

Распределение фазовой плотности и теоретические предельные характеристики по поперечному движению в RFQ

Ю.А. Буданов

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий, Протвино, Россия

1. Предельное распределение фазовой плотности

Если уравнения движения в поперечной плоскости линейны

$$\ddot{x} + Q_x(\tau)x = 0, \quad \ddot{y} + Q_y(\tau)y = 0, \quad (1)$$

то при ряде дополнительных ограничений существуют специальные распределения частиц в фазовом пространстве, приводящие к линейности сил кулоновского взаимодействия, приведенные, например, в [1],[2]. Широко известно микроканоническое распределение фазовой плотности [1]. Однако оно имеет смысл лишь при ненулевых значениях поперечных эмиттансов. В случае же эмиттанса, равного нулю, и предельных значений тока соответствующее фазовое распределение можно описать приведенным здесь образом.

Пусть поперечное сечение пучка есть канонический эллипс с полуосями $r_x(\tau), r_y(\tau)$ и с равномерным распределением заряда по сечению, тогда уравнения движения отдельных частиц в пучке

$$\ddot{x} + \left[Q_x(\tau) - \frac{2r_c^2}{r_x(r_x + r_y)} \right] x = 0, \quad \ddot{y} + \left[Q_y(\tau) - \frac{2r_c^2}{r_y(r_x + r_y)} \right] y = 0, \quad (2)$$

$r_c^2 = 2I\lambda^2/\beta\gamma^3 I_o$, $I_o = 4\pi\epsilon_o c^3 m_o/e$. Предельные токи определим как такие значения тока, при которых решения (2) будут периодическими с периодом функции $Q(\tau)$ и, таким образом, находящимися на границе области устойчивости.

Пусть состояния частиц на плоскостях (x, \dot{x}) , (y, \dot{y}) описываются отрезками прямых линий (предельный случай эллипса). Поскольку фазовые траектории не могут пересекаться, то будут существовать граничные частицы, периодические траектории которых будут совпадать с огибающими пучка. Тогда для огибающих справедлива следующая система уравнений:

$$\ddot{r}_x + Q_x(\tau)r_x - \frac{2r_c^2}{(r_x + r_y)} = 0, \quad \ddot{r}_y + Q_y(\tau)r_y - \frac{2r_c^2}{(r_x + r_y)} = 0. \quad (3)$$

Для рассматриваемой системы величины x/r_x , y/r_y , $r_x\dot{x} - \dot{r}_x x$, $r_y\dot{y} - \dot{r}_y y$ являются интегралами движения, а сама функция распределения

$$f(x, \dot{x}, y, \dot{y}; \tau) = f_0 \vartheta \left(1 - \frac{x^2}{r_x^2} - \frac{y^2}{r_y^2} \right) \delta(r_x\dot{x} - \dot{r}_x x) \delta(r_y\dot{y} - \dot{r}_y y) \quad (4)$$

$\vartheta(x) = 1$, если $x \geq 0$ и $\vartheta(x) = 0$, если $x < 0$, δ – дельта-функция. Проверка высказанных предположений для (4) не составляет труда. Действительно, проекции распределения (4) на фазовые плоскости являются отрезками прямых линий, а соответствующее интегрирование (4) дает нам равномерное распределение плотности в эллипсе

$$\rho(x, y) = e \iint f d\dot{x}d\dot{y} = \frac{ef_0}{r_x r_y} \vartheta \left(1 - \frac{x^2}{r_x^2} - \frac{y^2}{r_y^2} \right), \quad (5)$$

$$f_0 = \frac{I}{\pi e v_s}. \quad (6)$$

Для поиска периодических решений (3) (для распределения (4) это приводит и к периодическим решениям (2)) и величины предельного тока можно сделать следующее полезное преобразование. Пусть r_{max} – максимальное значение огибающей, тогда введем нормированные функции и уравнения для них

$$\alpha(\tau) = \frac{r_x}{r_{max}}, \quad \beta(\tau) = \frac{r_y}{r_{max}}, \quad \kappa = r_c^2 / r_{max}^2, \quad (7)$$

$$\ddot{\alpha} + Q_x \alpha - \frac{2\kappa}{\alpha + \beta} = 0, \quad \ddot{\beta} + Q_y \beta - \frac{2\kappa}{\alpha + \beta} = 0. \quad (8)$$

При численном расчете необходимо найти периодические решения системы (8). Ситуация существенно облегчается, если взять начало отсчета в середине фокусирующего периода. Тогда $\alpha(0) = 1$, $\dot{\alpha}(0) = 0$, $\dot{\beta}(0) = 0$, и нужно найти два числа $\beta(0)$ и κ . По κ можно найти предельную плотность тока (не фазовую, а пространственную) для данного канала i_c и предельный ток I_c :

$$i_c = \frac{I_c}{\pi r_{max}^2}, \quad \kappa = \frac{i_c}{i_0}, \quad i_0 = \beta^3 \gamma^3 \frac{I_0}{2\pi S^2}, \quad I_c = \frac{1}{2} \left(\frac{r_{max}}{S} \right)^2 \beta^3 \gamma^3 I_0 \kappa, \quad (9)$$

$S = \beta\lambda$ для RFQ. Хорошее первое приближение $\kappa \sim \nu_0 \mu_0$ позволяет ускорить численный поиск κ при нахождении периодических решений (8).

