Эффект плотности на квантовые флуктуации излучения в синхротронах

С.В. Кутин, А.Н. Лебедев
Физический институт Академии Наук им. П.Н.Лебедева
Москва, Россия

Мы обсуждаем влияние кратковременной корреляции электронов на квантовые возбуждения колебаний электронов синхротронным излучением. Эффект должен уменьшить "естественный" эмиттанс пучка и может наблюдаться при достижимой плотности пучка и энергиях порядка 1–2 ГэВ.

Введение

Возбуждение синхротронных и бетатронных колебаний в циклических электронных ускорителях и накопительных кольцах за счет квантового характера излучения существенно влияет на их характеристики и режим работы. Вместе с радиационным охлаждением, являющимся чисто классическим эффектом, оно определяет равновесный "естественный" эмиттанс пучка. "Естественный" эмиттанс имеет макроскопическое значение, хотя он пропорционален комптоновской длине волны электрона $\Lambda = \hbar/mc$.

Эффект квантовой раскачки колебаний, имеющий характер диффузионного увеличения фазового объёма пучка, рассчитан теоретически как в квантовой так и в полуклассической теории и подтвержден экспериментом. С одной стороны, полуклассический подход кажется вполне естественным, так как квантовые числа бетатронных и синхротронных колебаний имеют гигантские значения. С другой стороны, он основан на "правдоподобном", полуинтуитивном статистическом подходе, который может быть оправдан только совпадением с экспериментом и квантовой теорией в рамках применимости последней. (Существующая теория использует одночастичные волновые функции.) Полуклассический подход также основан на одночастичной теории, т.е. полностью игнорирует все корреляционные эффекты, связанные с большим числом излучающих частиц.

Так как уменьшение квантовой раскачки имеет очевидную практическую важность, мы попытаемся проанализировать этот подход и расширить его на случай пучка высокой плотности, когда корреляционными эффектами пренебречь нельзя. Квантовое решение данной проблемы представляется слишком сложным, но полуклассический подход приводит к качественно новым эффектам. Основные положения одночастичной теории:

- Квантовая раскачка определяется в основном квантами с энергией $\hbar\omega_0\gamma^3$, лежащей на верхней границе спектра синхротронного излучения.
- Характерное время квантового перехода (время излучения кванта) $\tau_{\text{rad}} \approx 2/\omega_0\gamma$. Время τ_{rad} значительно меньше любых характерных времён движения электрона.
- Импульс отдачи имеет характер мгновенного удара, а последовательность этих импульсов — белого шумового сигнала, приводящего к диффузии частиц в фазовом пространстве.
- Среднее число квантов излученных за время τ_{rad} имеет порядок постоянной тонкой структуры $\alpha \approx 1/137 << 1$. Малость этого параметра значит, что кванты излучаются статистически независимо.

- Излучение каждого кванта связано с потерей энергии (и импульса) только одного электрона. Это означает, что среднее расстояние между электронами достаточно велико. Иначе следует считать, что квант был излучён системой из нескольких частиц, которые поделили импульс отдачи

Нарушение последнего предположения означает когерентность синхротронного излучения. Однако спектр когерентного излучения формируется только если взаимное расположение двух или более электронов сохраняется на нескольких оборотах.

В качестве наглядного примера рассмотрим одномерную цепочку N электронов, распределенных по нормальному закону с неопределённостью положения δ и средним расстоянием между электронами Δ/N, абсолютно случайную на последовательных оборотах. В дальней зоне поле такой системы выглядит как пачка случайно распределённых импульсов, длиной порядка $\approx 1/\omega_0\gamma^3$, повторяющаяся (с другой реализацией распределения) через время $2\pi/\omega_0$. Простые вычисления дают следующее значение для спектральной плотности синхротронного излучения:

$$W(\omega) = W_0(\omega)\left\{N + \left[\frac{\sin^2(\Delta N\omega/2c)}{\sin^2(\Delta\omega/2c)} - N\right]\exp\left(-\frac{\omega^2\delta^2}{2c^2}\right)\right\}, \qquad (1)$$

где $W_0(\omega)$ — спектральная плотность излучения одного электрона (рис. 1). Первое слагаемое описывает полностью некогерентное излучение, а второе — эффекты когерентности. Выражение в квадратных скобках описывает интерференционную модуляцию спектра. Однако в наиболее важной высокочастотной части спектра длина волны меньше неопределенности положения δ, и эта модуляция экспоненциально затухает, что означает полную некогерентность излучения. Отметим, что одномоментно число частиц в зоне излучения длины λ может быть больше единицы.

