Возбуждение продольных дипольных колебаний при пересечении цугом сгустков критической энергии

П.Т. Пашков

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий, Протвино, Россия

Динамика центров тяжести сгустков цуга в районе критической энергии описывается фазовым уравнением

$$\frac{d}{dt}\Delta p_n = \frac{e}{2\pi R_0}[-V\sin\varphi_s(\varphi_n-\varphi_s)+\sum_{i=1}^{n_B}u_{in}-u_q(\varphi_n)],$$

$$\frac{d\varphi_n}{dt} = \frac{q}{m_0R_0}\frac{\eta}{\gamma}\Delta p_n, \quad n=1,\ldots,n_B, \tag{1}$$

где приняты обозначения: $\Delta p_n = p_n - p_s$ — отклонение импульса центра тяжести сгустка с номером n от синхронного значения $p = p_s$; V — амплитуда ускоряющего напряжения; u_{in} — напряжение, создаваемое в резонаторах сгустком с номером i и воздействующее на сгусток с номером n; φ_n — фаза центра тяжести n-ого сгустка; φ_s — синхронная фаза; u_q — q-я гармоника напряжения, создаваемого в резонаторах цугом сгустков (q — кратность ускорения); e и m_0 — соответственно заряд и масса покоя частицы; n_B — число сгустков в цуге; R_0 — средний радиус ускорителя; γ — релятивистский фактор; $\eta = 1/\gamma_{tr}^2 - 1/\gamma^2$ (γ_{tr} — критическая энергия ускорителя в единицах энергии покоя частицы, являющаяся функцией времени — для увеличения скорости прохождения интенсивных сгустков частиц через критическую энергию обычно используется скачок значения критической энергии). Детальные формулы для напряжений u_{in} содержатся в работе [1].

Суть физического процесса, приводящего к возбуждению радиально-фазовых колебаний центров тяжести сгустков после пересечения цугом критической энергии можно выяснить, рассмотрев случай точечных сгустков. Для цуга точечных сгустков удаётся получить аналитические выражения как для разброса фаз центров тяжести сгустков при энергии пучка ниже критического значения, так и для обусловленного им разброса орбит сгустков, максимальная величина которого достигается примерно через четверть синхротронного колебания после пересечения цугом критической энергии.

Будем исходить из стационарного состояния сгустков частиц при энергии цуга ниже критического значения. При этом фаза центра тяжести n-го сгустка удовлетворяет следующему уравнению:

$$u(n) = V\sin\varphi_s\,(\varphi_n-\varphi_s) + J_qR_s\cos\varphi_q\cos(\varphi-\varphi_s-\varphi_q), \tag{2}$$

где J_q — q-я гармоника тока пучка; R_s — суммарное шунтовое сопротивление резонаторов; через $u(n)$ для краткости обозначено напряжение, создаваемое в резонаторах сгустками цуга и воздействующее на сгусток с номером n: $u(n) = \sum_{i=1}^{n_B} u_{in}$; φ_q — фазовый сдвиг напряжения, создаваемого в резонаторах ВЧ-генераторами, относительно суммарного напряжения на ускоряющих зазорах. Отсюда получается следующее выражение для разброса значений фаз центров тяжести сгустков в стационарном цуге:

$$\Delta\varphi_c = \frac{[u(1)-u(n_B)]|\sin\varphi_s|}{V(\sin^2\varphi_s+\sin^2\varphi_q)}. \tag{3}$$

Таким образом, для нахождения разброса фаз центров тяжести сгустков $\Delta\varphi_c$ достаточно вычислить напряжения, создаваемые сгустками цуга в резонаторах и воздействующие на крайние сгустки с номерами $n = 1$ и $n = n_B$.

Действие сгустков цуга на сгусток с номером $n = 1$ ослабляется в направлении от хвостовой части цуга к головной, причём при переходе от данного сгустка к соседнему амплитуда напряжения умножается на коэффициент $\exp(-l\delta)$ ($\delta = \pi/Q$; целое число l учитывает способ заполнения сгустками частиц сепаратрис ускорителя — $l = 1$ при последовательном заполнении сепаратрис, при $l = 2$ любые два соседних сгустка отделены друг от друга пустой сепаратрисой и т.д.), а его фаза изменяется на величину, равную $l\psi$ ($\psi = \delta \tan\varphi_q$). При достаточно большой добротности резонаторов величина напряжения $u(1)$ зависит также и от предыдущих оборотов пучка в ускорителе, вклад которых можно учесть описанным выше образом. Мы воспользуемся также следующим упрощающим предположением: величина разброса фаз центров тяжести сгустков обычно мала, и можно при вычислении напряжений $u(1)$ и $u(2)$ считать центры тяжести всех сгустков располагающимися точно в синхронных фазах ($\varphi_n = \varphi_s + 2l\pi(n-1)$). С учётом вышесказанного можно получить для напряжения $u(1)$ следующее выражение:

$$u(1) = -U_0\, Re\left[\frac{1}{2} + e^{-[q-l(n_B-1)]\xi}\sum_{k=0}^{n_B-1} e^{-kl\xi}(1 + e^{-q\xi} + e^{-2q\xi} + \ldots)\right], \tag{4}$$

где $\xi = \delta + i\psi$, $U_0 = 2\pi I_0 R_s/Q$ (I_0 — средний ток сгустка за один период ВЧ-напряжения, Q — добротность резонаторов).

