



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 96-25
ОТФ

В.Е.Рочев

КОНДЕНСИРОВАННЫЕ СРЕДЫ И ФИЗИКА ЧАСТИЦ

Протвино 1996

Содержание

Введение	3
1. Ферромагнетик	5
1.1. Магнитное поле в среде. Парамагнетик	5
1.2. Магнитное упорядочение. Теория молекулярного поля	6
1.3. Обменное взаимодействие и спиновый гамильтониан	8
1.4. Гамильтониан Гейзенберга. Основное состояние ферромагнетика Гейзенберга	10
1.5. Спонтанное нарушение симметрии и квазисредние	13
1.6. Спиновые волны (магноны)	15
1.7. Теоремы Боголюбова и Голдстоуна	18
1.8. Теория Ландау фазовых переходов 2-го рода. Фазовый переход в ферромагнетике	19
2. Сверхпроводник	23
2.1. Эффект Мейсснера	23
2.2. Теория Гинзбурга-Ландау. Фазовый переход в сверхпроводнике. Сверхпроводники 1- и 2-го рода	25
2.3. Квантование потока. Вихревые структуры в сверхпроводнике 2-го рода	28
2.4. Микроскопическая теория сверхпроводимости. Гамильтониан Бардина-Купера-Шриффера. Приближение среднего поля и модельный гамильтониан Боголюбова	31
2.5. Основное состояние сверхпроводника и одночастичные возбуждения. Квазичастицы Боголюбова. Энергетическая щель и механизм сверхпроводимости	33
3. Физический вакуум	36
3.1. Физический вакуум как среда	36
3.2. Спонтанное нарушение симметрии в релятивистской теории. Модель Голдстоуна	37
3.3. Механизм Хиггса. Физический вакуум электрослабых взаимодействий как релятивистский сверхпроводник	41
3.4. Лагранжиан квантовой хромодинамики и симметрии сильных взаимодействий. Киральная симметрия и ее спонтанное нарушение	45
3.5. Конфайнмент цвета. Вакуум квантовой хромодинамики как дуальный сверхпроводник	52
3.6. Экранировка и антиэкранировка заряда. Асимптотическая свобода и великое объединение	54
Список литературы	59

Введение

Развитие физики высоких энергий в течение последних десятилетий привело к созданию теории взаимодействия элементарных частиц — так называемой стандартной модели. Эта теория описывает основные взаимодействия частиц — сильное, слабое и электромагнитное — с единых позиций на основе принципа локальной калибровочной инвариантности, и в этом смысле она действительно соответствует самым высоким стандартам современной фундаментальной науки. Хотя в самой стандартной модели остается немало нерешенных проблем как теоретических, так и экспериментальных (так, например, неясной остается ситуация с частицей Хиггса), но ее несомненные успехи в описании свойств частиц высоких энергий привели к тому, что она прочно утвердилась в физической науке, и знание основ этой теории необходимо любому специалисту как в области физики высоких энергий, так и в смежных областях физики, таких как физика ядра или космология и астрофизика.

В основе стандартной модели лежит описание фундаментальных составляющих материи — кварков и лептонов — как квантовопольевых объектов, взаимодействующих с векторными калибровочными полями — глюонами, фотонами и промежуточными бозонами. Поэтому в самой формулировке ее заложена необходимость обращения к квантовой теории поля с ее весьма сложным и разветвленным аппаратом. Вместе с тем понимание физической сущности многих явлений современной теории частиц возможно и без владения аппаратом квантовой теории поля. Это относится прежде всего к кругу явлений, связанных со спонтанным нарушением симметрии.

Спонтанное нарушение симметрии (СНС) является одним из основных эффектов, определяющих “лицо” современной физики частиц. Впервые существование и роль феномена СНС были осознаны не в физике частиц, а в такой вполне традиционной области физики, как физика конденсированных сред, точнее, в одном из ее наиболее развитых разделов — физике твердого тела. Наиболее известным примером СНС в физике твердого тела является ферромагнетизм. В ферромагнетике спонтанно нарушена симметрия относительно вращений: хотя гамильтониан ферромагнетика инвариантен относительно вращений в пространстве, но само существование спонтанной намагниченности приводит к тому, что основное состояние не обладает инвариантностью относительно произвольных вращений, а лишь “остаточной” инвариантностью относительно вращений вокруг оси намагниченности — симметрия группы $SO(3)$ спонтанно нарушена до “остаточной” симметрии группы $SO(2)$.

Другой пример СНС дает явление сверхпроводимости: в сверхпроводнике эффект Мейсснера (выталкивание магнитного поля из сверхпроводника) означает, по существу, спонтанное нарушение локальной калибровочной симметрии группы $U(1)$, связанной с безмассовостью электромагнитного поля (фотона).