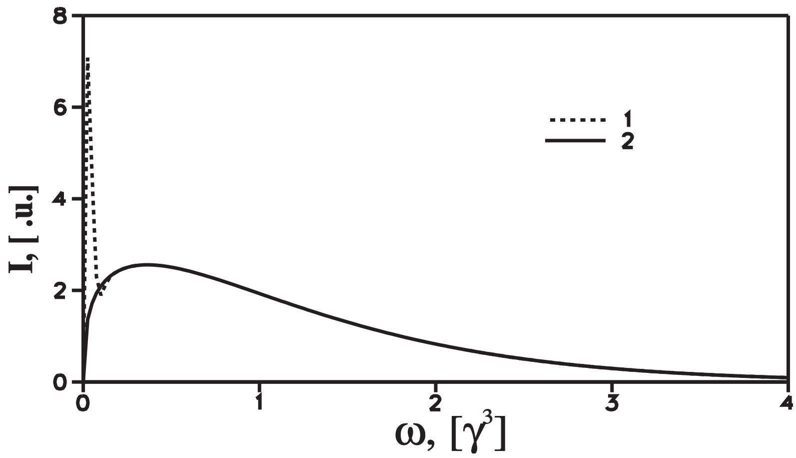

Рис. 1: Спектральная плотность на один электрон одномерной цепочки электронов с фиксированным средним расстоянием и неопределенностью позиции — 1; спектр единичного электрона — 2.

Последнее обстоятельство значительно изменяет импульс отдачи для каждого электрона при излучении одного кванта. На самом деле, n частиц, находящихся одновременно в ближней зоне (зоне излучения) и сохраняющих свое положение в течении времени $\tau_{\rm rad}$, ведут себя как одно целое и делят импульс отдачи и потери энергии. То, что число квантов вырастает пропорционально n^2, не играет существенной роли, так как это происходит за счет мягкой когерентной части спектра, тогда как число квантов высокой энергии пропорционально только n. Для осторожности мы будем считать n меньше чем 137, так что вероятность излучения двух когерентных квантов пренебрежимо мала.

Возбуждение флуктуаций квантами излучения

Рассмотрим для примера линеаризованные синхротронные колебания величины u — отклонения энергии от равновесного значения E_s [2]. При излучении кванта величина du/dt не меняется, а u уменьшается скачком на величину ϵ — энергию кванта, что дает изменение амплитуды

$$\Delta A = -\frac{u}{A}\epsilon + \frac{\epsilon^2}{2A}\left(1 - \frac{u^2}{A^2}\right); \quad (\Delta A)^2 = \frac{u^2}{A^2}\epsilon^2. \tag{2}$$

Усредним это выражение по вероятности излучения кванта $\hbar\omega$ в единицу времени $P(u,\omega)$, которая в полуклассическом приближении равна

$$P(u,\omega) = \frac{1}{\hbar\omega}\left[W^n_{coh}(\omega) + W^n_{incoh}(\omega)\right]. \tag{3}$$

Когерентная часть спектральной интенсивности $W^n_{coh}(\omega)$ не должна зависеть от энергии частицы, а некогерентная равна

$$W^n_{incoh} = np_nW_0(u,\omega) = p_n\left(nW_s(\omega) + nu\frac{\partial W_s(\omega)}{\partial E_s}\right), \tag{4}$$

где n — число электронов, участвующих в акте излучения; рn — вероятность данной реализации. Усредняя, получаем

$$V =< \Delta A P_n(u,\omega) >= -\frac{A}{2}\frac{\partial W_s}{\partial E_s}\frac{\epsilon n}{\hbar\omega} + \frac{1}{4A}\frac{\epsilon^2}{\hbar\omega}\left[W_{coh}(\omega) + nW_s(\omega)\right]; \tag{5}$$

$$D = \frac{1}{2} < (\Delta A)^2 P_n(u,\omega) >= \frac{1}{4}\frac{\epsilon^2}{\hbar\omega}\left[W_{coh}(\omega) + nW_s(\omega)\right]. \tag{6}$$

