ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

96–51
На правах рукописи

Боос Герман Эрнстович

# МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕТРАЭДРА И РЕШЁТОЧНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ

01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Протвино 1996

Работа выполнена в Институте физики высоких энергий (г. Протвино).

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук В.Б. Приезжев, доктор физико-математических наук А.В. Разумов.

Ведущая организация – Научно-исследовательский институт ядерной физики (г. Дубна).

Защита диссертации состоится “_____” _____ 1996 г. в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 034.02.01 при Институте физики высоких энергий (142284, г. Протвино Московской обл.).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИФВЭ.

Автореферат разослан “_____” _____ 1996 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 034.02.01 Ю.Г. Рябов

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы**

Поиск новых методов, применимых вне рамок теории возмущений, является одной из важнейших задач в области квантовой теории поля и статистической физики. С этой точки зрения исследование решёточных систем является весьма актуальной областью математической физики, поскольку, с одной стороны, модели на решётках как системы с конечным числом степеней свободы существенно проще для использования разнообразных численных методов вычисления. С другой стороны, для широкого класса решёточных моделей, которые называются интегрируемыми, оказывается возможным точно вычислить различные физические характеристики, такие, как, например, свободная энергия, поверхностное натяжение и др. Несмотря на то что решёточные модели являются лишь довольно грубой аппроксимацией реальных систем, многие из них обладают на удивление богатым физическим содержанием. Это даёт возможность моделировать такие реальные явления, как фазовые переходы. Особенно интересно, если эти модели оказываются интегрируемыми. Классическим примером такой модели является модель Изинга на квадратной решётке.

Существует также множество интереснейших и подчас совершенно неожиданных связей между интегрируемыми моделями и другими областями математической физики и даже чистой математики. Достаточно упомянуть связь двумерных интегрируемых решёточных моделей с двумерными конформными теориями поля, квантовым методом обратной задачи рассеяния и, с другой стороны, применение решёточных моделей к таким чисто математическим проблемам, как классификация узлов. Кроме того, исследование решёточных систем стимулировало развитие совсем молодой области математической физики — так называемой теории квантовых групп.

Отметим, что сейчас известно много двумерных интегрируемых моделей, найдены мощные методы для их исследования, такие, как метод трансфер-матриц

Бакстера, метод анзатца Бете, инверсионный метод Строганова и ряд других. Трёхмерных же интегрируемых моделей найдено значительно меньше. Построение новых интегрируемых моделей в случае двух, трёх и более измерений является важной и актуальной задачей.

Особое место в теории интегрируемых систем занимают специальные алгебраические условия, которым должны удовлетворять локальные решёточные веса. Эти условия по сути и обеспечивают интегрируемость данной модели. В случае двумерных моделей эти условия называются уравнением Янга–Бакстера или уравнением треугольника. В трёхмерном случае аналогичные условия принято называть уравнением тетраэдра.[1] Соответствующее их обобщение на $D$-мерный случай носит название уравнения $D$-симплекса.[2] Нужно отметить, что прямые методы решения уравнений Янга–Бакстера практически не работают, попытка же непосредственно решить уравнение тетраэдра на данном этапе почти обречена на неудачу. Опыт работы с этими уравнениями говорит о важности использования удачного анзатца, а может быть, даже простого наблюдения. Так, оказалась довольно плодотворной идея "ослабить" уравнения Янга–Бакстера и тетраэдра и перейти к их модифицированным аналогам. Надо сказать, что по сути первое условие интегрируемости — так называемое соотношение "звезда–треугольник", которое Онзагер использовал при решении двумерной модели Изинга, является частным случаем именно модифицированного уравнения Янга–Бакстера. В этом смысле модифицированное уравнение появилось ещё до появления самого уравнения Янга–Бакстера. Использование модифицированных уравнений Янга–Бакстера и тетраэдра позволяет существенно расширить класс интегрируемых моделей, что и является основной темой данной диссертации.

**Основные задачи диссертации**

1. Вычислить удельную свободную энергию в термодинамическом пределе для модели на квадратной решётке, больцмановские веса которой обладают инвариантностью по отношению к группе перестановок $S_3$, и найти возможные её обобщения.

2. Разработать идеологию построения трёхмерной интегрируемой модели, используя решение одного модифицированного уравнения тетраэдра, и выйти за рамки так называемого условия "статического предела"[3] для больцмановских весов.

3. Построить "вакуумные" вектора для вершинного аналога трёхмерной модели Замолодчикова.