Идеи, возникшие при изучении явлений физики конденсированного состояния вещества (такие как СНС и ряд других) нашли благодатное поле применения в физике частиц. Они составляют основу нашей физической интуиции в этой области сверхмалых расстояний и огромных энергий. Дело в том, что физический

вакуум при высоких энергиях становится подобным некоей нетривиальной физической среде, и установив свойства этой среды, мы можем понять многие явления физики частиц. Так, например, для того чтобы понять такое свойство слабых взаимодействий, как короткодействие, достаточно уяснить, что физический вакуум электрослабых взаимодействий есть релятивистский сверхпроводник, а массивность слабых промежуточных бозонов W^\pm и Z^0 есть не что иное, как релятивистский эффект Мейсснера — спонтанное нарушение локальной калибровочной симметрии электрослабых взаимодействий.

Аналогия с физикой конденсированных сред послужила также толчком к созданию физической картины такого загадочного явления физики сильного взаимодействия, как конфайнмент цвета, т.е. ненаблюдаемость основных составляющих адронной материи — кварков и глюонов. В этой картине физический вакуум сильных взаимодействий рассматривается как дуальный сверхпроводник, т.е. сверхпроводник магнитных зарядов монополей. Конденсация монополей, подобная конденсации электронов в куперовские пары в обычном сверхпроводнике, приводит к дуальному эффекту Мейсснера. Он в данном случае заключается в том, что носители цветных зарядов — кварки и глюоны — не могут существовать в такой дуальной сверхпроводящей среде иначе, как в виде бесцветных связанных состояний адронов.

Аналогии с физикой конденсированных сред помогают понять и такие свойства взаимодействия частиц, как спонтанное нарушение киральной симметрии, асимптотическая свобода, а такая увлекательная отрасль современной физики, как космология ранней Вселенной представляет собой область прямого взаимодействия физики конденсированного состояния с физикой частиц высоких энергий. Поэтому более детальное, чем это обычно делается в общем курсе, ознакомление с теорией конденсированного состояния, особенно с теми ее аспектами, которые связаны со спонтанным нарушением симметрии, представляется необходимым для понимания широкого круга явлений, составляющих основу современной физики частиц.

Настоящее издание представляет собой запись курса лекций, читаемых автором на протяжении ряда лет для студентов 5-го курса физического факультета МГУ, специализирующихся в области физики высоких энергий. Объединение в рамках одного курса основ квантовой теории магнетизма и теории сверхпроводимости с избранными вопросами физики частиц высоких энергий продиктовано мотивированным выше стремлением взглянуть с единой точки зрения на эти разделы физики и, главным образом, стремлением изложить основные идеи современной физики частиц без использования сложного аппарата квантовой теории поля. Основной объединяющей идеей при этом является феномен спонтанного нарушения симметрии, поэтому именно этому явлению посвящено особое внимание.

В главе I излагаются основы теории ферромагнетика Гейзенберга, включая теорию спиновых волн. Теория фазовых переходов 2-го рода служит переходным мостиком к изучению сверхпроводящей среды (глава II). Основу главы III составляет использование идей предыдущих двух глав в применении к физике частиц высоких энергий.

В главах I и II используется гауссова система единиц, а в главе III — общепринятая в квантовой релятивистской физике натуральная система единиц.

1. Ферромагнетик

1.1. Магнитное поле в среде. Парамагнетик

Электромагнитное поле в среде описывается уравнениями Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{D} — электрическая индукция; \mathbf{E} — электрическое поле; \mathbf{B} — магнитная индукция; \mathbf{H} — магнитное поле; ρ — плотность внешних зарядов; \mathbf{j} — плотность внешних токов; c — скорость света. Для стационарных (не зависящих от времени) полей эти уравнения распадаются на две пары. В паре уравнений, описывающих магнитное поле,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

поля \mathbf{B} и \mathbf{H} связаны соотношением

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \quad (1.3)$$

где \mathbf{M} — намагниченность (магнитный момент единицы объема). Эти уравнения должны быть дополнены связью между \mathbf{M} и \mathbf{H} , отражающей свойства среды

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} \quad (1.4)$$

(для изотропной среды). Здесь χ — *магнитная восприимчивость*. В зависимости от знака χ вещества делятся на два класса: *диамагнетики* ($\chi < 0$) и *парамагнетики* ($\chi > 0$).

