2)$.