

Определение параметров релаксации пространственного заряда в линейном ускорителе высокой мощности с применением функций статистических семиинвариантов

И.А. Воробьев

ГНЦ РФ Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия

Развитие ЛУ высокой мощности требует разработки эффективных методик расчета таких ускорителей. В данной работе предлагается математический метод обработки результатов моделирования, позволяющий контролировать поведение распределения фазовой плотности при незначительном числе крупных частиц. Метод заключается в применении функций статистических семиинвариантов к анализу эволюции шестимерного фазового объема. Семиинварианты однозначно описывают статистическое распределение и обладают высокой чувствительностью к его изменениям. Это позволяет выявить характер физических процессов и сопоставить полученные численные результаты с физическими экспериментами. Был проведен расчет динамики пучка на примере ЛУ протонов, который состоит из начальной части на структуре с ПОКФ-2 [1] до энергии 3 МэВ на рабочей частоте 150 МГц, секций Альвареса до энергии 100 МэВ с рабочей частотой 300 МГц и основной части (ОЧУ) до энергии 1 ГэВ на рабочей частоте 600 МГц, апертура канала 5 см. Энергия инжекции в ПОКФ 81 кэВ. Структура периода фокусировки в секциях Альвареса – ФОДО длиной $2\beta\lambda$, в ОЧУ – ФОДО длиной $8\beta\lambda$. Части ЛУ состыкованы вплотную без применения согласующих каналов для определения отклика распределения частиц на возмущение и параметров релаксации.

Из многочисленных результатов моделирования динамики пучков известно, что нормализованный среднеквадратический эмиттанс наиболее быстро растет на начальной стадии ускорения и более медленно при высоких энергиях. Из этого возможно предположить, что эволюция распределения частиц в ускорителях может удовлетворять гипотезе Боголюбова [2], согласно которой при условии $T1 \ll T2 \ll T3$ ($T1$ — характерное время столкновения, приводящее к рассеянию частиц на большие углы; $T2$ — время между столкновениями; $T3$ — время макроскопической релаксации) система N тел претерпевает три четко разделенных этапа динамической эволюции.

А. Хаотический этап быстрых изменений координат и скоростей частиц в течение времени $\approx T1$. На этом этапе происходит первое сглаживание, в результате которого теряется точная исходная информация.

В. Кинетический этап наступает по прошествии времени $\approx T1$. На этом этапе вся зависимость системы от времени переходит в медленную функцию $f(x, v, t)$, которая удовлетворяет функциональному уравнению вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} = F(x, v, t).$$

Уравнения Больцмана и Фоккера-Планка являются частными случаями этого уравнения.

С. Гидродинамический этап начинается по прошествии времени, в несколько раз превышающего время столкновения $T1$. На этом этапе происходит второе сглаживание, после которого между скоростями объектов устанавливается равновесие, а зависимость системы от времени целиком содержится в макроскопических параметрах.

При достижении инвариантного закона распределения значительно облегчается расчет потерь частиц вероятностным методом. В работах Баталина В.А. [3], Лебедева А.Н. и

Хлесткова Ю.А [4] отмечается, что столкновениями частиц нельзя пренебречь при высоких энергиях пучка, а гидродинамическое описание имеет ограниченную применимость. В работах Капчинского И.М. [5] Перельштейна Е.А. и Дымникова А.Д. [6] отмечается, что в реальных ускоряющих и фокусирующих каналах распределения, ограниченные в фазовом пространстве, не являются устойчивыми, и для различных фазовых распределений вторые моменты могут быть примерно одинаковы. Из обобщения этих работ следует, что эволюция фазового объема пучка в ЛУ может носить более сложный смешанный характер. Если наблюдается смешанный тип эволюции при $T1 \approx T2 \approx T3$, то аналитическое решение проблемы становится весьма затруднительным и требуется численное определение параметров релаксации распределения пространственного заряда.