Для оценки положим $\epsilon = \hbar\omega/n$ и пренебрежем членами с $W_{coh}(\omega)$, которые значительны только при низких энергиях, где ϵ^2 мало. Усредняя по возможным реализациям (числу n) и спектру, мы получаем выражения для диффузионных коэффициентов

$$< V >= -\frac{A}{2}\Gamma_s + \frac{<\epsilon>}{4A}W_s; \qquad < D >= \frac{<\epsilon>}{4}W_s, \tag{7}$$

где W_s — полная интенсивность синхротронного излучения одной частицы, $<\epsilon>\approx <\hbar\omega/n>$ — средняя потеря энергии для одной частицы и $\Gamma_s = \partial W_s/\partial E_s$ — хорошо известная постоянная радиационного затухания [3].

Вычисленные значения для диффузионных коэффициентов позволяют описать эволюцию во времени функции распределения частиц по амплитуде $F(A,t)$ с помощью уравнения типа Фоккера-Планка. Установившееся распределение имеет вид $F_{st} = a\exp(-a^2/2)$, $a = \sqrt{2\Gamma_s/W_s<\epsilon>}$ и дает среднеквадратичное значение установившейся амплитуды:

$$< A^2_{st} >= \frac{W_s <\epsilon>}{\Gamma_s}. \tag{8}$$

Зона коллективного излучения

Под этим термином мы будем понимать область пространства такую, что, находясь в ней в течение короткого времени τ_{rad}, несколько электронов ведут себя как единое целое и делят импульс отдачи. Представление о размерах и конфигурации этой зоны можно получить, рассмотрев поля в ближней зоне. Рассмотрим электрон, движущийся вдоль окружности; точка наблюдения находится на фиксированном угловом расстоянии μ (для простоты движение плоское). Из общих уравнений для запаздывающих полей мы получаем силу, действующую в точке μ [1]:

$$F_\tau(\mu) = \frac{e^2}{R^2}\frac{\sin\mu' - 2\beta^2\cos\mu'\sin\mu'/2 + \gamma^2\beta^2(\sin\mu' - 2\beta^2\sin\mu'/2)(\cos\mu' - 1)}{\gamma^2(2\sin\mu'/2 - \beta\sin\mu')^3}, \tag{9}$$

где

$$\mu' - \mu = 2|\sin\mu'/2|. \tag{10}$$

При малых μ', $\mu \approx \mu' - \beta|\mu'| + \mu'^3/24$ и

$$\frac{R^2}{e^2}F_\tau = \frac{|\mu|}{\gamma^2\mu^3} + \begin{cases} -4\gamma^4/3 & \text{для} \quad \mu > 0 \\ 0 & \text{для} \quad \mu < 0 \end{cases}. \tag{11}$$

Антисимметричную и расходящуюся при $\mu \to 0$ часть мы идентифицируем как кулоновское взаимодействие двух электронов. Она не относится непосредственно к рассматриваемому эффекту хотя бы потому, что сохраняет средний импульс взаимодействующих частиц. Впрочем, мы еще вернёмся вкратце к этому вопросу.

Радиационная часть силы $F_\tau(\mu)$ резко асимметрична и в релятивистском случае практически равна нулю позади излучающей частицы. В точке расположения самой частицы ($\mu \to 0$) сила самодействия равна $4\gamma^4e^2/3R^2$, хорошо известной величине импульса отдачи излучения. Зависимость этой части силы $F_\tau(\mu)$ от угла μ показана на рис 2. Видно, что она становится практически равной нулю на расстоянии μ, примерно равном $(1.5-2)\gamma^{-3}$. Следовательно, мы можем считать, что электроны излучают независимо, если расстояние между ними больше чем $2\gamma^{-3}$.

