

# Нелинейный режим подавления остаточных колебаний пучка после инъекции в синхротрон

В.М. Жабицкий

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

## Введение

Обеспечение устойчивости когерентных поперечных колебаний сгустков в синхротронах за счет радиотехнических систем отрицательной обратной связи является общепринятым и широко распространенным методом. Подобные системы повсеместно используются на ускорителях как для подавления неустойчивостей, так и с целью предотвращения роста эмиттанса пучка [1]. В системах подавления (СП) применяются активные способы воздействия на пучок в соответствии с его состоянием в предшествующие моменты времени. Для этого (см. рис. 1) в каждом из поперечных направлений колебаний используются датчик положения (ДП) и дипольный магнит-толкатель (Т), соединенные цепью обратной связи (ЦОС) с усилителями, фильтрами, задержками и другими радиотехническими элементами.

Важнейшим параметром ускорителей является фазовая плотность пучка. Рост эмиттанса пучка в ряде случаев связан с переходом когерентных колебаний в некогерентные. Сегодня для СП созданы мощные усилители, с помощью которых стало возможным в значительной мере уменьшать амплитуду когерентных колебаний быстрее процессов, приводящих к переходу таких колебаний в некогерентные [2]. В связи с этим возникла потребность расчета предельно возможных параметров систем подавления, в том числе с режимами ограничения или ступенчатого изменения мощности.

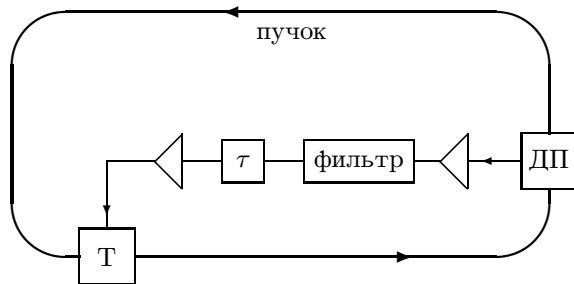


Рис. 1: Схема системы подавления поперечных когерентных колебаний.

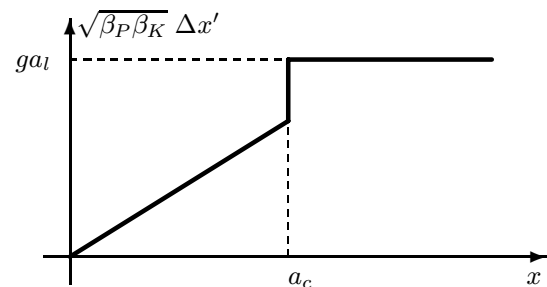


Рис. 2: Передаточная функция для СП с ограничением по силе коррекции.

После пионерской экспериментальной работы на SPS в ЦЕРН [3], где исследовался режим “bang–bang” со специальной передаточной функцией ЦОС (см. рис. 2), начаты экспериментальные исследования нелинейных режимов с целью повышения эффективности СП по темпу подавления. Одним из направлений таких работ стали исследования режимов, когда при амплитудах когерентных колебаний больше заданного значения скачкообразно увеличивается сила коррекции, которая для еще больших амплитуд остается постоянной и зависит только от направления движения сгустка в толкателе (режим “bang–bang” [3] или “logical regime” [4, 5]). Первые экспериментальные данные, полученные на SPS в ЦЕРН [5], указывают на увеличение темпа подавления когерентных поперечных колебаний в некото-

рых нелинейных режимах. Аналогичные указания имеются в данных численных расчетов, позволяющих оценить темп подавления в нелинейных режимах (см., например, [4]).

В настоящей работе развивается аналитический подход решения задачи о подавлении остаточных колебаний сгустков после инжекции на основе сведения ее к разностным нелинейным уравнениям динамики пучка и последующего применения приближенного подхода для их решения, аналогичного методу Крылова–Боголюбова для нелинейных дифференциальных уравнений. Приводятся приближенные решения и некоторые зависимости, характеризующие основные особенности нелинейного режима подавления остаточных колебаний пучка после инжекции в синхротрон.

