Самосогласованная квантовая система уравнений для заряженного ансамбля, взаимодействующего с собственным полем

А.С. Чихачев
ГКНПЦ им. М.В. Хруничева, Москва, Россия

В различных задачах, связанных с ускорением пучков и сгустков заряженных частиц, воздействие собственных полей на ускоряемые частицы может иметь определяющее значение для состояния системы. В связи с этим в работах [1,2] сформулирован метод моделей, позволяющий учитывать собственные силы при любых соотношениях величин внешних и собственных полей. Функция распределения, являющаяся решением бесстолкновительного кинетического уравнения, может быть любой функцией интегралов движения. При этом распределение в фазовом пространстве должно быть интегрируемым и приводить к разумным значениям плотностей частиц и токов. В конечном счете задача может быть сведена к нелинейным уравнениям для компонент 4-потенциала (см. работу [1]).

Отметим следующее обстоятельство. Если существует только один интеграл движения, то уравнение для потенциала является в общем случае нелинейным дифференциальным уравнением с тремя независимыми переменными, при наличии двух интегралов могут быть получены уравнения для компонент 4-потенциала, содержащие две независимые переменные. Наиболее благоприятной оказывается ситуация при наличии трех интегралов движения — задача может быть сведена к решению нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. работу [2]).

В связи с изучением пучков заряженных частиц представляют большой интерес недавно появившиеся работы [3-5], дающие, по-видимому, еще один способ описания ансамбля частиц. В этих работах содержится физически разумное описание пучков с помощью уравнения Шредингера, в котором постоянная Планка $\hbar$ заменена на эмиттанс пучка ε. При этом в работах по квантово-подобному описанию пучков не учитывается воздействие поля собственного заряда, которое является существенным для плотных сильноточных пучков.

В настоящей работе будут выведены уравнения для ансамбля (заряженной частицы или группы частиц), интенсивно взаимодействующего с собственным полем. При этом рассмотрена чисто квантовая одномерная заряженная система.

Для описания заряженной частицы (или $N \neq 1$ тождественных частиц) будем использовать уравнение для функции Вигнера, определяемой равенством (см. работы [5,6])

$$W(p,q,t) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty} du e^{ipu}\Psi^*(q+\frac{u}{2},t)\Psi(q-\frac{u}{2},t), \tag{1}$$

где $\Psi(x,t)$, удовлетворяет уравнению Шредингера и нормирована на $N = 1, 2, 3...$:

$$\int |\Psi|^2 dq = N.$$

Функция $W(p,q,t)$ аналогична функции распределения в классическом случае. Выполняется основное соотношение

$$\int W(p,q,t)dp = n(q,t) = |\Psi|^2, \tag{2}$$

$n(q,t)$ — плотность частиц. При этом, однако, не обязательно выполнено неравенство $W \geq 0$ при всех значениях p. В соответствии с [6] уравнение для функции Вигнера имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{2}{\hbar} sin\left\{\frac{\hbar}{2}\left[\frac{\partial}{\partial p_W}\frac{\partial}{\partial q_н} - \frac{\partial}{\partial p_н}\frac{\partial}{\partial q_W}\right]\right\} H(p,q,t)W. \tag{3}$$

Индексы W и H означают, что соответствующая производная берется от H или от W.

Если в (2) учесть, что $H = \frac{p^2}{2m} + U(q)$, где m — масса, $U(q)$ — силовая функция, то (3) может быть преобразовано к виду

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{p}{m}\frac{\partial W}{\partial q} = \frac{2}{\hbar} sin\left[\frac{\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}\right](u(q,t)W). \tag{4}$$

В (4) производная $\partial/\partial p$ относится только к W, а производную $\partial/\partial q$ следует брать только от U.

Используя представление синуса в виде бесконечного произведения, из (4) можно получить

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{p}{m}\frac{\partial W}{\partial q} = \prod_{k=1}^{\infty}\left[1 - \frac{1}{\pi^2 k^2}\left(\frac{\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}\right)^2\right]\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}(UW). \tag{5}$$

Уравнения (4) или (5) должны быть дополнены уравнением для поля.

Положим, что силовая функция $U(q,t)$ определяется двумя слагаемыми: внешнее поле, линейное по координате q, удерживающее частицы, и собственное, расталкивающее поле:

$$U(q,t) = \frac{a}{2}q^2 - e\Phi(q), \tag{6}$$

где e — заряд; $\Phi(q)$ — потенциал электрического поля.

Уравнение для потенциала имеет вид

$$\Phi^{''}(q) = 4\pi e n, \tag{7}$$

где n определяется соотношением (2). Система уравнений (4) (или (5)), (7) и (2) является искомой системой, определяющей поведение заряженного ансамбля.

Отметим далее: из (4) следует, что квантовые эффекты существенны для нелинейных сил. Если силовая функция U квадратична по координате q, то все производные, пропорциональные $\hbar^{2s}$ $(s = 1, 2...)$, обращаются в нуль. При наличии внешнего удерживающего поля возможна постановка стационарной задачи:

$$\partial W/\partial t \equiv 0. \tag{8}$$

В этом случае уравнение (4) содержит все производные потенциала $\partial^{(2s)}u/\partial q^{2s}$, пропорциональные $\hbar^{2s}$.

Представляет также интерес рассмотрение решения (5) при наличии зависимости волнового типа: пусть $q - \frac{p}{m}t \equiv \xi$ и W зависит только от ξ. При этом левая часть (5) обращается в нуль, а правая — равна нулю, если

$$\left[1 - \frac{1}{\pi^2 K^2}\left(\frac{\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial p}\right)^2\right]\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}(UW) = 0 \tag{9}$$

при любом целом положительном k. Пренебрегая собственным полем, положим, что силовая функция $U = const \cdot q^{3/2}$, при этом внешняя сила оказывается нелинейной по координате. Тогда в качестве решения (8) можно получить выражение

$$W = A_1(q) exp\left\{i\frac{4\pi k}{\hbar}pq\right\} + A_2(q) exp\left\{-i\frac{4\pi k}{\hbar}pq\right\},$$

где p определяется из соотношения $\xi = q - \frac{p}{m}t$; $A_{1,2}$ — произвольные функции q.

Таким образом, оказывается возможной ситуация, когда уравнение (5) для функции Вигнера имеет счетное множество решений. В случае, когда левая часть (5) не равна нулю, также, по-видимому, состояние системы определяется неоднозначным образом.

Список литературы

[1] Ярковой О.И. // ЖТФ. 1962, 32, № 11, с.1285.

[2] Ярковой О.И. // ЖТФ. 1966, 36, с.988.

[3] Fedele R., Miele G. // Nuovo Cimento. D6 13, 1527 (1991).

[4] Nicola S., Fedele R., Manko V., Miele G. // Physica Scripta. 52, 191 (1991).

[5] Fedele R., Miele G. In.: New perspectives in the Physics of Mesoscopic Systems. World Scientific Co. 1997, p. 120-129.

[6] Мойэл Дж. — В сб.: Вопросы причинности в квантовой механике. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1955, с. 208.