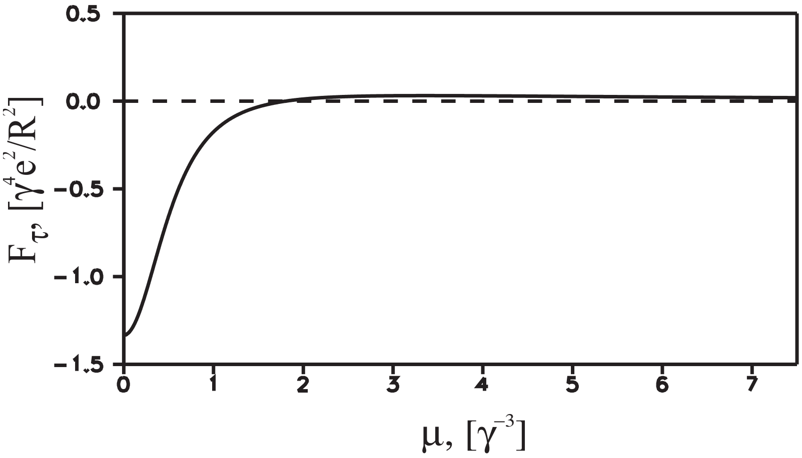

Рис. 2: Зависимость — тангенциальная составляющая электромагнитной силы действующей со стороны заднего электрона на передний без кулоновской части от углового расстояния между электронами.

Когда пара излучает коллективно, задний и передний электроны делят импульс отдачи в некой пропорции. Однако так как к моменту следующего излучения ($\approx 137R/c\gamma$) данная пара с большой вероятностью распадётся, “передний” электрон может оказаться “задним” в другой паре, т.е. в среднем каждый электрон в парном излучении потеряет половину момента фотона. Если n электронов излучают одновременно, каждый получает одну n-ую импульса кванта. Поперечные размеры зоны коллективного излучения могут быть получены из подобных, но более сложных вычислений.

Однако довольно легко увидеть, что поскольку излучение сконцентрировано в малом угле порядка γ^{-1}, можно считать волну плоской. Следовательно, поперечные размеры в γ

раз больше продольных и имеют порядок γ^{-2} в единицах радиуса окружности. Учитывая оценочный характер всех соотношений, будем полагать объём зоны коллективного излучения равным $R^3\gamma^{-7}$. Интересно, что зона коллективного излучения, определённая таким образом, не зависит от частоты излучения и определяется только верхней границей спектра.

Среднее число частиц, находящихся одновременно в ближней зоне зависит от распределения частиц по сгустку. Для простоты выберем распределение Пуассона:

$$p_n = \exp(\bar{n})\bar{n}^n/n!; \qquad < n^{-1} >= (1 - \exp(\bar{n}))/\bar{n}. \tag{12}$$

Здесь $\bar{n} = \nu N$, (ν — отношение объёма зоны к объёму всего банча; N — число частиц в банче). В уменьшении величины n^{-1} (среднего по спектру) и состоит объявленный эффект плотности.

Равновесный эмиттанс

Оценим эффект в случае, когда размеры сгустка определяются только квантовыми флуктуациями излучения. Хотя существующие машины далеко не удовлетворяют данным условиям, можно указать эксперименты по прямому измерению квантового предела. Установившиеся среднеквадратичные размеры сгустка могут быть представлены в виде

$$A_x^2 = C_x \alpha^2 R \Lambda \gamma^2/n, \tag{13}$$

$$A_z^2 = C_z R\Lambda/Q_z^2 n, \tag{14}$$

$$A_\tau^2 = C_\tau 137\alpha \cdot \mathrm{ctg}\phi_\mathrm{s}/\mathrm{q}\gamma\mathrm{n}, \tag{15}$$

где Λ — комптоновская длина волны; α — коэффициент расширения орбит; q — кратность; Q_z — бетатронная частота и ϕ_s — равновесная фаза. Численные коэффициенты C имеют порядок единицы и определяются структурными функциями магнитной системы и распределением декрементов радиационного затухания по степеням свободы [3]. Так как наши рассуждения носят качественный характер, мы не будем их конкретизировать.

В соответствии с вышеизложенным для оценки среднего числа электронов в зоне коллективного излучения мы получаем

$$n = 1 + \left\{ \begin{array}{lll} R^3 N n^{3/2}/\gamma^7 A_x A_z A_\tau & \text{для} & A_z^2 > nR^2/\gamma^4 \\ R^3 N n/\gamma^5 A_x A_\tau & \text{для} & A_z^2 < nR^2/\gamma^4 \end{array} \right. . \tag{16}$$

Последнее условие связано с тем, что вертикальный размер сгустка может быть меньше размера коллективной зоны. Для других степеней свободы это практически не реально. Для простоты заменим это уравнение на

$$N^2 = \frac{A_x^2 A_\tau^2}{R^6}\left(A_z^2 + \frac{R^2 n}{\gamma^4}\right)\frac{(n-1)^2}{n^3}\gamma^{14}. \tag{17}$$