**Научные результаты и новизна**

1. В диссертации обсуждены физические свойства $S_3$-симметричной модели на квадратной решётке и, в частности, факт наличия трёх фаз, при смене которых происходит спонтанное нарушение симметрии основного состояния. На критической линии, где модель становится интегрируемой, в термодинамическом пределе

[1] Замолодчиков, 1980 г.

[2] Бажанов, Строганов, 1982 г.

[3] Термин "статический предел" был введён Замолодчиковым как предел бесконечно медленных струн в струнной интерпретации модели.

точно вычислена удельная свободная энергия при помощи инверсионного метода Строганова.

2. С помощью обобщения известного преобразования дуальности Бакстера–Келланда–Ву построена эквивалентная $S_3$-симметричной модели на критической линии интегрируемая модель вершинно-граневого типа на квадратной "шахматной" решётке. Как выяснилось, больцмановские веса этой модели удовлетворяют паре модифицированных уравнений Янга–Бакстера. В рамках анзатца типа так называемого "условия льда" построено более общее решение модифицированных уравнений Янга–Бакстера, зависящее от дополнительного непрерывного параметра $q$. Для этой модели получено коммутирующее семейство двухслойных трансфер-матриц.

3. В рамках так называемой BCC–формы[4] элементарных больцмановских весов построено решение одного модифицированного уравнения тетраэдра.

4. Для построенного решения модифицированного уравнения тетраэдра найдена параметризация элементарных весов в терминах эллиптических функций, зависящих от шести параметров $\theta_1, \dots \theta_6$, являющихся обобщением двугранных углов тетраэдра, и эллиптического модуля $k$. В отличие от построенной Мангазеевым и Строгановым модели, в данном случае каждый элементарный вес зависит помимо эллиптического модуля от трёх *независимых* переменных $\theta_i$, более не подчиняющихся условию "статического предела". Тем самым решена задача выхода за рамки "статического предела".

5. Выяснены симметрийные свойства элементарных весов по отношению к группе симметрии куба.

6. Разработана идеология построения интегрируемой модели, веса которой состоят из восьми элементарных весов.

7. Построено решение в двух частных случаях, для одного из которых оказалось выполненным интересное свойство $Z$-инвариантности, которое имеет место для каждого составного веса.

8. Построены "вакуумные" вектора для вершинного аналога модели Замолодчикова.

Все перечисленные выше результаты являются новыми.

**Научная и практическая ценность работы**

Полученные в диссертации результаты имеют приложения в статистической механике в двух и трёх измерениях, а также возможное применение в конформных теориях поля и теории квантовых групп.

Наличие трёх фаз с различным типом симметрии основного состояния у $S_3$-симметричной модели, рассмотренной в диссертации, представляет большой интерес с физической точки зрения. Модель является интересной для численного

[4]Данная аббревиатура, которая есть сокращение термина "Body-Centered-Cube", была введена Бакстером при детальном рассмотрении весов модели Замолодчикова. Отметим, что эта форма сыграла основополагающую роль как при вычислении Бакстером статистической суммы для модели Замолодчикова, так и при дальнейшем обобщении Бакстером и Бажановым двуцветной модели Замолодчикова на случай произвольного числа цветов. Нужно сказать, что и в нашем построении эта конструкция сыграла определяющую роль.

исследования её свойств. Хорошей проверкой правильности численных схем расчётов явилось бы сравнение численных результатов с полученным в диссертации точным ответом для статистической суммы в области фазовой диаграммы, где модель является интегрируемой.

Идеология использования модифицированных уравнений Янга–Бакстера и тетраэдра существенно расширяет возможности в построении новых интегрируемых моделей как для квадратных, так и для кубических решёток. Так, полученное в диссертации решение модифицированного уравнения Янга–Бакстера обобщает $S_3$-симметричную модель на критической линии. Это решение было найдено в рамках некоторого анзатца, так что, естественно, встаёт вопрос о возможности дальнейшего обобщения. С точки зрения алгебраической структуры, интересным является факт наличия непрерывного параметра $q$, напоминающего параметр деформации в квантовых алгебрах. Исследование этого вопроса могло бы пролить свет на возможное обобщение хопфовской структуры квантовых алгебр.

