Спектральные и угловые свойства синхротронного излучения в магнитных полях ускорителей

О.Е. Шишанин
Московский государственный индустриальный университет, Россия

Выражение, описывающее спектральные свойства синхротронного излучения в однородном магнитном поле, было найдено Иваненко и Соколовым [1], а также Швингером [2]. В настоящей работе будут определены границы точности этой формулы и будет обсуждена аналогичная проблема для неоднородных магнитных полей.

Фунция Бесселя $J_\nu(x)$, входящая в формулу Шотта (см., например, [3]), может быть представлена следующим образом:

$$J_\nu(\nu\beta\sin\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\nu\varphi-\nu\beta\sin\theta\sin\varphi)}d\varphi, \tag{1}$$

где ν — номер гармоники излучения; $v = c\beta$ — скорость электрона; а θ и φ — сферические углы.

Поскольку излучение релятивистской частицы формируется с небольшого угла φ, то его можно рассматривать как параметр разложения. Если провести в (1) разложение по φ, заменить φ на at, где $a = \sqrt[3]{6/\nu\beta\sin\theta}$, и расширить интегрирование на всю числовую ось, то правая часть (1) примет вид

$$\frac{a}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i(xt+t^3)}[1 - i\frac{\nu}{120}(\frac{6}{\nu})^{5/3}t^5], \text{ где } \quad x = a(1-\beta\sin\theta)\nu.$$

Используя при $x > o$ интегралы

$$\int_0^\infty \cos(t^3+xt)\,dt = \frac{\sqrt{x}}{3}K_{1/3}(s), \int_0^\infty t^5\sin(t^3+xt)dt = \frac{x^3}{27\sqrt{3}}K_{2/3}(s) - \frac{4}{27}x^{3/2}K_{1/3}(s),$$

где $s = 2(x/3)^{3/2}$, и принимая во внимание в первых слагаемых члены порядка $\varepsilon = 1 - \beta^2\sin^2\theta$, можно найти следующие аппроксимации с точностью до второго приближения:

$$J_\nu(\nu\beta\sin\theta) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi\sqrt{3}}\left[K_{1/3} + \frac{1}{10}\varepsilon\,(K_{1/3} - 2\,\nu\,\varepsilon^{\frac{3}{2}}\,K_{2/3})\right], \tag{2}$$

$$J'_\nu(\nu\beta\sin\theta) = \frac{\varepsilon}{\pi\sqrt{3}}\left[K_{2/3} + \frac{1}{5}\varepsilon\,(2K_{2/3} - (\frac{1}{\nu\varepsilon^{\frac{3}{2}}} + \nu\,\varepsilon^{\frac{3}{2}})K_{1/3})\right], \tag{3}$$

где $\nu\varepsilon^{3/2}/3$ — аргумент модифицированных функций Бесселя.

Ранее только первые члены были получены в асимптотиках (2) и (3). Вводя стандартный угол ψ как отклонение от орбитальной плоскости, можно положить, что $\cos\theta \approx \psi$ и $\varepsilon = 1 - \beta^2 + \psi^2$.

Компоненты линейной поляризации испущенного света обычно обозначаются через σ и π (соответственно в плоскости орбиты и перпендикулярно ей).

С учетом (2) и (3) вместо обобщенной формулы Шотта спектрально-угловые распределения интенсивности излучения представляются в виде

$$d\,W_\sigma(\nu) = \frac{1}{2\pi^2}\,W_0\,\nu^2\,\varepsilon_0\beta^2\{\varepsilon^2\,K_{2/3}^2 + \frac{1}{5}\,\varepsilon^3[\,4\,K_{2/3}^2 -$$

$$2(\frac{1}{\nu\varepsilon^{\frac{3}{2}}} + \nu\varepsilon^{\frac{3}{2}})K_{1/3}\,K_{2/3}]\}\,\sin\theta\,d\theta, \tag{4}$$

$$d\,W_\pi(\nu) = \frac{1}{2\pi^2}\,W_0\,\nu^2\,\varepsilon_0\cot^2\theta\{\varepsilon\,K_{1/3}^2 + \frac{1}{5}\,\varepsilon^2\left[K_{1/3}^2 - 2\nu\varepsilon^{\frac{3}{2}}\;K_{1/3}\;K_{2/3}\right]\}\,\sin\theta\,d\theta,$$