## 1. Основные уравнения

Приближенный метод решения нелинейного уравнения динамики пучка в синхротронах при наличии системы отрицательной обратной связи был разработан в работе [6]. Основные положения этого подхода приведены ниже.

Уравнение движения для сгустка, совершающего поперечные колебания с отклонением  $x[n, s]$  от равновесной орбиты в точке  $s$  на  $n$ -м обороте, есть

$$\left[ \frac{d^2}{ds^2} + K(s) \right] x[n, s] = \Delta x'[n] \delta(s - s_K), \quad (1)$$

где  $K(s)$  — коэффициент жесткости магнитной структуры синхротрона;  $\delta$  — дельта-функция Дирака. Величина локального удара в месте расположения толкателя равна  $\Delta x'$ . В (1) не учитываются эффекты, связанные с собственным электромагнитным полем пучка, что вполне допустимо при изучении остаточных колебаний сгустка после инжекции. В [6] показано, что в этом случае дифференциальное уравнение (1) может быть заменено на эквивалентное разностное уравнение, в котором устанавливается связь на разных оборотах  $n$  для отклонений сгустка  $x[n, s_P]$  в месте расположения датчика ДП:

$$\begin{aligned} x[n+2, s_P] - 2x[n+1, s_P] \cos \mu + x[n, s_P] \\ = g f(x[n+1, s_P]) \sin(\mu - \eta) + g f(x[n, s_P]) \sin \eta, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\mu = 2\pi Q$  — набег фазы бетатронных колебаний за оборот;  $Q$  — число таких колебаний за оборот без учета действия толкателя;  $\eta$  — набег фазы бетатронных колебаний между ДП и Т. Функция  $f(x[n, s_P])$  есть передаточная функция ЦОС, устанавливающая связь между величиной смещения центра тяжести сгустка от равновесной орбиты  $x[n, s_P]$  в месте расположения датчика ДП и силой удара  $\Delta x'[n, s_K]$  в толкателе Т:

$$g f(x[n, s_P]) = \sqrt{\beta_P \beta_K} \Delta x'[n, s_K]. \quad (3)$$

Здесь  $\beta_P$  и  $\beta_K$  — значения  $\beta$ -функций в местах расположения датчика ДП и толкателя Т,  $g$  — коэффициент передачи ЦОС.

Уравнение (2) полностью описывает динамику сгустка в синхротроне, когда движение частиц подвержено действию корректирующих устройств СП с линейной или нелинейной передаточными функциями. Оно пригодно как для численных расчетов, так и для построения приближенного решения в аналитической форме.

## 2. Передаточная функция

Обычно передаточную функцию ЦОС считают линейной. В этом случае величина  $\Delta x'[n, s_K]$  прямо пропорциональна смещению  $x[n, s_P]$  в месте расположения датчика ДП:

$$\sqrt{\beta_P \beta_K} \Delta x'[n, s_K] = g f(x[n, s_P]) = g x[n, s_P]. \quad (4)$$

Подставляя  $f(x)$  из (4) в (2), получаем линейное разностное уравнение. Его решение не трудно найти с использованием традиционных методов, например  $Z$ -преобразования [7]. Так, для малых величин  $g$  решение имеет вид

$$x[n, s_P] \simeq a_0 \exp\left(-\frac{g}{2} n \sin \eta\right) \cos(\mu n + \phi_0), \quad (5)$$

где  $a_0$  и  $\phi_0$  — постоянные, зависящие от начальных условий.