Аналогичным образом получается формула для напряжения $u(n_B)$:

$$u(n_B) = -U_0\, Re\left[-\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n_B-1} e^{-kl\xi}(1 + e^{-q\xi} + e^{-2q\xi} + \ldots)\right]. \tag{5}$$

Таким образом, формула (3) для разброса фаз центров тяжести сгустков цуга с учётом соотношений (4) и (5) может быть преобразована к виду

$$\Delta\varphi_c = \frac{U_0|\sin\varphi_s|}{V(\sin^2\varphi_s + \sin^2\varphi_q)}\, Re\,\frac{e^{-l\xi} + e^{-q\xi} - e^{-n_B l\xi} - e^{-q\xi + (n_B-1)l\xi}}{(1 - e^{-l\xi})(1 - e^{-q\xi})}, \tag{6}$$

откуда непосредственно видно, что $\Delta\varphi_c = 0$ в двух случаях — когда в ускорителе имеется единственный сгусток ($n_B = 1$) и в случае n_B равноотстоящих сгустков ($n_B l = q$). Нетрудно также показать, что $\Delta\varphi_c$ максимально в случае, когда цуг сгустков занимает половину орбиты ускорителя (при $n_B l \simeq q/2$).

Здесь следует отметить, что хотя выделение реальной части из выражения (6) не вызывает принципиальных затруднений, в общем случае данная процедура приводит к чрезвычайно громоздкому выражению. По этой причине ниже представлен результат для частного, но наиболее интересного случая $n_B l \simeq q/2$ в предположении, что величина кратности q достаточно велика ($q \gg 1$), а $|\psi|$, $\delta \ll 1$, как это обычно бывает на практике:

$$\Delta\varphi_c = \frac{2I_0R_s|\sin\varphi_s|f(\delta,\psi)}{lV(\sin^2\varphi_s + \sin^2\varphi_q)}, \tag{7}$$

где функция f даётся соотношением

$$f = \frac{\delta}{\delta^2 + \psi^2}\,\frac{\delta\sinh(q\delta/2) + \psi\sin(q\psi/2)}{\cosh(q\delta/2) + \cos(q\psi/2)}. \tag{8}$$

В случае $Q \gg q$ формула (8) упрощается, и для f получается следующее выражение:

$$f \simeq \frac{q\delta}{4}. \tag{9}$$

Следовательно, при достаточно низкой кратности ускорения и относительно большой величине добротности резонаторов функция f не зависит от расстройки резонаторов. Напротив, в другом крайнем случае (при $Q \ll q$), характерном при использовании в ускоряющей системе высокочастотной отрицательной обратной связи (RF feedback), функция f оказывается не зависящей от добротности резонаторов, а целиком определяется расстройкой резонаторов, как это следует из формулы (8):

$$f \simeq \cos^2 \phi_q. \tag{10}$$

На рис. 1 в качестве иллюстрации приведена функция f в зависимости от расстройки резонаторов для $q = 30$ (случай ускорителя ИФВЭ), рассчитанная с помощью формулы (8). Расчёт выполнен для четырёх значений добротности резонаторов. Варианты $Q = 100$ и $Q = 12,5$ примерно соответствуют рассмотренным выше предельным случаям, а вариант $Q = 25$ является промежуточным.

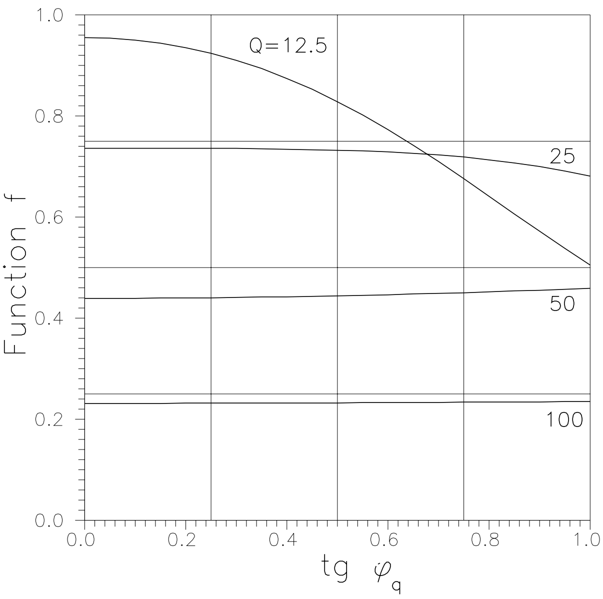

Рис. 1: Зависимость функции f от расстройки резонаторов.

