



ОГУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

96–80
На правах рукописи

Сапонов Павел Алексеевич

СТРУКТУРА КВАНТОВЫХ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР

01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Протвино 1996

Работа выполнена в Институте физики высоких энергий (г.Протвино).

Научные руководители: доктор физико-математических наук В.А. Петров и кандидат физико-математических наук П.Н. Пятов.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук А.В. Разумов и доктор физико-математических наук А.А. Владимиров.

Ведущая организация – Институт проблем микромира им. Н.Н. Боголюбова при физическом факультете МГУ (Москва).

Защита диссертации состоится “_____” 1996 г. в
_____ часов на заседании диссертационного совета Д034.02.01 при Институте
физики высоких энергий (142284, Протвино, Московской обл.).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИФВЭ.

Автореферат разослан “_____” 1996 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д034.02.01

Ю.Г.Рябов

© Государственный научный центр
Российской Федерации
Институт физики высоких энергий, 1996

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертационная работа посвящена исследованию свойств двух квантовых матричных алгебр, играющих ключевую роль в теории квантовых групп и ее приложениях. Квантовые группы возникли во второй половине восьмидесятых годов в основном в контексте квантового метода обратной задачи рассеяния и некоторых смежных областей математической физики, имеющих целью получение точных результатов в моделях квантовой теории поля и статистической физики.

Как известно, теория возмущений и ее многочисленные усовершенствования позволили добиться впечатляющих результатов в самых разных областях теоретической физики. Однако помимо внутренних трудностей теории возмущений, не позволяющих, например, исследовать неперенормируемые модели теории поля, всегда был известен широкий круг важных явлений, которые, в принципе, нельзя описать в рамках теории возмущений. Из многочисленных примеров упомянем лишь нелинейные эффекты самофокусировки в оптике, солитонные волны в гидродинамике и теории плазмы, проблему конфайнмента и спонтанного нарушения симметрии в квантовой теории поля. Многие из таких непертурбативных явлений имеют фундаментальное значение для теории и приложений.

Поэтому вполне естественны значительные усилия, прилагаемые для поиска способов выхода за рамки теории возмущений, и любые точные результаты даже в модельных теориях представляют большой интерес. Как правило, все кардинально новые подходы требуют расширения круга математических понятий и разработки своего наиболее адекватного математического аппарата. Прогресс в области точно решаемых моделей и интегрируемых нелинейных уравнений связан с широким использованием алгебраических и геометрических методов наряду с традиционными аналитическими подходами. Теория квантовых групп явилась частью круга математических понятий, лежащих в основе этих алгебраических методов, и поэтому ее изучение и развитие представляются весьма важной задачей, которая в перспек-

тиве может решительным образом изменить многие основополагающие физические представления (например, представления о структуре пространства-времени).

Цель диссертационной работы состояла в следующем:

- Для алгебры уравнения отражений и алгебры RTT-типа, ассоциированных с замкнутыми симметриями Гекке конечного ранга, изучить возможность дальнейшего расширения аналогий между квантовыми и классическими матрицами, в частности, наряду с известными понятиями квантового следа и детерминанта получить аналоги характеристического тождества и спектра квантовой матрицы.
- Опираясь на геометрическую интерпретацию алгебры уравнения отражений получить все возможные квадратичные алгебры векторных полей на квантовой группе $GL_q(N)$, совместимые со свойством ковариантности и требованием существования базиса Пуанкаре-Биркгофа-Витта. На этой основе изучить возможность редукции алгебры векторных полей на $GL_q(N)$ к алгебре векторных полей на $SL_q(N)$ с помощью операции зануления квантового следа операторной матрицы векторных полей.

Научная новизна и практическая ценность

1. Для алгебры уравнения отражений с генераторами L_i^j был построен базисный набор центральных элементов $\{\sigma_q\}$, переходящий в классическом пределе в базис симметрических полиномов от собственных значений классической матрицы $\|L_i^j\|$. Набор $\{\sigma_q\}$ связан полиномиальными соотношениями с известным базисом центра алгебры уравнения отражений, выражающегося в виде квантового следа от степеней матрицы L . Эти соотношения обобщают формулы Ньютона для степенных сумм и базисных симметрических полиномов.
2. Для операторной матрицы L алгебры уравнения отражений построено характеристическое полиномиальное тождество, представляющее собой квантовый аналог теоремы Кэли-Гамильтона классической теории матриц. Коэффициентами характеристического полинома служат центральные элементы $\{\sigma_q\}$.
3. Для квантовых матричных алгебр RTT-типа, ассоциированных с замкнутыми симметриями Гекке конечного ранга, построены взаимно коммутативные элементы σ_q и найдены квантовые тождества Ньютона, связывающие их с известным ранее коммутативным набором, представляющим собой аналоги следов от степеней матрицы генераторов RTT-алгебры. Рассмотренный класс матричных алгебр содержит в себе семейство алгебр функций на квантовых группах серии A_{n-1} .
4. Найдены четыре семейства квадратичных алгебр, допускающих интерпретацию алгебр инвариантных векторных полей на квантовой группе $GL_q(N)$ и совместимых с требованиями ковариантности относительно кодействия квантовой группы и существования базиса Пуанкаре-Биркгофа-Витта.

Полученные в диссертации результаты могут быть полезны при работе с точно интегрируемыми системами теории поля, моделями статистической физики на решетке с нетривиальными (непериодическими) граничными условиями, а также при построении представлений квантовых групп и алгебр.

Апробация работы

Результаты диссертации опубликованы в работах [1-5] и докладывались на международных конференциях в Алуште (1993 и 1996 гг.), Дубне (1995 г.), Шладминге (Австрия, 1995 г.) и Праге (1996 г.), а также на семинарах Лаборатории теоретической физики ОИЯИ (Дубна) и ОТФ ИФВЭ.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав основного текста, заключения и одного приложения. Список литературы содержит 104 наименования. Объем диссертации 69 страниц.

