ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 96-1
ОНФ

Е.М. Болдырев

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ (Численный метод)

Протвино 1996

УДК 681.3.06 М–24

Аннотация

Болдырев Е.М. Движение частицы в электромагнитном поле. (Численный метод): Препринт ИФВЭ 96-1. – Протвино, 1996. – 8 с., 3 рис., библиогр.: 5.

На множестве измеримых функций коэффициентов уравнения движения частицы в произвольном электромагнитном поле находится приближенное решение (класса C^2) этого уравнения как объединение решений уравнения движения с постоянными коэффициентами. Электромагнитные поля могут задаваться как в аналитическом, так и в табулированном виде. В последнем случае необходима интерполяция.

Abstract

Boldirev E.M. Particle Motion in Electromagnetic Field. (Numerical Method): IHEP Preprint 96-1. – Protvino, 1996. – p. 8, figs. 3, refs.: 5.

A set of measurable functions of coefficients for the equation of particle motion in the arbitrary electromagnetic field has an approximate solution (type C^2) of this equation as a union of solutions of equation of motion with constant coefficients. Electromagnetic fields may be set both in the analytical and tabular form. In the latter case an interpolation is needed.

© Государственный научный центр
Российской Федерации
Институт физики высоких энергий, 1996

Нет необходимости говорить о практической важности такой задачи, как определение траектории заряженной частицы, ее импульса и энергии в произвольном электромагнитном поле. Укажем, к примеру, класс таких задач, которые требуют знания траектории заряженной частицы в произвольном электромагнитном поле — это задачи физики высоких энергий, где обычно внешним электромагнитным полем является или статическое магнитное поле, или статическое электрическое поле, причем указанные поля могут быть и существенно неоднородными, типичный этому пример — экспериментальная установка ATLAS в проекте LHC [1]. К другому классу относятся задачи, в которых требуется учет излучения заряженной частицы, и область таких задач не ограничена, включая опять-таки задачи физики высоких энергий.

Поскольку только узкий класс задач Коши, отвечающих уравнению движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, решается аналитическими методами (к такому классу относятся статические и однородные внешние электромагнитные поля, аналитические решения которых хорошо известны), то все другие задачи решаются, как правило, численными методами. В настоящей работе приводится численный метод, отличный от таких традиционных численных методов, как разностный метод, метод конечных элементов и т.п. Отличие заключается в том, что если в традиционных численных методах система дифференциальных уравнений аппроксимируется системой алгебраических уравнений, то в излагаемом численном методе система дифференциальных уравнений аппроксимируется опять-таки системой дифференциальных уравнений, но линейных с постоянными коэффициентами. Несомненным достоинством указанного метода является, как это будет показано ниже, существование и единственность решения, найденного этим методом (для традиционных численных методов это не столь очевидно), и проблема только в скорости сходимости аппроксимационного решения к решению исходной задачи. А для этого достаточно исследовать аппроксимацию коэффициентов уравнения движения их постоянными значениями.

Физическая суть метода заключается в том, что область внешнего электромагнитного поля разбивается так, что на каждом участке разбиения поле достаточно хорошо описывается как статическое и однородное, и мы имеем аналитическое решение уравнение движения. Решение же исходного уравнения движения представляется как объединение указанных аналитических решений на каждом участке разбиения.

В системе координат (x,y,z) вводим ортонормированный базис $\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)$, в котором радиус-вектор частицы с массой m и зарядом e, движущейся в заданном электромагнитном поле, имеет вид $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. И далее для определения траектории движения частицы $\vec{r}(t)$ (t – время лабораторное) в указанном трехмерном пространстве и для ее импульса $\vec{P}(t)$ имеем следующую задачу Коши [2]:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]), \\ \vec{r}(t_0) &= \vec{r_0}, \vec{P}(t_0) = \vec{P_0}. \end{aligned}$$

При этом $e = g_e|e|$, $g_e = +1$ — для положительно заряженной частицы и $g_e = -1$ — для отрицательно заряженной частицы, $\vec{v}$ — скорость частицы, c — скорость света, $\vec{E} = \vec{E}(t, \vec{r}, \vec{P})$, $\vec{H} = \vec{H}(t, \vec{r}, \vec{P})$ — напряженности электрического и магнитного полей соответственно как заданные коэффициенты уравнения движения.