В главном приближении парамагнитная среда представляет собой набор независимых (слабо взаимодействующих) магнитных диполей. Во внешнем поле \mathbf{H} при температуре T число элементарных диполей, ориентированных в элементе телесного угла $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, описывается распределением Больцмана

$$dN = A \exp\{-\epsilon/kT\} d\Omega. \quad (1.5)$$

Здесь $\epsilon = -\mu H \cos\theta$ — энергия магнитного диполя μ в поле \mathbf{H} ; k — постоянная Больцмана; A — нормировочная постоянная, определяемая из условия нормировки

$$N = \int dN = A \int d\Omega \exp\{\mu H \cos\theta/kT\}, \quad (1.6)$$

где N — число частиц в единице объема. Величина намагниченности M есть среднее значение магнитного момента в направлении поля \mathbf{H} :

$$M = \int \mu \cos \theta dN = \frac{N\mu \int_{-1}^1 \cos \theta \exp\{\mu H \cos \theta / kT\} d \cos \theta}{\int_{-1}^1 \exp\{\mu H \cos \theta / kT\} d \cos \theta}. \quad (1.7)$$

Вычисляя интегралы в (1.7), получаем формулу для M

$$M = N\mu L(\mu H / kT), \quad (1.8)$$

где $L(x) \equiv \text{cth}x - 1/x$ — функция Ланжевена. При низких температурах ($kT \ll \mu H$, то есть $x \rightarrow \infty$), $L(x) \rightarrow 1$ и $M \rightarrow N\mu$. Предельное значение $M = N\mu$ при $T = 0$, $\mathbf{H} \neq 0$ соответствует полному упорядочению в направлении поля \mathbf{H} . Если выключить внешнее поле \mathbf{H} при ненулевой температуре, то намагниченность исчезает: $M \rightarrow 0$ при $H \rightarrow 0$, $T \neq 0$. При высоких температурах ($kT \gg \mu H$)

$$L(x) \simeq x/3,$$

что соответствует закону Кюри для парамагнетиков

$$\chi(T) = \frac{C}{T}, \quad (1.9)$$

где $C = N\mu^2/3k$ — постоянная Кюри.

1.2. Магнитное упорядочение. Теория молекулярного поля

Ряд веществ обладает (при не слишком высоких температурах) свойством магнитной упорядоченности. С микроскопической точки зрения это означает, что элементарные диполи образуют пространственно-упорядоченную структуру при выключенном внешнем поле. Различают три типа магнитно-упорядоченных структур (см. рис.1):

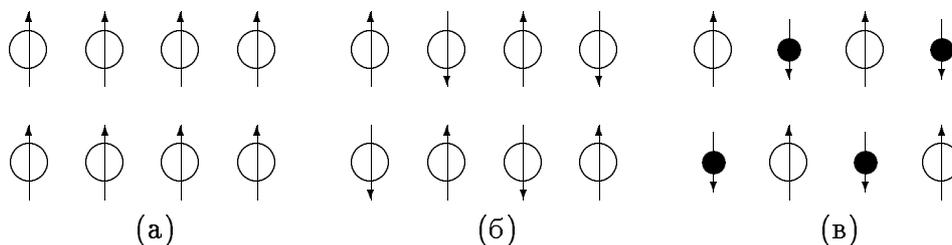


Рис. 1. Типы магнитного упорядочения.

(а) *ферромагнетики* (железо, кобальт, никель) обладают пространственно-упорядоченной структурой, состоящей из ориентированных в некотором направлении диполей; (б) *антиферромагнетики* образуют две одинаковые пространственные подрешетки с противоположно ориентированными диполями; (в) *ферримагнетики* (или *ферриты*) также состоят из двух подрешеток с противоположно ориентированными диполями, но величины магнитных моментов, составляющих подрешетки, не равны, поэтому в отличие от антиферромагнетиков намагниченность ферритов отлична от нуля, как и для ферромагнетиков.

Ферромагнитное состояние существует при температурах ниже точки Кюри T_c . Величина T_c довольно значительна: 1043°К для железа, 1393°К для кобальта и 631°К для никеля. Это означает, что энергия ферромагнитного упорядочения $\epsilon_{fer} \simeq kT_c$ велика. При $T > T_c$ ферромагнетики ведут себя как парамагнетики. То же самое относится и к другим типам магнитного упорядочения.

Первая феноменологическая теория ферромагнетизма была создана Б.Л.Розингом и П.Вейссом. В основе ее лежит предположение о существовании “молекулярного” магнитного поля H_W , связанного с намагниченностью M соотношением

$$H_W = \alpha M. \quad (1.10)$$

Намагниченность ферромагнетика определяется той же функцией Ланжевена, что и в формуле для парамагнетика (1.8), но аргумент ее включает помимо внешнего поля H молекулярное поле H_W :

$$M = N\mu L\left(\frac{\mu}{kT}(H + H_W)\right). \quad (1.11)$$

Соотношения (1.11) и (1.10) являются уравнениями для определения намагниченности M . При выключении внешнего поля $H \rightarrow 0$ существует *спонтанная намагниченность*:

$$M_s \equiv M(H = 0) = N\mu L(\mu H_W/kT). \quad (1.12)$$

При $T \rightarrow 0$ спонтанная намагниченность стремится к предельному значению

$$M_s \rightarrow N\mu, \quad (1.13)$$

соответствующему полному спонтанному упорядочению.