Подставляя (13), мы получаем соотношение между числом частиц в сгустке и величиной n, характеризующей сжатие сгустка за счет эффекта плотности

$$N^2 = N_0^2(n + n_0)\frac{(n-1)^2}{n^3}, \tag{18}$$

где

$$N_0^2 = 137 C_x C_\tau \frac{\Lambda\alpha^2 \cdot \mathrm{ctg}\phi_\mathrm{s}}{\mathrm{Rq}}\gamma^{11}; \qquad n_0 = C_z \frac{\Lambda\gamma^4}{RQ_z^2}. \tag{19}$$

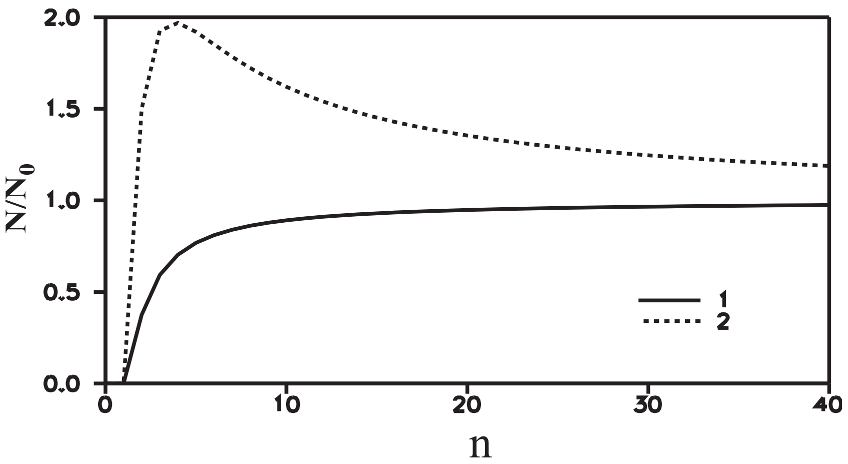

Рис. 3: Зависимость среднего числа электронов в зоне коллективного излучения от числа частиц в сгустке. 1 — для $n_0 = 1$; 2 — для $n_0 = 10$.

В отсутствие посторонних возмущений эффект плотности усиливает сам себя: чем меньше размер сгустка для фиксированного числа частиц, тем больше плотность и меньше квантовая раскачка. Формально это ведет к радиационному коллапсу при $N > N_0$, т.е. $n \to \infty$ (рис.3), хотя при большом n многие сделанные выше допущения нарушаются. Отметим интересное поведение модели — гистерезисный характер при $n_0 > 2$. Это может дать дополнительные возможности для сжатия пучка путем оптимального профилирования функций $N_0(t)$ и $\gamma(t)$. Пороговое значение числа частиц N_0 практически достижимо для энергий порядка 1 ГэВ и имеет значение порядка $10^{11} - 10^{12}$. К сожалению, N_0 резко возрастает с увеличением энергии.

Заключение

Принципиальная возможность уменьшения размера сгустка ниже предела, определяемого квантовыми флуктуациями, открыла бы интересные перспективы для охладительных колец, для получения сверхкоротких электронных сгустков и для источников синхротронного излучения (возможно, когерентного). Поэтому, несмотря на качественный характер, приведённая аргументация дает основания для подробного исследования эффекта: квантово-теоретического и экспериментального. Даже в полуклассическом подходе есть моменты, требующие дополнительного рассмотрения. Например, кулоновское поле в коллективной зоне значительно превышает радиационное, что требует одновременного рассмотрения внутрипучкового рассеяния (этим замечанием авторы обязаны А.Н. Скринскому) По этому поводу мы можем отметить только разную физическую природу этих эффектов, один из которых квантовый, а другой чисто классический, и зависит от распределения скоростей. В дополнение при $n >> 1$ внутрипучковое рассеяние не может считаться парным и требует специального рассмотрения.

Данная работа выполнена в рамках Российской программы “Физика микроволн”

Список литературы

[1] Ландау Л.Д., Лифиц Е.М. *Теория поля.* — Москва, Наука, 1988

[2] Sands M. // Phys. Rev. 97, 470 (1955)

[3] Коломенский А.А., Лебедев А.Н. *Теория циклических ускорителей.* — Москва, Физматгиз, 1962