В классе решений уравнения движения $\vec{E} = \vec{E}(t, \vec{r}(t), \vec{P}(t)), \vec{H} = \vec{H}(t, \vec{r}(t), \vec{P}(t))$, т.е. коэффициенты уравнения движения на классе решений этого уравнения, есть функция f(t), область определения которой для задачи Коши есть полуоткрытый промежуток [t_0,t), где t принимает произвольные значения, определяемые физической постановкой задачи. Поскольку в настоящей работе проблема асимптотики решения на бесконечности не ставится, полагаем что t принимает только конечные значения, и, следовательно область определения f(t) есть конечный полуоткрытый промежуток, который является измеримым множеством [3]. Измеримость f(t) на [t_0,t) не ограничивает физической сути задачи, поскольку для измеримости f(t) достаточно потребовать чтобы f(t) принимала конечные значения на [t_0,t) и множество ее точек разрыва непрерывности имело меру нуль [4], что для большинства физических задач, ограничившись классическими траекториями, имеет место.

Итак, мы имеем измеримую функцию f(t) на конечном измеримом множестве [t_0,t), а для таких функций, как известно, (ср. работу [3]) существует последовательность кусочно-постоянных функций на указанном выше множестве с конечным числом конечных значений, которая стремится к f(t) в каждой точке указанного множества. Указанную последовательность кусочно-постоянных функций строим следующим образом. На временном промежутке [t_0,t) вводим разбиение δ_n: $t_0 = t_1 \le t_2 \le ... \le t_{k-1} \le t_k \le ... < t_n$. Обозначим $\Delta^{[k)}$ — промежуток $[t_{k-1}, t_k)$ и, соответственно, $\Delta^{(k]}$ — промежуток $(t_{k-1}, t_k]$, $\Delta^{(k)}$ — промежуток (t_{k-1}, t_k) и $\Delta^{[k]}$ — промежуток $[t_{k-1}, t_k]$, и на каждом таком k-ом промежутке положим $f(t) = f(t_{k-1})$, и тогда на произведении промежутков $\Delta^{[1)} * \Delta^{[2)} * ... * \Delta^{[n)}$, которое есть [$t_0$,t), имеем кусочно-постоянную функцию $f_n(t)$ и, следовательно, последовательность кусочно-постоянных функций $f_n(t)$, которая, как это нетрудно видеть, стремится к f(t) при $\Delta^{[k)}$, стремящемся к нулю. Подобную процедуру сделаем для каждой компоненты векторных функций $\vec{E} = \vec{E}(t, \vec{r}(t), \vec{P}(t))$ и $\vec{H} = \vec{H}(t, \vec{r}(t), \vec{P}(t))$ и следовательно, имеем разбиения δ_1,δ_2,...,δ_m, которые осуществляют указанную аппроксимацию для шести коэффициентов задачи Коши. Для всех указанных коэффициентов имеем разбиение δ, которое есть $\delta_1 * \delta_2 ... * \delta_6$ ($\delta \subset \delta_j$ (j=1,...,m)). Обозначая постоянные коэффициенты на промежутке $\Delta^{[k)}$ как $\vec{E}_0^k$ и $\vec{H}_0^k$, решаем на промежутке $\Delta^{[k)}$ так называемую приближенную задачу Коши:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= g_e(|e|\vec{E}_0^k + \tfrac{|e|}{c}[\vec{v}, \vec{H}_0^k]), \\ \vec{r}(t_{k-1}) &= \vec{r}_{k-1}, \vec{P}(t_{k-1}) = \vec{P}_{k-1}. \end{aligned}$$

Это есть система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, решение которой хорошо известно [4]. Заметим при этом, что именно сам вид уравнения движения с явно выделенной неизвестной функцией в правой части допускает естественным образом указанную аппроксимацию.

Начальные условия приближенной задачи Коши определяются следующей последовательной процедурой: решаем указанную задачу Коши на первом промежутке $\Delta^{[1)}$ с заданными начальными условиями исходной задачи Коши и на этом промежутке находим решение этой задачи $\vec{r}^{[1)}(t)$ и $\vec{P}^{[1)}(t)$ (и, вообще, решения $\vec{r}^{[k)}(t)$ и $\vec{P}^{[k)}(t)$ есть решения приближенной задачи Коши на $\Delta^{[k)}$), а затем мы определяем начальные условия приближенной задачи Коши для $\Delta^{[2)}$ как $\vec{r}^{[1)}(t_2)$ и $\vec{P}^{[1)}(t_2)$ и т.д. Заметим, что тем самым мы не имеем двухточечной задачи, ибо, исключая точку t_0, в остальных точках разбиения мы имеем не заданные начальные условия, но определяемые.