где

$$W_0 = \frac{2}{3}\,c\,H^2\left(\frac{e^2}{m_0c^2}\right)^2, \qquad \varepsilon_0 = 1-\beta^2 = (m_0c^2/E)^2.$$

Для того чтобы получить спектральную плотность, нужно проинтегрировать (4) по θ. В этом случае

$$W_\sigma(\nu) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\,W_0\,\nu\,\varepsilon_0^2\{\int_y^\infty K_{5/3}(x)\,dx + K_{2/3}(y) -$$

$$\frac{1}{20}\,\varepsilon_0[\,7\,K_{2/3}(y) + (24\,y + \frac{22}{3y})K_{1/3}(y) + 5\int_y^\infty K_{1/3}(x)\,dx]\},$$

$$\tag{5}$$

$$W_\pi(\nu) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\,W_0\,\nu\,\varepsilon_0^2\,\{\int_y^\infty K_{5/3}(x)\,dx - K_{2/3}(y) +$$

$$\frac{1}{20}\,\varepsilon_0[\,7\,K_{2/3}(y) + \frac{2}{y}\,K_{1/3}(y) - 15\int_y^\infty K_{1/3}(x)\,dx]\},$$

где $y = 2\nu\,\varepsilon_0^{3/2}/3$. Отсюда более точная спектральная формула может быть записана как

$$W(\nu) = \frac{\sqrt{3}ce_0^2}{2\pi\,R^2}\,\frac{E}{m_0\,c^2}\,y\,\{(1-\varepsilon_0)\int_y^\infty K_{5/3}(x)\,dx - \varepsilon_0\,[(\frac{3}{5}y +$$

$$+\frac{2}{15\,y})\,K_{1/3}(y) + \frac{1}{2}\int_y^\infty K_{1/3}(x)\,dx]\}. \tag{6}$$

Поправочные члены здесь пропорциональны $(m_0c^2/E)^2$ и в случае релятивистского движения частицы в ускорителе являются малыми.

После суммирования по частотам выражение для полной интенсивности примет вид

$$W = \frac{2}{3}\,\frac{c\,e_0^2}{R^2}\,(\frac{E}{m_0\,c^2})^4\,(1-2\,\varepsilon_0).$$

Эта формула находится в согласии с выражением для полной мощности излучения, поскольку в ультрарелятивистском случае $\beta^4 \approx 1 - 2\,(1-\beta^2)$.

Используя операторный метод Швингера [4], можно получить решение той же задачи для слабофокусирующего магнитного поля [5] с первой квантовой поправкой.

В этом случае вместо (4) были найдены формулы:

$$\frac{d\,W_\sigma(\nu)}{d\,\Omega} = \frac{ce^2\,\nu\,\nu'}{12\,\pi^4\,R^2}\int_0^{2\pi} d\psi_1\;\varepsilon_1^2\,K_{2/3}^2(\frac{\nu'}{3}\;\varepsilon_1^{\frac{3}{2}}),$$

$$\tag{7}$$

$$\frac{d\,W_\pi(\nu)}{d\,\Omega} = \frac{ce^2\,\nu\,\nu'}{12\,\pi^4\,R^2}\int_0^{2\pi} d\psi_1\;\varepsilon_1(\cos\theta - \alpha\,\cos\psi_1)^2\,K_{1/3}^2(\frac{\nu'}{3}\;\varepsilon_1^{\frac{3}{2}}),$$

где

$$\nu' = \nu(1+\hbar\omega/E),\ \omega = \nu\omega_0,\ \omega_0 = \beta\,\frac{c}{R},$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon - 2\,\alpha\,\cos\theta\,\cos\psi_1 + \alpha^2\,\cos^2\psi_1,\ \ \alpha = \sqrt{n}\,B/R,$$

n — градиент поля ($0 < n < 1$); R — радиус орбиты; B — амплитуда вертикальных колебаний; ψ_1 — начальная фаза. Если допустить, что B или α равны нулю, то можно получить первые члены в (4) в классическом приближении.