Как уже отмечалось выше, с помощью разработанной в диссертации схемы построения трёхмерных интегрируемых моделей на основе решения одного модифицированного уравнения тетраэдра оказалось возможным выйти за рамки "статического предела". Кроме того, построенные таким образом трёхмерные модели обладают достаточно богатыми свойствами симметрии, что является обнадёживающим обстоятельством с точки зрения возможного обобщения метода Бакстера, предложенного им для вычисления статистической суммы модели Замолодчикова.[5] Также важной, с точки зрения приложений в статистической физике, является возможность параметризовать больцмановские веса модели эллиптическими функциями, зависящими от модуля $k$. Как показывает опыт, в случае двумерных моделей такой параметр является температуроподобным. Таким образом, можно ожидать, что и в данном случае статистическая сумма обладает нетривиальными критическими свойствами при изменении этого параметра.

Построение "вакуумных" векторов для вершинного аналога модели Замолодчикова является первым шагом на пути к построению трёхмерного обобщения анзатца Бете, который в случае двумерных статистических систем является одним из основополагающих методов вычисления спектра трансфер-матриц.

**Апробация работы**

Результаты диссертации опубликованы в работах [1-3] и докладывались на XX Международной конференции по групповым методам в математической физике (Тойонака, Япония, 1994), на Международном семинаре, посвящённом памяти Н.Н.Боголюбова (ОИЯИ, Дубна, 1994), на семинарах в Институте им. Макса Планка (Мюнхен) и Университете Бонна (Германия, 1995), а также на семинарах Отдела теоретической физики и Отдела многомюонного спектрометра ИФВЭ.

[5] Впоследствии этот же метод был применён Бажановым и Бакстером в случае предложенного ими обобщения модели Замолодчикова на произвольное число цветов.

**Структура диссертации**

Диссертация состоит из введения, трёх глав основного текста, заключения и пяти приложений. Список литературы содержит 61 наименование. Объём диссертации 100 страниц.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** дан краткий исторический обзор недавно полученных решений модифицированных уравнений Янга–Бакстера и тетраэдра, а также основные определения, необходимые в дальнейшем изложении.

**В первой главе** рассмотрена $S_3$-инвариантная модель и ассоциированные с ней модели смешанного типа.

В первом разделе дана формулировка $S_3$-инвариантной модели и описаны её физические свойства, а именно, факт наличия трёх фаз для изотропного случая[6], которые обладают различными свойствами симметрии основного состояния:

I — фаза полной симметрии относительно группы $S_3$ (неупорядоченная фаза);

II — фаза полного ферромагнитного порядка, группа $S_3$ нарушена полностью;

III — фаза ферромагнитного порядка по "изинговым" спинам и $Z_3$-ненарушенной симметрии.

Данные результаты получены на основе численного анализа явления асимптотического вырождения ведущих собственных значений трансфер-матрицы, соответствующих определённым представлениям группы перестановок $S_3$. Соответствующая фазовая диаграмма представлена в приложении А. Все три фазы сходятся в критической точке, которая является проекцией критической линии в неизотропном случае, где модель интегрируема. На критической линии точно вычислена удельная свободная энергия в термодинамическом пределе при помощи инверсионного метода Строганова.

Во втором разделе описана обобщённая дуальная конструкция Бакстера–Келланда–Ву. Больцмановские веса полученной таким образом модели вершинно-граневого типа удовлетворяют паре модифицированных уравнений Янга–Бакстера. В рамках анзатца, напоминающего "условие льда" в шестивершинной модели, построено обобщённое решение, зависящее помимо спектральных параметров ещё и от двух непрерывных параметров: параметра деформации $q$ и кроссинг-параметра $\tau$. Исходная модель воспроизводится при $q = \pm i\, e^{\mp 2\pi/3i}$ и $\tau = \sqrt{2}$. Построено также коммутирующее семейство двухслойных трансфер-матриц "шахматного" типа.

**Во второй главе** найдено решение одного модифицированного уравнения тетраэдра и на его основе построены трёхмерные интегрируемые составные модели.

В первом разделе выписано явно модифицированное уравнение тетраэдра в $W$-варианте, которому должны удовлетворять элементарные решёточные веса. В самом общем случае это — переопределённая алгебраическая система $N^{14}$ уравнений на $8\,N^8$ переменных. Также зафиксированы основные обозначения, используемые в

[6]Взаимодействие по горизонтальному и вертикальному направлениям одно и то же.

дальнейшем. Представлен BCC–анзатц для элементарных весов, в рамках которого предполагается искать решение модифицированного уравнения тетраэдра.