Содержание работы

Во **Введении** дан краткий обзор нескольких основных направлений в теоретической физике, приведших к возникновению теории квантовых групп. Это прежде всего полностью интегрируемые системы механики и теории поля и связанный с ними квантовый метод обратной задачи рассеяния, а также точно решаемые модели статистической физики. Здесь же приведены результаты работ Янга и Бакстера, в которых введено одноименное уравнение и рассмотрена физическая модель 1+1-мерной теории поля, впервые рассматривавшаяся И.В. Чередником, в которой возникает уравнение отражений.

Вторая глава содержит технические формулы и определения, применяемые в диссертации далее. Они вынесены в отдельную главу для того, чтобы избежать многочисленных отступлений в основном тексте и облегчить его восприятие.

В третьей главе рассматривается алгебра \mathcal{L} , порожденная генераторами L_i^j , перестановочные соотношения между которыми даются уравнением отражений для квантовой матрицы $L \equiv \|L_i^j\|$, составленной из этих генераторов. Для центра алгебры \mathcal{L} вводится новый базисный набор генераторов $\{\sigma_q\}$ в дополнение к известному набору $\{s_q\}$, который представляет собой квантовые следы от степеней матрицы L . В классическом пределе генераторы σ_q переходят в базисные симметрические полиномы от собственных значений матрицы $L_{cl} \leftarrow L$. Генераторы s_q превращаются в степенные суммы тех же переменных. Известно, что степенные суммы и базисные симметрические полиномы связаны соотношениями Ньютона, позволяющими выражать их друг через друга. Для квантовых генераторов $\{\sigma_q\}$ и $\{s_q\}$ найдены обобщенные формулы Ньютона, взаимно однозначно связывающие эти наборы в случае общего положения (когда параметр деформации не является никаким корнем из единицы).

Для квантовой матрицы L найдено полиномиальное характеристическое тождество, обобщающее известную теорему Кэли–Гамильтона о характеристическом полиноме. Коэффициентами в характеристическом тождестве служат генераторы σ_q . Данное тождество позволяет ввести понятие спектра квантовой матрицы и получить явное выражение для ее обратной матрицы.

Четвертая глава диссертации посвящена квантовым матричным алгебрам RTT-типа, ассоциированным с замкнутыми симметриями Гекке конечного ранга. Множество таких алгебр содержит, в частности, алгебры функций на квантовых группах A_{n-1} серии. Для рассматриваемых алгебр определены аналоги генераторов σ_q , полученных в предыдущей главе, и найдены квантовые соотношения Ньютона, связывающие их со “степенными суммами” s_q . В отличие от алгебры уравнения отражений, эти генераторы не центральны в RTT-алгебре, а образуют взаимно коммутативный набор элементов.

В пятой главе рассматривается проблема поиска всех возможных квадратичных алгебр, которые могли бы играть роль инвариантных векторных полей на квантовой группе $GL_q(N)$. При этом требуется, чтобы алгебры удовлетворяли свойствам ковариантности относительно кодействия квантовой группы имели правильную размерность однородных компонент и линейный упорядоченный базис в них (теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта), а также обладали бы корректным классическим пределом. Найдено четыре семейства таких алгебр. Исследовался также вопрос о возможности перехода к подгруппе $SL_q(N)$ путем зануления квантового следа матрицы векторных полей и был получен отрицательный ответ. В настоящее время известно, что переход к подгруппе $SL_q(N)$ в алгебре векторных полей осуществляется приравниванием единице квантового детерминанта матрицы векторных полей.

В заключении перечислены результаты диссертации и кратко рассмотрены некоторые приложения.

Приложение А содержит описание матричных обозначений, применяющихся в диссертации.

Список литературы

- [1] Pyatov P.N., Saponov P.A. "Notes on the Differential Calculi on Quantum Linear Groups". // ТМФ, 1994, т. 100, №1, с. 148 – 152.
- [2] Pyatov P.N., Saponov P.A. "Characteristic Relations for Quantum Matrices". // Journ. Phys. A: Math. Gen. 1995. Vol. 28, p. 4415-4421.
- [3] Pyatov P.N., Saponov P.A. Polynomial Identities on Reflection Equation Algebra. In: *ow-Dimensional Models in Statistical Physics and Quantum Field Theory*. Proceedings of the 34. Internationale Universitätswochen für Kern- und Teilchenphysik. / eds. Harald Grosse, Ludwig Pittner — Schladming (Austria) March 4-11, 1995. // Lecture Notes in Physics, 1996. Vol. 469, Springer, p. 315-320.
- [4] Gurevich D.I., Pyatov P.N., Saponov P.A. Hecke Symmetries and Characteristic Relations on Reflection Equation Algebras. — Preprint JINR E6-96-202. (to appear in Lett. Math. Phys.)
- [5] Pyatov P.N., Saponov P.A. Newton Relations for Quantum Algebras of RTT-Type. — Preprint IHEP 96-76. (to appear in Proc. International Conference "Quantum Field Theory Problems" / ed. A. Vladimirov, Alushta, 1996.)

Рукопись поступила 15 октября 1996 г.

П.А.Сапонов

Структура квантовых матричных алгебр.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы L^AT_EX.

Редактор Н.В.Ежела.

Подписано к печати 08.10.96. Формат 60 × 84/8.

Офсетная печать. Печ.л. 0,6. Уч.-изд.л. 0,5. Тираж 100. Заказ 781.

Индекс 3649. ЛР №020498 17.04.97.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т 96–80, И Ф В Э, 1996