Для высоких температур

$$M = \frac{C}{T}(H + H_W), \quad (1.14)$$

откуда с учетом (1.10) получаем закон Кюри-Вейсса

$$\chi = \frac{C}{T - T_c}, \quad (1.15)$$

где $T_c = \alpha C$ — температура Кюри. Этот закон выполняется с хорошей точностью при $T > T_c$.

1.3. Обменное взаимодействие и спиновый гамильтониан

Теория молекулярного поля не отвечает на вопрос о происхождении поля Вейсса \mathbf{H}_W , т.е. о природе магнитного упорядочения. В рамках классических представлений единственным источником упорядочения может быть магнитное диполь-дипольное взаимодействие. Однако энергия этого взаимодействия явно недостаточна для ферромагнитного упорядочения. В самом деле, энергия диполь-дипольного взаимодействия есть $\epsilon_{md} \sim \mu^2/r^3$, где μ — величина магнитного момента, а r — характерное расстояние. Для атомных кристаллических структур магнитный момент имеет порядок величины магнетона Бора $\mu_B = e\hbar/2mc$, где e — заряд электрона, \hbar — постоянная Планка, m — масса электрона. Характерное расстояние есть величина порядка межатомных расстояний (10^{-8} см). С другой стороны, энергия ферромагнитного упорядочения имеет порядок величины энергии Кюри $\epsilon_{fer} \sim kT_c$. Сравнивая эти энергии, легко увидеть, что отношение $\epsilon_{md}/\epsilon_{fer}$ имеет порядок 10^{-4} , т.е. магнитное диполь-дипольное взаимодействие может обеспечить лишь десятые доли процента от энергий, необходимых для ферромагнитного упорядочения. Следовательно, магнитное упорядочение имеет сугубо квантовую природу, причем по порядку величины энергии взаимодействия можно заключить, что в основе своей это упорядочение должно быть связано с электростатическим взаимодействием электронных оболочек.

Такого рода взаимодействие в самом деле существует и обязано своим происхождением квантовомеханической тождественности частиц.

Рассмотрим *электростатическое* взаимодействие между двумя электронами, помещенными в некоторое внешнее поле. Гамильтониан такой системы есть

$$H = H_0(\mathbf{r}_1) + H_0(\mathbf{r}_2) + H_{int}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2),$$

где H_0 — гамильтониан электрона во внешнем поле, а $H_{int} = e^2/r$ — гамильтониан кулоновского электростатического взаимодействия между электронами, находящимися на расстоянии $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ друг от друга.

Волновая функция системы $\psi(\mathbf{r}_1\mathbf{s}_1, \mathbf{r}_2\mathbf{s}_2)$, зависящая от радиус-векторов частиц $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2$ и их спинов $\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2$, должна удовлетворять принципу Паули

$$\psi(\mathbf{r}_1\mathbf{s}_1, \mathbf{r}_2\mathbf{s}_2) = -\psi(\mathbf{r}_2\mathbf{s}_2, \mathbf{r}_1\mathbf{s}_1).$$

Следовательно, при разбиении ее на координатную (φ) и спиновую (χ) части

$$\psi(\mathbf{r}_1\mathbf{s}_1, \mathbf{r}_2\mathbf{s}_2) = \varphi(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)\chi(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2)$$

мы должны симметризовать или антисимметризовать координатную волновую функцию в зависимости от того, какой симметрией обладает спиновая часть. Как известно из квантовой механики, для состояния с полным спином $S = 1$ (триплетное состояние) спиновая функция χ симметрична, следовательно, φ должна быть антисимметрична. В пренебрежении взаимодействием между электронами несимметризованная координатная волновая функция есть просто произведение волновых

функций электронов. Поэтому в состоянии со спином $S = 1$ координатная волновая функция должна иметь вид

$$\varphi_A(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_a(1)\varphi_b(2) - \varphi_b(1)\varphi_a(2)) .$$

Здесь введены обозначения: $\varphi(1) \equiv \varphi(\mathbf{r}_1)$ и т.п. Индекс a означает, что соответствующий электрон находится в состоянии $|a\rangle$ с энергией ϵ_a (аналогично для b).