Было рассчитано также для циклического ускорителя влияние прямолинейных секций l [6], которые модифицируют параметр α, как

$$\alpha = \nu_z \sqrt{1 + \frac{\pi^2 nk(2+k)}{3(1+k)N^2}} \frac{B}{R_0}, \quad \text{где} \quad \nu_z^2 = (1+k)n + \frac{\pi^2 k^2 n^2}{3N^2},$$

N — число периодов на замкнутой орбите; $k = l/a$; a — длина поворотных магнитов, $R_0 = R(1+k)$.

В качестве примера могут быть использованы параметры синхротрона ФИРАН: $N = 4$, $R = 198\,\text{см}$, $l = 67\,\text{см}$, $n = 0.67$; круговые секторы магнитов $86°$. При энергии электронов $E = 650\,\text{МэВ}$ амплитуда вертикальных колебаний $B = 1.5\,\text{мм}$ (см. рис. 5.24 в [3]). Тогда в орбитальной плоскости отношение $(W_\sigma - W_\pi)/(W_\sigma + W_\pi)$ будет $0.96; 0.92; 0.89; 0.86$ при длине излучения λ $4360; 1000; 500; 250 \mathring{A}$ соответственно вместо 1 для однородного магнитного поля.

Параметр α меняется для различных магнитных структур. Можно также взять систему $FODO$ с градиентом $n >> 1$, где фокусирующие и дефокусирующие магниты радиуса R имеют также длину a, а l — длина прямолинейной секции. Тогда

$$\alpha = \nu_z \frac{B}{R_0} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 n}{2N^2} (\frac{n(1+k)^2}{2\nu_z^2} - k)}, \quad \text{где} \quad \nu_z = \frac{\pi n}{2\sqrt{3}N} \sqrt{1 + 4k + 3k^2}.$$

В более важном случае накопительного кольца

$$\alpha = \sqrt{\frac{A_z}{\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{\beta_z}} \sqrt{1 + (\frac{1}{2}\frac{d\beta_z}{ds})^2} \right]_{\varphi=0},$$

где A_z — эмиттанс; β_z — бетатронная функция вертикального движения, зависящая от орбитальной длины s. Здесь отсчет азимутального угла начинается с той точки, откуда излучение снимается.

Необходимо подчеркнуть, что бетатронные колебания значительно меняют спектрально-угловые и угловые распределения.

Формулами (7) можно объяснить эксперименты Королева и Куликова (см. главу V в [3]), в частности отсутствие нуля для π–компоненты в плоскости орбиты ($\theta = \pi/2$).

Задача об излучении решалась для моноэнергичного электрона, но эффект пучка принимался здесь во внимание путем усреднения по начальным фазам, поскольку инжекция частиц происходит в течение нескольких оборотов. Кроме того, амплитуда B рассматривается как среднеквадратическая величина, потому что в поперечном сечении пучков имеется набор амплитуд от нуля до максимального значения.

В (7) параметры $\alpha, \sqrt{1-\beta^2}$ и $\cos\theta \approx \psi$ являются малыми величинами одного порядка, в то время как поправки порядка B^2/R^2, A^2/R^2 (A — амплитуда радиальных колебаний) по отношению к главным членам были уже опущены. При $\theta \sim \pi/2$ интегралы (7) могут быть рассчитаны путем перехода к функциям Эйри и разложения их в ряды.