В предлагаемом методе уравнения движения решаются наиболее точно численным моделированием с применением крупных частиц, а параметры релаксации определяются дополнительной статистической обработкой. Для этого используются статистические семиинварианты χ_k , определяемые разложением характеристической функции $Px = M(e^{iqx})$ величины x (r — порядок разложения, q — действительная переменная, изменяющаяся от $-\infty$ до $+\infty$):

$$\log P_x(q) = \sum_{k=1}^r \chi_k \frac{(iq)^k}{k!} + o(q^r),$$

а также коэффициенты асимметрии γ_1 и эксцесса γ_2 :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{m_3}{m_2^{3/2}} = \frac{\chi_3}{\chi_2^{3/2}}, \\ \gamma_2 &= \frac{m_4}{m_2^2} - 3 = \frac{\chi_4}{\chi_2^2}, \end{aligned}$$

где $m_k = M(x - Mx)^k$ — центральные моменты распределения k -ого порядка; Mx — математическое ожидание. Для первых шести семиинвариантов имеются следующие соотношения с центральными моментами:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= m_1 = Mx, \\ \chi_2 &= m_2 = Dx = \sigma^2, \\ \chi_3 &= m_3, \\ \chi_4 &= m_4 - 3m_2^2, \\ \chi_5 &= m_5 - 10m_2m_3, \\ \chi_6 &= m_6 - 15m_2m_4 - 10m_3^2 + 30m_2^3. \end{aligned}$$

Для распределения Гаусса семиинварианты любого порядка, начиная с третьего, коэффициенты асимметрии и эксцесса равны нулю.

Начальные параметры пучка следующие: средний ток 150 мА, нормализованный фазовый объём 0,2 см·мрад на уровне 2σ , число крупных частиц в одном сгустке 1000, число сгустков 5. Продольное распределение частиц на входе равномерное с разбросом по энергиям 0,01, инжектируемый пучок согласован с каналом в поперечной плоскости по среднеквадратическим значениям, влияние стенок канала на кулоновское поле не учитывалось, фокусирующие поля линейны.

Расчеты проводились методом крупных частиц по программам PROTON [7] и ее более поздней версии DINAMION. В данной программе для правильного применения принципа суперпозиции полей в релятивистском случае собственное поле пучка насчитывается по формулам Лиенара-Вихерта без учета излучения в лабораторной системе координат. Для адекватного сопоставления характера распределений с различными среднеквадратическими значениями применялась процедура стандартизации к соответствующей приведенной

координате $x = (X - MX)/\sigma_x$, после чего проводилась статистическая обработка. В статистику включены все частицы с отклонением продольной координаты Z на $\beta\lambda/2$ по обе стороны от синхронной частицы центрального сгустка. Результаты расчетов динамики пучка в структуре с ПОКФ-1 с квазистационарным режимом формирования сгустков представлены на рис. 1 для микроканонического распределения, а на рис. 2–3 — в структуре с мягким режимом ПОКФ-2 для равномерного и гауссового распределений.

Полученные результаты показывают, что семиинварианты распределений по координатам частиц центрального сгустка до 6-го порядка включительно сходятся к нулю для всех рассмотренных типов распределений в обоих вариантах ПОКФ. Это подтверждает сделанный в ранее выполненной работе [8] (см. рис. 1) вывод о сходимости распределения плотности заряда в поперечной плоскости к закону Гаусса в рассмотренных структурах. Длина релаксации пространственного заряда примерно одинакова для всех типов распределений и составляет в ПОКФ-2 ≈ 70 полупериодов фокусировки. Это указывает на возможность обеспечения стабильного поперечного согласования пучка между ПОКФ и секцией Альвареса для энергии пучка свыше 200 кэВ при нестабильном распределении заряда на выходе источника протонов.

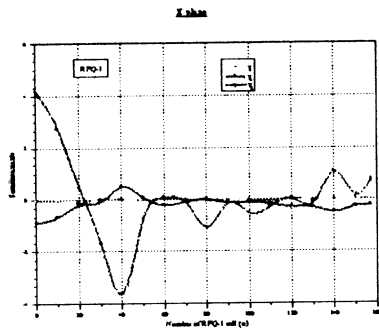


Рис. 1: Зависимость коэффициентов χ_6 , γ_1 и γ_2 от номера ячейки в ПОКФ-1 при микроканоническом начальном распределении.