В состоянии с полным спином $S = 0$ (синглетное состояние) спиновая функция χ антисимметрична, поэтому φ симметрична

$$\varphi_s(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_a(1)\varphi_b(2) + \varphi_b(1)\varphi_a(2)) .$$

Рассматривая взаимодействие между электронами как возмущение, по обычным формулам квантовой механики мы получим для энергии взаимодействия

$$\begin{aligned} \epsilon_{int} &= \langle H_{int} \rangle = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \sum_{\text{СПИН}} |\psi(1, 2)|^2 \frac{e^2}{r} = \\ &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \{ \varphi_a(1)\varphi_b(2) \mp \varphi_b(1)\varphi_a(2) \}^2 \frac{e^2}{r} = \epsilon_c \mp \epsilon_{\text{обм}} . \end{aligned}$$

Здесь верхний знак относится к триплетному состоянию $S = 1$, а нижний — к синглетному состоянию с $S = 0$. ϵ_c обозначает энергию кулоновского взаимодействия без учета тождественности электронов

$$\epsilon_c = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \varphi_a^2(1)\varphi_b^2(2) \frac{e^2}{r} ,$$

а $\epsilon_{\text{обм}}$ — это энергия интересующего нас *обменного* взаимодействия

$$\epsilon_{\text{обм}} = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \varphi_a(1)\varphi_b(1)\varphi_a(2)\varphi_b(2) \frac{e^2}{r} .$$

Благодаря обменному взаимодействию, полная энергия системы зависит от спина. От знака обменной энергии зависит, каков спин энергетически выгодного, т.е. основного состояния системы. Так, например, для молекулы водорода H_2 обменная энергия отрицательна: $\epsilon_{\text{обм}} < 0$, и энергетически выгодно состояние с $S = 0$, т.е. синглетное. Возможны также и системы с $\epsilon_{\text{обм}} > 0$, тогда энергетически выгодно состояния с $S = 1$, т.е. состояние с максимальным значением полного спина. Именно такие системы соответствуют ферромагнетикам. Отметим, что обменная энергия есть величина порядка обычной электростатической энергии.

Поскольку энергия системы двух электронов состоит из двух частей — зависящей от спина системы и не зависящей от него, то эту систему можно описать эффективным гамильтонианом

$$H = -J(r)\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 + \epsilon(r).$$

Собственные значения этого гамильтониана должны быть те же, что и у исходного, т.е. $\epsilon_{\uparrow\uparrow}$ для триплетного состояния $S = 1$ и $\epsilon_{\uparrow\downarrow}$ для синглетного состояния $S = 0$. Поскольку

$$\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 = \frac{1}{2}[(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2)^2 - \mathbf{s}_1^2 - \mathbf{s}_2^2] = \frac{1}{2}[S(S+1) - \frac{3}{2}],$$

то для $S = 1$

$$\epsilon_{\uparrow\uparrow} = -\frac{1}{4}J + \epsilon,$$

а для $S = 0$

$$\epsilon_{\uparrow\downarrow} = \frac{3}{4}J + \epsilon.$$

Рассматривая два последних соотношения как систему уравнений для J и ϵ , получаем

$$\begin{aligned} J &= \epsilon_{\uparrow\downarrow} - \epsilon_{\uparrow\uparrow}, \\ \epsilon &= \frac{1}{4}(3\epsilon_{\uparrow\uparrow} + \epsilon_{\uparrow\downarrow}), \end{aligned}$$

т.е. по своему смыслу J и ϵ являются: J — разностью энергий, обусловленной обменным взаимодействием, а ϵ — средней энергией (с соответствующими статистическими весами).

Величина J называется *обменным интегралом*. Если нас интересуют только эффекты, связанные с упорядочением спинов (например, ферромагнетизм), то достаточно рассматривать только ту часть гамильтониана, которая связана с обменным взаимодействием, а именно,

$$H_{\text{обм}} = -J(\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2). \quad (1.16)$$

1.4. Гамильтониан Гейзенберга. Основное состояние ферромагнетика Гейзенберга

Основываясь на изложенных выше идеях обменного взаимодействия и спиновом гамильтониане (1.16), Гейзенберг предложил для описания изотропных магнитно упорядоченных систем, т.е. ферромагнетиков и антиферромагнетиков следующий гамильтониан

$$H = - \sum_{i,j} J(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{S}(\mathbf{r}_i) \mathbf{S}(\mathbf{r}_j) - \mathbf{H} \sum_i \mu' \mathbf{S}(\mathbf{r}_i). \quad (1.17)$$

Здесь $\mathbf{S}(\mathbf{r}_i)$ — оператор полного момента (спина) иона, находящегося в i -ом узле решетки, $J(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ — обменный интеграл, зависящий только от относительного положения узлов решетки i и j . Второй член есть оператор энергии во внешнем поле \mathbf{H} ; $\mu' \sim \mu_B$ — величина характерного магнитного момента. Суммирование по i, j производится по всем парам ионов кристаллической решетки. Поскольку обменный интеграл пропорционален перекрытию волновых функций атомов (ионов), то он заметно отличен от нуля лишь при значениях $r \equiv |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \sim a$, где a —