В момент переброса фазы ускоряющего напряжения нарушается стационарность ускоряемого цуга. Начиная с этого момента перестаёт выполняться равенство (2), а справедливым является первое уравнение системы (1). После изменения фазы φ_s наибольшие возмущения напряжений, равные по величине $V|\sin\varphi_s|\Delta\varphi_c$, испытывают крайние сгустки цуга. Амплитуда данных возмущений уменьшается до нуля в моменты времени, когда фазы центров тяжести сгустков цуга занимают положение, являющееся зеркальным отражением их расположения относительно синхронной фазы при $\gamma < \gamma_{tr}$. Таким образом, после завершения скачка критической энергии центры тяжести сгустков начинают совершать обычные фазовые колебания с амплитудой $\Delta\varphi_c$ и частотой Ω_0, где Ω_0 — частота малых фазовых колебаний, причём данная амплитуда оказывается, согласно соотношению (7), обратно пропорциональной введённому выше целому числу l. Следовательно, наибольшие разбросы орбит центров тяжести сгустков после пересечения цугом критической энергии имеют место при последовательном заполнении сепаратрис ускорителя ($l = 1$). Если же, например, соседние сгустки цуга отделены друг от друга свободной сепаратрисой ($l = 2$), то амплитуды колебаний $\Delta\varphi_c$ ослабляются в два раза по сравнению со случаем последовательного заполнения сепаратрис.

Зная $\Delta\varphi_c$, нетрудно вычислить амплитуды ΔR радиально-фазовых колебаний центров тяжести крайних сгустков цуга:

$$\Delta R = \frac{D\Omega_0\Delta\varphi_c}{\eta\omega_{RF}}, \tag{11}$$

где D — функция, описывающая дисперсию орбит в ускорителе; ω_{RF} — радиочастота.

Оценим $(\Delta R)_{max}$ в случае ускорителя ИФВЭ. С этой целью рассмотрим цуг, последовательно заполняющий половину сепаратрис ускорителя ($n_B = 15$, $l = 1$) сгустками частиц с интенсивностью $6 \cdot 10^{11}$ частиц в каждом. Ускоритель ИФВЭ в настоящее время имеет следующие параметры: $R_s = 40 \cdot 7,2$ кОм; $Q = 50$; $V = 400$ кВ; $\cos\varphi_s = 0,35$; $x_0 = 0,5$; $\gamma_{tr} \simeq 9,84$; $\omega_{RF}/2\pi = 6 \cdot 10^6\ c^{-1}$; $\Omega_0/2\pi = 79\ c^{-1}$; $D_{max} = 3,5$ м. Из формулы (7) с учётом данных, представленных на рис. 1, получается следующее значение для разброса фаз центров тяжести сгустков: $\Delta\varphi_c = 0,375$. Далее, подставляя получившееся значение для $\Delta\varphi_c$ в формулу (11), имеем $(\Delta R)_{max} = 2,18$ см.

Результаты настоящей работы, полученные для точечных сгустков, хорошо согласуются с данными численного анализа уравнения фазовых колебаний (1) для случая сгустков конечной длины [2]. Как выяснено, зависимость $(\Delta R)_{max}$ от числа частиц в цуге и шунтового сопротивления резонаторов является линейной. Это объясняется линейной зависимостью от этих величин (при прочих одинаковых условиях) напряжения U_0, входящего в качестве коэффициента в формулы (4)÷(6). Поэтому при увеличении интенсивности ускорителя ИФВЭ до проектного уровня ($1,7 \cdot 10^{12}$ частиц в сгустке) величина $(\Delta R)_{max}$ должна увеличиться примерно в три раза по сравнению с цифрой, полученной в приведенном выше примере. Так, например, в случае цуга из 15 сгустков, последовательно заполняющих сепаратрисы ускорителя, следует ожидать максимальной величины $(\Delta R)_{max} \sim 6$ см, что недопустимо.

Амплитуда радиально-фазовых колебаний центров тяжести сгустков частиц, возникающих при переходе цуга через критическую энергию, может быть существенно уменьшена с помощью отрицательных обратных связей, обычно используемых в протонных синхротронах для ослабления эффектов, обусловленных взаимодействием пучка с резонаторами ускоряющей системы (см., например, работы [$3 \div 5$]). С этой целью возможно как использование нескольких узкополосных цепей, компенсирующих гармоники частоты обращения пучка в полосе пропускания резонаторов, так и широкополосной системы, независимо воздействующей на индивидуальные колебания центров тяжести сгустков цуга.

Список литературы

1. Пашков П.Т. Труды XV Совещания по ускор. заряж. частиц. Т. 2, стр. 200. Протвино, 1996.

2. Пашков П.Т. Препринт ИФВЭ 97-35. Протвино, 1996.

3. Boussard D. Preprint CERN/SPS/85-31(ARF), Geneva, 1985.

4. Pedersen F. Preprint CERN/PS/90-49(AR), Geneva, 1990.

5. Иванов С.В. Препринт ИФВЭ 94-43. Протвино, 1994.