После этого строим решение приближенной задачи Коши для промежутка $[t_0, t)$ как $\hat{\vec{r}}(t) = U_{k=1}^n \vec{r}^{[k)}(t)$ и $\hat{\vec{P}}(t) = U_{k=1}^n \vec{P}^{[k)}(t)$. Эти решения существуют единственны в силу конечности n и в силу того, что на каждом $\Delta^{[k)}$ $(k = 1, ..., n)$ решение приближенной задачи Коши существует и единственно[4].

Далее утверждается, что $\hat{\vec{r}}(t)$ и $\hat{\vec{P}}(t)$ при $\Delta^{[k)}$, стремящемся к нулю, стремятся к решениям исходной задачи Коши, что, конечно, имеет место, если указанные решения непрерывны относительно коэффициентов исходной задачи Коши. Физически это означает, что малое изменение внешнего электромагнитного поля влечет малое изменение движения заряженной частицы в таком поле. Математический аспект этой проблемы в настоящей работе не рассматривается, как и не затрагиваются такие математические проблемы, как сходимость и устойчивость изложенного метода, что, возможно, будет проделано при дальнейшем развитии указанного метода. Пока ограничимся замечанием, что устойчивость, сходимость и сам характер сходимости при современных вычислительных средствах без труда можно исследовать численным моделированием при решении каждой конкретной задачи и достаточно просто осуществить в программном обеспечении этого метода.

В качестве тестовой модели возьмем решение задачи Коши движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле: суперпозиции статического однородного магнитного поля и поля плоской электромагнитной волны, поляризованной по кругу. Выбор этой модели обусловлен тем, что это одна из тех моделей, задача Коши которой является квазилинейной и которая допускает аналитическое решение в параметрическом виде [5]. Рассматривается движение протона с начальной энергией 70 ГэВ и с начальными данными (при $t = 0$) $x_0 = y_0 = z_0 = P_{x0} = P_{y0} = 0$, $P_{z0} = 70$ ГэВ/с в таком внешнем электромагнитном поле для величин магнитного и электрического полей, равных $H = E = 10^5$ Гс и с электромагнитной частотой, равной 10^{15} Гц.

Проделанные расчеты такой модели изложенным методом и сравнение их с аналитическими расчетами позволяют заключить, что для всех компонент движения в случае резонанса и для всех компонент в общем случае, кроме x-, y-компонент траектории, уже при $n = 10^4$ почти везде на временном интервале имеется вполне удовлетворительное соответствие. На рис.1-3 приведены кривые x-компоненты траектории, построенные указанным методом (верхняя кривая) и аналитическим расчетом (нижняя кривая) для $n = 10^4$; 10^5 и 10^6 соответственно. На рисунках ясно прослеживается сходимость решения в зависимости от n.

В заключение автор выражает благодарность А.П.Воробьеву, В.О.Соловьеву за обсуждение и сделанные замечания.

Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 3.

Список литературы

[1] Boldyrev E.M. Calculation of three-dimensional magnetic field for ATLAS barrel and end-cap toroids. – AtLAS internak Note TECH-No-12, 1994.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1973.

[3] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.5. – М.: Наука, 1959.

[4] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.2 – М.: Наука, 1974.

[5] Болдырев Е.М. Движение частицы в постоянном магнитном поле и в поле плоской электромагнитной волны. Препринт ИФВЭ 95-11. Протвино, 1995.

Рукопись поступила 28 декабря 1995 г.

Е.М.Болдырев.
Движение частицы в электромагнитном поле. (Численный метод).

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы LaTeX.
Редактор Н.В.Ежела.

Подписано к печати 03.01.96. Формат $60 \times 84/8$.
Офсетная печать. Печ.л. 0,9. Уч.-изд.л. 0,67. Тираж 240. Заказ 565.
Индекс 3649. ЛР №020498 06.04.92.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 96-1, И Ф В Э, 1996