постоянная решетки. Для ферромагнетика $J \geq 0$, для антиферромагнетика $J \leq 0$. В дальнейшем мы будем использовать сокращенные обозначения

$$\mathbf{S}_i \equiv \mathbf{S}(\mathbf{r}_i), \quad J_{ij} \equiv J(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j).$$

В этих обозначениях гамильтониан Гейзенберга имеет вид

$$\mathbf{H} = - \sum_{i,j} J_{ij} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j - \mathbf{H} \sum_j \mu' \mathbf{S}_j. \quad (1.18)$$

Рассмотрим прежде всего вопрос о соответствии теории Гейзенберга и теории молекулярного поля Розинга-Вейсса. Будем считать, что ферромагнетик однороден, т.е. $J_{ij} = J$ и одинаков по всей решетке. Гамильтониан Гейзенберга (1.18) можно переписать в виде

$$\mathbf{H} = - \sum_i -\mu' \mathbf{S}_i (\mathbf{H} + \frac{1}{\mu'} \sum_j J \mathbf{S}_j).$$

Это энергия взаимодействия спинов \mathbf{S}_i с *эффективным полем*

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \mathbf{H} + \frac{1}{\mu'} \sum_j J \mathbf{S}_j. \quad (1.19)$$

Эффективное поле — это оператор, зависящий от конкретной конфигурации всех остальных спинов. *Приближение среднего поля* заключается в замене этого сложно зависящего от спиновых конфигураций оператора на усредненное значение:

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} \Rightarrow \mathbf{H} + \mathbf{H}_W, \quad \text{где} \quad \mathbf{H}_W \equiv \frac{1}{\mu'} \sum_j J \langle \mathbf{S}_j \rangle.$$

Для однородного изотропного ферромагнетика в приближении среднего поля

$$\langle \mathbf{S}_j \rangle = \frac{1}{N \mu'} \mathbf{M}$$

при всех j . Здесь \mathbf{M} — намагниченность. Следовательно, по своему смыслу \mathbf{H}_W есть не что иное как молекулярное поле Вейсса:

$$\mathbf{H}_W = \frac{1}{N \mu'^2} \sum_j J \mathbf{M},$$

т.е. теория молекулярного поля соответствует приближению среднего поля для ферромагнетика Гейзенберга. Поскольку в теории молекулярного поля $\mathbf{H}_W = \frac{T_c}{C} \mathbf{M}$, то для температуры Кюри T_c получаем

$$T_c = \frac{C}{N \mu'^2} \sum_j J.$$

В формуле для постоянной Кюри $C = N \mu^2 / 3k$ величина μ^2 , в отличие от μ'^2 , имеет смысл квадрата вектора магнитного момента атома, поэтому мы должны

положить в этой формуле, в соответствии с правилами квантовой механики, $\mu^2 = \mu'^2 S(S+1)$, где S — величина спина иона. Окончательно мы получаем формулу, связывающую обменный интеграл J с основной макроскопической характеристикой ферромагнетика — температурой Кюри:

$$T_c = \frac{1}{3k} \sum_j JS(S+1). \quad (1.20)$$

Обратимся теперь снова к гамильтониану (1.18) и построим его основное состояние при $J \geq 0$, т.е. для ферромагнетика. Это можно сделать точно, не прибегая к каким-либо приближениям.

Как нетрудно догадаться, при нулевой температуре основным состоянием ферромагнетика Гейзенберга должно быть состояние, в котором все спины \mathbf{S}_i ориентированы вдоль некоторой пространственной оси z — состояние полной спонтанной намагниченности. Докажем это. Рассмотрим состояние

$$|0\rangle = \prod_j |S\rangle_j, \quad (1.21)$$

где $|S\rangle_j$ — собственное состояние оператора S_j^z с собственным значением S , соответствующим максимальному значению проекции спина на ось Z :

$$S_j^z |S\rangle_j = S |S\rangle_j.$$

В скалярном произведении $\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j = S_i^z S_j^z + S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y$, входящем в гамильтониан Гейзенберга (1.18), два последних члена запишем в виде

$$S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y = \frac{1}{2} (S_i^- S_j^+ + S_i^+ S_j^-),$$

где $S^\pm \equiv S^x \pm iS^y$ — известные из теории углового момента повышающие (понижающие) операторы. Гамильтониан Гейзенберга при выключенном внешнем поле $\mathbf{H} = 0$ запишется в виде

$$\mathbf{H} = - \sum_{i,j} J_{ij} S_i^z S_j^z - \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} (S_i^- S_j^+ + S_i^+ S_j^-). \quad (1.22)$$