Для нелинейных режимов ниже будут проанализированы два случая: с кубическими добавками к линейным членам корректирующего импульса в  $\Delta x'$ , когда

$$g f(x) = gx + gg_3 x^3, \quad (6)$$

и с ограничением силы коррекции (с передаточной функцией вида “bang–bang”), когда зависимость между силой удара и смещением задана нелинейной функцией (см. рис. 2),

$$g f(x) = \begin{cases} ga_n & \text{при } -a_c \leq x_n \leq a_c; \\ ga_l & \text{при } x_n > a_c; \\ -ga_l & \text{при } x_n < -a_c. \end{cases} \quad (7)$$

Если первый пример имеет аналог среди традиционно изучаемых нелинейных уравнений, то второй интересен не только в связи с экспериментом [3]. Действительно, передаточная функция (7) линейна при малых амплитудах колебаний и имеет фиксированное значение при больших амплитудах (при  $|x| > a_c$ ). Значит, такой режим эквивалентен процессу инжекции, когда ударным магнитом обеспечивается “посадка пучка” на равновесную орбиту, а затем происходит подавление остаточных колебаний сгустков в линейном режиме.

С целью упрощения конечных выражений далее будем считать, что набег фазы бета-тронных колебаний  $\eta$  от датчика ДП до толкателя Т равен нечетному числу  $\pi/2$  радиан. Это означает, что  $|\sin \eta| = 1$  и в линейном режиме темп подавления максимален.

### 3. Решение (первое приближение)

Коэффициент передачи  $g$  в (2) для существующих СП является малой величиной. Так,  $g \approx 0.01$  при подавлении неустойчивостей, а при подавлении остаточных колебаний сгустков после инжекции обычно  $g \approx 0.1$ . Таким образом,  $g$  есть малая величина, и уравнение (2) относится к классу слабо нелинейных. В этом случае возможно использование ряда процедур для построения приближенного решения. Так, в работе [6] был успешно применен метод, аналогичный методу Крылова–Боголюбова для отыскания приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения. Этот метод будет использован далее для построения приближенного решения уравнения (2).

Следуя [6] и методу Крылова–Боголюбова, решение (2) следует искать в виде ряда

$$x[n, s_P] = a_n \cos \psi_n + \sum_{m=1}^{\infty} g^m \xi_m(a_n, \psi_n), \quad (8)$$

где  $\xi_i$  — подлежащие определению функции полной амплитуды  $a_n$  и периодические функции фазы  $\psi_n$ . Функции  $\xi_i$  есть малые поправки к основной гармонике  $a_n \cos \psi_n$ . Порядок этих поправок задан малым параметром  $g$ . В свою очередь, амплитуда  $a_n$  и фаза  $\psi_n$  основной гармоники являются функциями  $a_n$ . Для их производных по  $n$  можем записать:

$$\frac{da_n}{dn} = g A_1(a_n) + g^2 A_2(a_n) + \dots, \quad (9)$$

$$\frac{d\psi_n}{dn} = \mu + g \Phi_1(a_n) + g^2 \Phi_2(a_n) + \dots \quad (10)$$

В итоге в первом приближении по малому параметру  $g$  вместо (2) получим

$$A_1(a_n)[\cos(\psi_n + 2\mu) - \cos \psi_n] + a_n \Phi_1(a_n)[\sin \psi_n - \sin(\psi_n + 2\mu)] + \xi_1(a_n, \psi_{n+2}) - 2\xi_1(a_n, \psi_{n+1}) \cos \mu + \xi_1(a_n, \psi_n) = f(a_n \cos \psi_n) - f(a_n \cos(\psi_n + \mu)) \cos \mu. \quad (11)$$

Приравнивая коэффициенты Фурье в левой и правой частях уравнения (11), находим все неизвестные величины.