Во втором разделе изложена техника использования BCC–формы и приведён набросок доказательства модифицированного уравнения тетраэдра, которое по сути не отличается от доказательства уравнения тетраэдра для модели Бажанова–Бакстера, найденного ранее Кашаевым, Мангазеевым и Строгановым. Доказательство основано на многократном применении двух основополагающих соотношений — именно "инверсионного" соотношения и соотношения "звезда–квадрат". Результатом применения этой техники является сведение $N^{14}$ уравнений к 23 независимым соотношениям.

В третьем разделе введены удобные обозначения, имеющие ясный геометрический смысл. Все соотношения между параметрами разделены на два основных типа: "локальные", т.е. связывающие переменные двух соседних весов, названные соотношениями I типа и соотношения II типа, связывающие между собой параметры четырёх различных весов[7]. В рамках некоторого частного случая, который представляется наиболее интересным, выписано решение системы. Отмечено свойство инвариантности относительно T-преобразования[8] всех соотношений типа I, в то время как соотношения типа II, вообще говоря, T-неинвариантны. В случае T-инвариантности всех соотношений имела бы место также и дуальная версия модифицированного уравнения тетраэдра. В этом случае существуют два возможных решения: модель Бажанова–Бакстера и эллиптическая "шахматная" модель, предложенная Мангазеевым и Строгановым.

В четвёртом разделе введена эллиптическая параметризация полученного решения. Каждый элементарный вес зависит от трёх *независимых* переменных $\theta_i$ и эллиптического модуля $k$. Посредством формул, напоминающих некоторые тождества сферической тригонометрии, введены также четыре зависимых параметра $a_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$. В пределе $k \to 0$ параметры $\theta_i$ переходят в углы сферического треугольника, а параметры $a_i$ становятся его сторонами, причём $a_0 \to 0$. Данный предел сводится к $N$-цветной модели Бажанова–Бакстера. С целью сделать аналогию со сферической тригонометрией более полной введены также аналоги сферических эксцессов $\alpha_\mu$ и два набора "линейных эксцессов" $\beta_\mu$ и $\bar{\beta}_\mu$. Если выполняется условие "статического предела"

$$\theta_1 \, + \, \theta_2 \, + \, \theta_3 \, = \, 2\mathcal{K}, \tag{1}$$

где $\mathcal{K}$ – полный эллиптический интеграл первого рода модуля $k$, что соответствует $\alpha_0 = 0$ и $a_\mu = 0$, то воспроизводится упомянутая выше модель Мангазеева–Строганова. Таким образом, решение модифицированного уравнения тетраэдра зависит от эллиптического модуля $k$ и шести параметров $\theta_1, \ldots, \theta_6$, которые в пределе $k \to 0$ переходят в двугранные углы тетраэдра. Как и в моделях Замолодчикова и Бажанова–Бакстера, эти шесть переменных не являются независимыми, поскольку

[7]В модели Замолодчикова и Бажанова-Бакстера все соотношения II типа переходят в тетраэдральную связь.

[8]T-преобразование просто переставляет веса $W$ и $\bar{W}$.

есть дополнительная "тетраэдральная" связь, эквивалентная четырём линейным соотношениям на "сферические стороны" $a_\mu$ из разных элементарных весов, принимающих участие в модифицированном уравнении тетраэдра.

Пятый раздел посвящён трансформационным свойствам больцмановских весов по отношению к группе $G$-симметрий трёхмерного куба. Именно, приведены формулы для трансформации параметров при двух преобразованиях, генерирующих всю группу $G$: отражения $\tau$ и поворота $\rho$ на $\pi/2$ относительно вертикальной оси. Приведены также формулы, необходимые в дальнейшем для $\lambda$-преобразования, т.е. вращения куба на угол $2\pi/3$ относительно его главной диагонали.

В шестом разделе описана идеология построения интегрируемой составной модели. Именно, рассмотрен составной больцмановский вес, состоящий из 8 элементарных весов. Можно показать, что четыре таких составных веса удовлетворяют "обычному" уравнению тетраэдра смешанного типа, если, в свою очередь, входящие в них элементарные веса удовлетворяют 16 одиночным модифицированным уравнениям тетраэдра. Таким образом, коммутирующее семейство двухслойных трансфер-матриц может быть построено при помощи стандартной процедуры. Представлен ряд "внутренних" соотношений, которым должны удовлетворять параметры каждого из составных весов по отдельности. На основе проведённого численного анализа в общих чертах описана структура решения всей системы соотношений.