Как известно из квантовой механики, операторы S^\pm обладают свойством $S^\pm |S^z\rangle = C^\pm |S^z \pm 1\rangle$. Поскольку $S = \max S^z$, то $S^+ |S\rangle = 0$. Поэтому

$$\mathbf{H}|0\rangle = - \sum_{i,j} J_{ij} S_i^z S_j^z |0\rangle = - \sum_{i,j} J_{ij} S^2 |0\rangle.$$

Следовательно, $|0\rangle$ является собственным состоянием оператора \mathbf{H} с собственным значением

$$\epsilon_0 = -S^2 \sum J_{ij}. \quad (1.23)$$

Осталось показать, что ϵ_0 — минимальное собственное значение этого оператора. Пусть ϵ — энергия некоторого собственного состояния \mathbf{H} . Тогда

$$\epsilon = \langle \epsilon | \mathbf{H} | \epsilon \rangle = - \sum_{i \neq j} J_{ij} \langle \epsilon | \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j | \epsilon \rangle .$$

Как известно, диагональный матричный элемент $\langle \psi | \mathbf{A} | \psi \rangle$ любого эрмитова оператора \mathbf{A} удовлетворяет неравенству

$$\langle \psi | \mathbf{A} | \psi \rangle \leq \max\{a_n\},$$

где $\{a_n\}$ — собственные значения $\mathbf{A} : \mathbf{A} | a_n \rangle = a_n | a_n \rangle$. Следовательно, $\langle \epsilon | \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j | \epsilon \rangle \leq \max\{(\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j)_n\}$. Поскольку

$$\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j = \frac{1}{2} [(\mathbf{S}_i + \mathbf{S}_j)^2 - \mathbf{S}_i^2 - \mathbf{S}_j^2],$$

то при $i \neq j$

$$\max\{(\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j)_n\} = S^2.$$

Отсюда получаем

$$\epsilon = - \sum J_{ij} \langle \epsilon | \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j | \epsilon \rangle \geq - \sum J_{ij} S^2 = \epsilon_0,$$

что и требовалось доказать.

1.5. Спонтанное нарушение симметрии и квазисредние

Построенное в п.1.4 основное состояние ферромагнетика Гейзенберга обладает примечательной особенностью: его симметрия ниже, чем симметрия исходного гамильтониана. Действительно, гамильтониан Гейзенберга при $\mathbf{H} = 0$ инвариантен относительно вращений в трехмерном пространстве (группа симметрии $SO(3)$), тогда как основное состояние инвариантно лишь относительно вращений вокруг оси спонтанной намагниченности (группа симметрии $SO(2)$). Это явление называется спонтанным нарушением симметрии (СНС). СНС имеет фундаментальное значение в современной физике вообще, и в физике частиц в особенности. Благодаря СНС удается понять и (в значительной мере) описать целый ряд феноменов физики частиц: короткодействие слабых взаимодействий, массы кварков, свойства легких мезонов и т.д.

Не менее значительна роль СНС в схемах великого объединения взаимодействий и в космологии ранней Вселенной. Это весьма глубокое и нетривиальное явление требует для своего описания нестандартных подходов. Прежде всего отметим, что в любой классической, либо в квантовой системе с конечным числом степеней свободы СНС невозможно. Это утверждение можно доказать на уровне теоремы. Следовательно, СНС — это сугубо статистическое явление, присущее системам с бесконечным числом степеней свободы. Более того, и для статистических систем

СНС приводит к необходимости более глубокого осмысления самых основных понятий, таких как понятие статистической средней величины. Недостаточно четкое понимание процедуры статистического усреднения может привести к противоречиям и парадоксам. Рассмотрим один из них на примере ферромагнетика.

Намагниченность ферромагнетика пропорциональна суммарному среднему спину:

$$\mathbf{M} \sim \sum_i \langle \mathbf{S}_i \rangle \equiv \langle \mathbf{S} \rangle .$$

Поскольку полный спин \mathbf{S} для изотропного ферромагнетика есть интеграл движения, то любая его компонента коммутирует с гамильтонианом системы \mathbf{H} . Вычислим среднее значение S^z по правилам квантовой статистики:

$$\langle S^z \rangle = \frac{\text{Tr}(S^z e^{-\mathbf{H}/kT})}{\text{Tr}(e^{-\mathbf{H}/kT})} .$$

Здесь $\text{Tr} A \equiv \sum_n \langle n|A|n \rangle$, где $|n \rangle$ — собственное состояние гамильтониана. Поскольку

$$S^z = -i(S^x S^y - S^y S^x),$$

то

$$\begin{aligned} \langle S^z \rangle &\sim \text{Tr}\{(S^x S^y - S^y S^x)e^{-\mathbf{H}/kT}\} = \\ &= \text{Tr}(S^x S^y e^{-\mathbf{H}/kT}) - \text{Tr}(S^y S^x e^{-\mathbf{H}/kT}). \end{aligned}$$