#### 4. Нелинейный режим с кубическими поправками в силе коррекции

Для СП с кубическими поправками в передаточной функции вида (6) для основной гармоники из (11) получаем

$$-2A_1(a_n) = a_n + (3g_3/4) a_n^3; \quad (12)$$

$$\Phi_1(a_n) = 0, \quad (13)$$

а для комбинационных гармоник имеем уравнение

$$\xi_1(a_n, \psi_{n+2}) - 2\xi_1(a_n, \psi_{n+1}) \cos \mu + \xi_1(a_n, \psi_n) = (g_3/8) a_n^3 (\cos 3\psi_n - \cos(3\psi_n + 4\mu)). \quad (14)$$

Из (12) можно определить темп подавления колебаний, так как согласно (9) имеем

$$da_n = -\frac{g}{2} \left( a_n + \frac{3g_3}{4} a_n^3 \right) dn. \quad (15)$$

Выполняя интегрирование в (15) при  $g_3 = 0$ , имеем

$$a_n = a_0 \exp(-gn/2). \quad (16)$$

Формула (16) для  $a_n$  совпадает с хорошо известным результатом для СП с линейной передаточной функцией (см. формулу (5) при  $\sin \eta = 1$ ).

Выполняя интегрирование в (15) при  $g_3 \neq 0$ , получаем следующее выражение для амплитуды колебаний основной гармоники:

$$a_n = \frac{a_0 \exp(-gn/2)}{\sqrt{1 - (3g_3 a_0^2/4)(\exp(-gn) - 1)}}. \quad (17)$$

Формула (17) для  $a_n$  совпадает с аналогичной амплитудной зависимостью для нелинейного дифференциального уравнения вида  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon(\dot{x} + \lambda \dot{x}^3)$ .

Принимая во внимание (13), получаем из (10) для фазы колебаний

$$\psi_n = \mu n + \phi_0. \quad (18)$$

Таким образом, в первом приближении частота не зависит от нелинейных добавок, в то время как амплитуда уменьшается со временем в соответствии с зависимостью (17).

Из (14) ясно, что кубический удар возбуждает третью гармонику колебаний. В итоге в первом приближении решение (2) для  $n \geq 1$  есть

$$x[n, s_P] = a_n \cos(\mu n + \phi_0) - \frac{gg_3}{16 \sin \mu} a_n^3 \sin(3\mu n + 3\phi_0 - \mu), \quad (19)$$

где амплитуда  $a_n$  задана в (17) и  $\mu = 2\pi Q$ .

Отношение асимптотик амплитуд колебаний в линейном и нелинейном режимах в первом приближении согласно (16) и (17) есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n(\text{linear})}{a_n(\text{nonlinear})} = \sqrt{1 + \frac{3g_3}{4} a_0^2}. \quad (20)$$

Таким образом, в нелинейном режиме при  $g_3 < 0$  темп изменения амплитуды колебаний медленнее, чем в линейном режиме (при  $g_3 = 0$ ). Это вполне естественно, поскольку при  $g_3 < 0$  сила удара в нелинейном режиме меньше, чем в линейном. И наоборот, когда  $g_3 > 0$ , амплитуда со временем уменьшается быстрее в нелинейном режиме. Данный эффект может быть использован при подавлении остаточных колебаний после инъекции сгустка в синхротрон. Однако, как это видно из сравнения (20) и (6), выигрыш в изменении амплитуды меньше, чем вклад нелинейных добавок в величину корректирующего импульса. В связи с этим использование данного эффекта оправдано только при достаточном запасе в мощности оконечных усилителей, применяемых для запитки толкателей. Кроме того, необходимо помнить о комбинационных гармониках, возбуждаемых в нелинейном режиме.

Чтобы сделать определенные утверждения для подавления неустойчивостей в нелинейном режиме, необходимо провести дополнительное изучение. В самом деле, в выражениях для  $a_n$  в показателях экспонент поправки от нелинейных членов в первом приближении отсутствуют.