2. О предельных значениях измеренного эмиттанса

Упомянутый ранее эмиттанс — это традиционное понятие площади проекции фазового объема на плоскость канонически сопряженных координат в определенный момент времени. В случае идеального канала он сохраняется и ограничен снизу лишь нулевым значением. Однако с практической точки зрения, не менее важна и другая характеристика, назовем ее условно измеренным эмиттансом. Измеренный эмиттанс — площадь на плоскости тех же сопряженных координат, занятая представляющими точками пучка, но уже не в определенный момент времени, а при прохождении частицами определенного значения продольной координаты. Зависимость поперечных полей от момента выхода частицы из ускорителя (дефокусировка, фокусировка ускоряющим полем) приводит к тому, что измеренный эмиттанс превышает мгновенное значение эмиттанса. На примере RFQ далее показано, что даже при стремлении к нулю входного эмиттанса измеренный эмиттанс на выходе ускорителя ограничен снизу значением, определяемым лишь геометрией канала и током пучка.

Измеренный эмиттанс зависит от фазы выхода пучка из RFQ. Фазу выхода определим как фазу высокочастотного поля в момент выхода синхронной частицы из ускорителя. Для характерных параметров RFQ [3] форма этого эмиттанса приведена на рис.1 при длине сгустка $\delta\varphi = \pi/3$ и тока $I = 0$. Входной эмиттанс пропорционален площади одного эллипса Флоке на рис. 1, а выходной измеренный эмиттанс при этом пропорционален площади, захватываемой всеми эллипсами на каждой из фигур.

При фазе выхода $\simeq \pi/2$ наблюдается минимум эмиттанса на выходе из ускорителя для обеих плоскостей (см. рис. 2), выберем эту фазу для дальнейшего исследования.

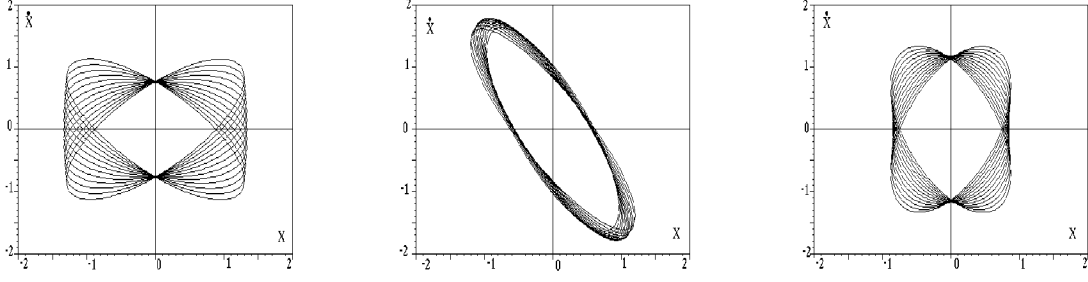


Рис. 1: Эмиттансы ε_{out} при фазах выхода $0, \pi/2, \pi$ и $\delta\varphi = \pi/3$.

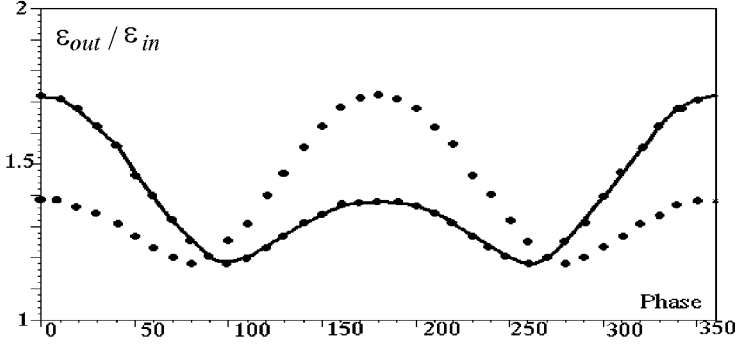


Рис. 2: Зависимость $\varepsilon_{out}/\varepsilon_{in}$ от фазы выхода пучка для поперечных плоскостей.