В седьмом заключительном разделе второй главы рассматриваются два частных случая, в которых удалось получить явные аналитические формулы для решения всей системы 16 модифицированных уравнений тетраэдра. Именно, в первом частном случае, названном "инверсной" моделью, все пары противоположных[9] элементарных весов в каждом составном весе связаны с точностью до некоторого автоморфизма соотношением инверсии. Во втором частном случае противоположные веса связаны T-преобразованием, о котором шла речь выше. Тогда набор из 16 модифицированных уравнений тетраэдра сводится к системе восьми таких уравнений. Решение этой системы проведено в несколько шагов. В частности, очень удачным оказался некоторый анзатц на параметры, который фактически был нами угадан. Отмечено интересное свойство так называемой $Z$-инвариантности, которое выполняется "внутри" каждого составного веса. Для общего решения свойство $Z$-инвариантности выполняется лишь на двухслойном уровне и не работает "внутри" составного веса. Это свойство не требовалось априори, а получилось само собой. В конце седьмого раздела обсуждается вопрос выбора $\omega$-фаз при извлечении корней $N$-ых степеней.

**Третья** заключительная и самая короткая **глава** диссертации называется: "На пути к построению трёхмерного аналога бете–анзатца". Это попытка обобщить на трёхмерный случай бакстеровский метод $Q$-матриц, успешно применённый для шести- и восьмивершинной моделей. Ещё этот метод иногда называют методом "вакуумных" векторов.

[9] Под противоположными подразумеваются веса, соответствующие противоположным парам кубов в составном кубе.

В первом разделе кратко изложен метод "вакуумных" векторов в том виде, в каком он был применён Бакстером в перечисленных выше случаях.

Во втором разделе построены "вакуумные" вектора для вершинного аналога модели Замолодчикова, найденного недавно Мангазеевым, Сергеевым и Строгановым. Решение параметризовано в терминах углов и сторон сферического треугольника, а также двух наборов из трёх переменных $\psi, \psi', \psi''$ и $\phi, \phi', \phi''$, из которых лишь одна переменная является независимой. Самосогласованность полученных формул обеспечивается с помощью некоторого группового свойства, которому удовлетворяют специальным образом подобранные двумерные вектора, зависящие от сторон сферического треугольника и переменных $\phi$ (или $\psi$). Отмечено, что структура полученного решения, к сожалению, не позволяет построить невырожденные матрицы "подкрутки", необходимые для реализации программы, описанной в первом разделе данной главы, что говорит, по-видимому, о её неприменимости в полном объёме к трёхмерному случаю.

**В приложении А** представлены некоторые поясняющие фигуры из первой главы.

**В приложении Б.1** приведены явные формулы, рационально выражающие зависимые параметры в решении модифицированного уравнения тетраэдра через набор независимых переменных.

**В приложении Б.2** собраны некоторые формулы для эллиптической параметризации из четвёртого раздела второй главы, которые являются обобщением известных тождеств сферической тригонометрии.

**В приложении Б.3** приводится явная форма больцмановских весов в случае числа состояний $N = 2$. Все симметрийные свойства, обсуждавшиеся в пятом разделе второй главы, здесь видны непосредственно.

**В приложении Б.4** приведены окончательные формулы для решения, соответствующего второму частному случаю, который обсуждался в седьмом разделе второй главы.

**В заключении** кратко перечислены результаты диссертации и дальнейшие перспективы этого направления.

## Список литературы


[1] Boos H.E. *Equivalence of $S_3$-invariant lattice model and model of vertex-face type*: Mod. Phys. Lett. A, 1993. Vol. 8, № 33, pp. 3139–3150.

[2] Boos H. E., Mangazeev V. V., Sergeev S. M. *Modified tetrahedron equation and related 3D integrable models, I*: Int. J. of Mod. Phys. A, 1995. Vol. 10, № 28 pp. 4041–4063.

[3] Boos H. E. *Modified tetrahedron equation and related 3D integrable models, II*: Int. J. of Mod. Phys. A, 1996. Vol. 11, № 2 pp. 313–327.



*Рукопись поступила 24 июня 1996 года.*

Г.Э. Боос
Модифицированное уравнение тетраэдра и решёточные интегрируемые модели.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы LaTeX.
Редактор М.Л.Фоломешкина.

---

Подписано к печати 25.06.96. Формат $60 \times 84/8$.
Офсетная печать. Печ.л. 1,13. Уч.-изд.л. 0,86. Тираж 100. Заказ 699.
Индекс 3649. ЛР №020498 17.04.97.

---

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т 96–51 , И Ф В Э, 1996