## 5. Нелинейный режим с ограничением силы коррекции

Для СП с нелинейной передаточной функцией (7) для основной гармоники из (11) имеем

$$-A_1(a_n) = \frac{1}{2\pi} \left( (4a_l - 2a_c) \sin \psi_c + (\pi - 2\psi_c) a_n \right), \quad (21)$$

$$\Phi_1(a_n) = 0, \quad (22)$$

где

$$\cos \psi_c = \frac{a_c}{a_n} \quad \text{при} \quad a_n > a_c \quad \text{и} \quad \psi_c = 0 \quad \text{при} \quad a_n < a_c. \quad (23)$$

В отличие от режима с кубической нелинейностью, наряду с основной гармоникой будут возникать не только третья, но и более высокие гармоники, что типично для решений нелинейных уравнений. В настоящей работе выражения для таких решений не приводятся. Из (22) также ясно, что в отношении фазы колебаний для СП с ограничением силы коррекции справедливы те же утверждения, что и приведенные в предыдущем разделе.

Из (21) с учетом (9) нетрудно найти темп изменения амплитуды со временем. Если  $a_n \leq a_c$ , то зависимость амплитуды  $a_n$  от  $n$  совпадает с (16). При  $a_n \gg a_c$  получаем

$$a_n \simeq a_0 - \frac{2}{\pi} g a_l n. \quad (24)$$

Таким образом, для малых амплитуд колебаний (при  $a_n \leq a_c$ ) динамика пучка в точности соответствует линейному режиму, что вполне естественно, поскольку корректирующий импульс толкателя  $\Delta x'$  линейно зависит от отклонения сгустка  $x$  при  $a_n \leq a_c$  (см. рис. 2). Когда начальная амплитуда колебаний соответствует нелинейному режиму (при  $a_0 \gg a_c$ ), то в первом приближении амплитуда  $a_n$  зависит линейно от времени до тех пор, пока корректирующий импульс толкателя постоянен по величине. Отметим, что линейная зависимость амплитуды от времени была также получена в численных расчетах в работе [4].

Из (16) и (24) видно, что отношение изменений амплитуд за оборот в линейном и нелинейном режимах есть

$$\frac{\Delta a_n(\text{при } a_n \leq a_c)}{\Delta a_n(\text{при } a_n > a_c)} \simeq \frac{\pi}{4} \frac{a_0}{a_l}.$$

Следовательно, при  $a_0 \simeq a_l$  изменение амплитуды за оборот в первом приближении больше в нелинейном режиме, чем в линейном, так что в режиме “bang-bang” с начальным значением коэффициента передачи  $ga_l$  за несколько оборотов произойдет большее изменение амплитуды основной гармоники, чем за тот же промежуток времени в линейном режиме. Этот эффект может быть использован для ускорения темпа подавления остаточных колебаний сгустков непосредственно после их инжекции в синхротрон.

## Заключение

В настоящей работе показано, что общий подход, впервые продемонстрированный в [6], может быть эффективно использован для нахождения приближенных решений нелинейных разностных уравнений с различными видами передаточных функций для цепей обратных связей в системах подавления когерентных поперечных колебаний. Он позволяет получать в аналитической форме выражения для различных зависимостей, выявляющих основные особенности нелинейных режимов, в том числе зависимости амплитуды колебаний от времени для определения темпа подавления колебаний.

## Список литературы

- [1] L. Vos. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, A 391(1):56–63, 1997.
- [2] I. N. Ivanov et al. *XVth International Conference on High Energy Accelerators. Hamburg, Germany, July 20–24, 1992*, volume II of *Int. J. Mod. Phys. A (Proc. Suppl.) 2B (1993)*, pages 1034–1036. World Scientific, 1993.
- [3] X. Altuna et al. *CERN Note SPS/ABM/RB/nb1*, Geneva, 1987.
- [4] I. N. Ivanov and V. A. Melnikov. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, A 391(1):52–55, 1997.
- [5] W. Höfle et al. *Particle Accelerators*, 58(1–4):281–286, 1997.
- [6] V. M. Zhabitsky. *EPAC98. Proceedings of the Sixth European Particle Accelerator Conference, Stockholm, 22–26 June 1998*, pages 1380–1382. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1998.
- [7] V. M. Zhabitsky. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, A 391(1):96–99, 1997.