Если параметр $p = \alpha^2/2\varepsilon << 1$, то можно разложить по этой величине подынтегральные функции. Ограничиваясь только линейными членами по p, можно придти к следующим выражениям:

$$\frac{d\,W_\sigma(\nu)}{d\,\Omega} = \frac{ce^2 \nu\nu' \varepsilon^2}{6\pi^3 R^2} \{K_{2/3}^2 + p\,[\varepsilon^2 \cos^2\theta\, \nu'^2\, (K_{1/3}^2 +$$

$$K_{2/3}^2) - \varepsilon^{3/2}\,\nu'\,(1 + 2\,\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon})\,K_{1/3}\,K_{2/3}]\},$$

$$\frac{d\,W_\pi(\nu)}{d\,\Omega} = \frac{ce^2\nu\nu'\,\varepsilon}{6\pi^3\,R^2}\,\{(\cos^2\theta + \varepsilon\,p)\,K_{1/3}^2 +$$
$$p\,\varepsilon\,\cos^2\theta\,\nu'[\varepsilon\,\cos^2\theta\,\nu'(K_{1/3}^2 + K_{2/3}^2) - 5\varepsilon^{1/2}\,K_{1/3}\,K_{2/3}]\}, \tag{8}$$

где $K_i = K_i(\nu'\varepsilon^{3/2}/3)$. В (8) поправки, пропорциональные p, того же порядка, что и другие члены. Если здесь положить $p = 0$, то можно получить соответствующие формулы для однородного магнитного поля.

Интегрирование (8) по углам приводит к спектральным формулам с первой квантовой поправкой:

$$W_{\sigma,\pi}(\nu) = \frac{ce^2\nu\varepsilon_0}{2\pi\sqrt{3}R^2}\,\{\int_{y'}^{\infty} K_{5/3}(x)\,dx \pm K_{2/3}(y')\}, \tag{9}$$

где

$$y' = \frac{2}{3}\,\varepsilon_0^{3/2}\,\nu\,(1 + h\;\omega/E).$$

Заметим, что здесь нет зависимости от бетатронных колебаний. Кроме того, можно получить выражение для полной интенсивности, используя параболическое приближение в уравнениях движения.

В соответствии с формулой

$$W = \frac{2}{3}\,\frac{e^4}{m^2c^3}\;\frac{(\vec{\beta}\times\vec{H})^2}{1-\beta^2},$$

для интенсивности излучения в фокусирующем магнитном поле было получено [7] следующее выражение:

$$W = \frac{2}{3}\,\frac{ce^2}{R^2}\,\frac{\beta^4}{(1-\beta^2)^2}\,[1 + (1 - \frac{n^2}{2})\,\frac{A^2}{R^2} - n\frac{3-2n+n^2}{2(1-n)}\,\frac{B^2}{R^2}]. \tag{10}$$

Таким образом, для однородного магнитного поля поправки к угловым распределениям синхротронного излучения порядка $(m_0c^2/E)^2 + \psi^2$, в то время как добавочные релятивистские члены к спектральным формулам пропорциональны $(m_0c^2/E)^2$. С другой стороны, в фокусирующих и периодических магнитных полях бетатронные колебания существенно влияют на угловые свойства синхротронного излучения, но в то же время спектральная мощность остается почти неизменной.

Список литературы

[1] Иваненко Д.Д., Соколов А.А. Докл. АН СССР. 1948, т.59, с.1551-1554.
[2] Schwinger J. Phys.Rev. 1949, v.75, p.1912-1925.
[3] Sokolov A.A., Ternov I.M. Synchrotron radiation. Academie Verlag, Berlin, 1968.
[4] Schwinger J. Proc.Nat.Acad.Sci. 1954 v.40, p.132-136.
[5] Жуковский В.Ч., Шишанин О.Е. ЖЭТФ. 1971, т.61, с.1371-1378.
[6] Шишанин О.Е. ТМФ. 1996, т.106, No 2, с.285-299.
[7] Жуковский В.Ч., Шишанин О.Е. Изв.вузов. Физика. 1978, No 3, с.149-151.