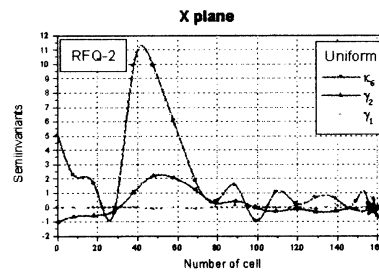


Рис. 2: Зависимость коэффициентов χ_6 , γ_1 (b) и γ_2 от номера ячейки в ПОКФ-2 при равномерном распределении.

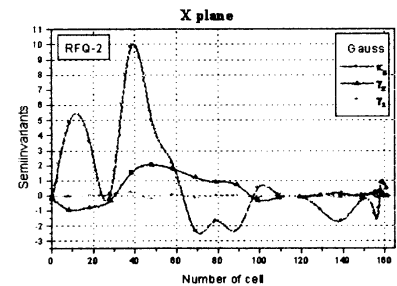


Рис. 3: Зависимость коэффициентов χ_6 , γ_1 и γ_2 от номера ячейки в ПОКФ-2 при распределении Гаусса.

На рис. 4 показаны зависимости семиинвариантов и максимального относительного отклонения частиц от номера фокусирующей линзы в ОЧУ при сквозной прогонке пучка в ЛУ с начальным эмиттансом 0,05 см·мрад на уровне 2σ при микроканоническом распределении. Статистическая обработка проведена при прохождении синхронной частицей середины линз. Длина первичной релаксации составляет ≈ 60 полупериодов фокусировки. Как видно из рис. 4, эволюция распределения пространственного заряда в ОЧУ не завершена.

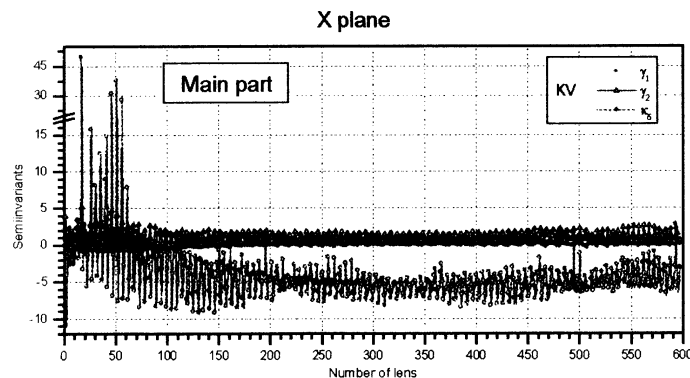


Рис. 4: Зависимость коэффициентов χ_6 , γ_1 и γ_2 от номера фокусирующей линзы в основной части ЛУ на 1 ГэВ.

Применение функций статистических семиинвариантов позволяет выявить колебания плотности пространственного заряда в пучках, рассчитывать структурную схему ЛУ высокой мощности и подбирать его параметры, контролируя поведение фазовой плотности при ускорении.

Список литературы

- [1] Р.М.Венгров и др. Линейный протонный ускоритель с пространственно-однородной фокусировкой на энергию 3 МэВ. – Препринт ИТЭФ, Москва, 1993, №34.
- [2] У.Саслау. Гравитационная физика звёздных и галактических систем. – М.: Мир, 1989.
- [3] В.А.Баталин. Рост эмиттанса пучка в ускорителе ионов, связанный с внутренним трением в пучке. Препринт ИТЭФ, Москва, 1982, №128.
- [4] А.Н. Лебедев, Ю.А.Хлестков. Сильноточные пучки заряженных частиц. – МИФИ, Москва, 1983.
- [5] И.М.Капчинский. Теория линейных резонансных ускорителей. – М.: Энергоиздат, 1982.
- [6] A.D.Dymnikov, E.A.Perelstein. Moment Method in Charged Particle Beam Dynamics. Nuclear Instruments and Methods, 1978, 148 (3), p.567.
- [7] И.А.Воробьев, Е.С.Гальперн, А.А.Коломиец, В.Н.Ляховицкиц, О.С.Сергеева. Численное моделирование динамики пучка в ускорителе ИТЭФ с пространственно-однородной квадрупольной фокусировкой. Препринт ИТЭФ, Москва, 1986, №52.
- [8] И.А.Воробьев. Методика определения сверхмалых потерь частиц по результатам анализа эволюции пространственного заряда в численном моделировании динамики пучка в линейном ускорителе. ВАНТ, серия: Ядерно-физические исследования, вып. 2,3 (29,30), Харьков, 1997.