Воспользуемся далее системой уравнений [1] для модулей функции Флоке при не равном нулю мгновенном эмиттансе ($F_o = \varepsilon_{in}\lambda/\gamma$):

$$\ddot{\rho}_x + Q_x(\tau)\rho_x - \frac{1}{\rho_x^3} - \frac{2r_c^2}{F_0} \frac{1}{\rho_x + \rho_y} = 0, \quad \ddot{\rho}_y + Q_y(\tau)\rho_y - \frac{1}{\rho_y^3} - \frac{2r_c^2}{F_0} \frac{1}{\rho_x + \rho_y} = 0. \quad (10)$$

Отсюда можно численными методами получить параметры эллипсов Флоке и зависимость выходного измеренного эмиттанса от входного эмиттанса и тока. Из рис. 3 видно, что выходной эмиттанс при $\varepsilon_{in} \rightarrow 0$ к нулю не стремится. Это происходит потому, что даже в предельном случае (раздел 1), когда мгновенный эмиттанс представляет собой отрезок прямой линии, этот отрезок совершает на плоскости (x, \dot{x}) движение, обусловленное изменением во времени угла наклона и длины этого отрезка. Таким образом, на выходе из RFQ отрезком очерчивается некоторая площадь, которая и была бы зафиксирована при проведении реального измерения эмиттанса. Предельный эмиттанс можно оценить в рамках гладкого приближения.

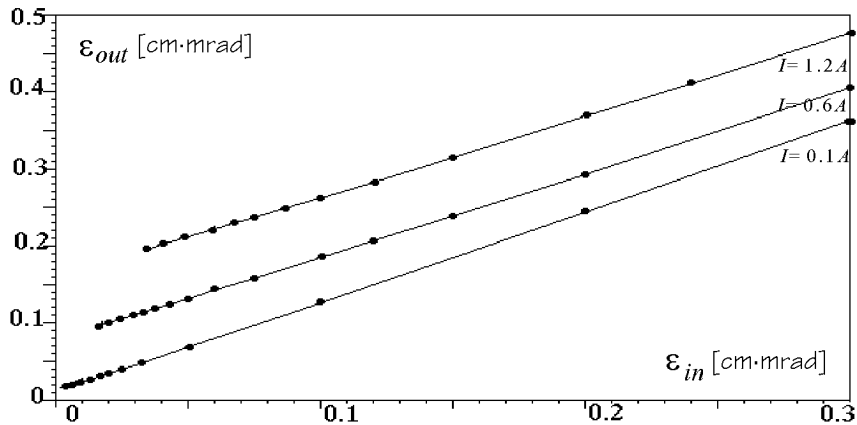


Рис. 3: Функция $\varepsilon_{out} = \varepsilon_{out}(\varepsilon_{in}; I)$.

На рис. 4 изображена схема, соответствующая расчету предельного эмиттанса в гладком приближении. В случае фазовой длины сгустка $\pi/3$ и фазы выхода пучка $\pi/2$ для предельного эмиттанса

$$\varepsilon_0 = \frac{\gamma}{\lambda} R_a^2 \left(1 - \sqrt{\frac{\nu_{0,min}}{\mu_0}} \right) \left(1 - (\sqrt{3} - 1) \sqrt{\frac{\nu_{0,min}}{\mu_0}} \right), \quad (11)$$

R_a – радиус апертуры; $\mu_0, \nu_{0,min}$ – соответственно средняя и минимальная частоты поперечных колебаний в масштабе времени τ , соответствующем изменению на единицу при прохождении синхронной частицей периода фокусировки.

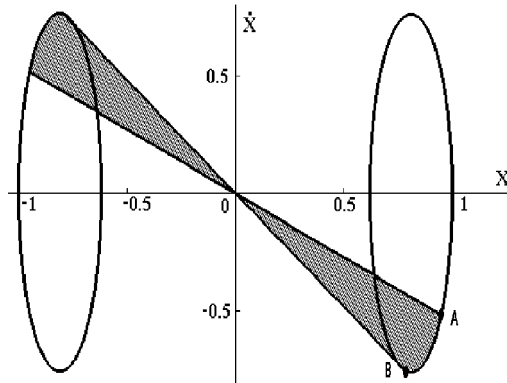


Рис. 4: К расчету ε_0 в гладком приближении, $\delta\varphi = \pi/3, \varphi = \pi/2$.

Список литературы

- [1] И.М.Капчинский. Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. – М.: Атомиздат, 1966.
- [2] Ю.А.Буданов, В.И.Швецов. О решениях уравнения Власова для равномерно заряженного эллипсоидального сгустка. – Труды X Всесоюзного совещ. по ускор. зар. частиц, Дубна, 1987, т.1, с.446-447.
- [3] А.В.Жеребцов, А.П.Мальцев, В.А.Тепляков. Расчетные физические параметры ускоряюще-фокусирующего канала линейного ускорителя с ВЧК-фокусировкой - инжектора в бустер протонного синхротрона ИФВЭ. Препринт ИФВЭ 90-29, Протвино, 1990.