(Отметим, что оба следа существуют и конечны). Но, поскольку S^x коммутирует с \mathbf{H} , а операция Tr инвариантна относительно циклической перестановки, то

$$\text{Tr} S^y S^x e^{-\mathbf{H}/kT} = \text{Tr} S^y e^{-\mathbf{H}/kT} S^x = \text{Tr} S^x S^y e^{-\mathbf{H}/kT} .$$

Следовательно,

$$\langle S^z \rangle = 0 .$$

Аналогично можно показать, что $\langle S^x \rangle = \langle S^y \rangle = 0$. Используя лишь самые общие правила квантовой механики и статистической физики, мы показали, что намагниченность ферромагнетика тождественно равна нулю. При этом мы не использовали никакого конкретного вида гамильтониана \mathbf{H} , следовательно, это утверждение является общим и не зависит от конкретной модели ферромагнетика.

Выход из этой парадоксальной ситуации был найден Боголюбовым. Согласно Боголюбову, в подобных ситуациях нужно использовать не обычные квантово-статистические средние, а *квазисредние*, которые определяются следующим образом: добавим к гамильтониану системы малую добавку, явным образом нарушающую инвариантность системы. В данном случае такой добавкой будет член, описывающий взаимодействие с малым внешним полем \mathbf{H}_ϵ ,

$$\mathbf{H}_\epsilon = \mathbf{H} - \mathbf{H}_\epsilon \sum_i \mu \mathbf{S}_i .$$

Квазисредние определяются как средние по гамильтониану H_ϵ с *последующим* пределом $H_\epsilon \rightarrow 0$:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \lim_{H_\epsilon \rightarrow 0} \langle \mathbf{S} \rangle_{H_\epsilon}.$$

Если основное состояние не обладает симметрией системы, то, вообще говоря,

$$\langle \mathbf{S} \rangle \neq \langle \mathbf{S} \rangle,$$

и мы получаем физически правильный результат, соответствующий спонтанно нарушенной симметрии. Таким образом, определение квазисредних есть определение физически правильной последовательности двух предельных переходов: статистического усреднения и выключения внешнего поля H_ϵ .

Гамильтониан H_ϵ не коммутирует с полным спином системы, поэтому приведенные выше рассуждения теряют силу. С физической точки зрения, малое внешнее поле H_ϵ можно сопоставить с флуктуациями микроскопических полей, относительно которых $SO(3)$ -симметричное состояние неустойчиво и переходит в состояние со спонтанно нарушенной симметрией, обладающее лишь остаточной симметрией группы $SO(2)$.

1.6. Спиновые волны (магноны)

При $T = 0$ ферромагнетик находится в состоянии с максимальным значением спонтанной намагниченности $M = N\mu S$. Это намагниченность насыщения. С повышением температуры спонтанная намагниченность уменьшается и при $T = T_c$ исчезает. Рассмотрим возбуждения ферромагнетика при низких температурах $T \ll T_c$. При малых температурах отдельные спины в решетке могут отклоняться от направления спонтанной намагниченности. Рассмотрим состояние, в котором все спины, кроме j -го, имеют максимальную проекцию S на ось z , а j -ый спин имеет проекцию $S - 1$. Это состояние уже не будет собственным состоянием гамильтониана Гейзенберга. При действии гамильтониана Гейзенберга (1.22) на это состояние член $(S_j^- S_{j+1}^+ + S_j^+ S_{j+1}^-)$ переведет такое состояние в другое, для которого j -ый спин будет иметь проекцию S , а соседний, $(j + 1)$ -ый, проекцию $S - 1$, т.е. спиновое отклонение побежит по решетке:

$$(S_j^- S_{j+1}^+ + S_j^+ S_{j+1}^-) : \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \Rightarrow \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow.$$

Таков механизм образования специфических для ферромагнетиков волновых процессов, называемых *спиновыми волнами* или *магнонами*.

Для количественного описания магнонов удобно перейти к представлению вторичного квантования. Как известно, коммутатор повышающего и понижающего операторов есть

$$[S_i^+, S_j^-] = 2S_i^z \delta_{ij}.$$

Введем операторы рождения и уничтожения магнонов:

$$c_i^+ = \frac{S_i^-}{\sqrt{2S_i^z}}, \quad c_i = \frac{S_i^+}{\sqrt{2S_i^z}}.$$

Формально их коммутатор есть единичный тензор, как и положено для операторов рождения и уничтожения:

$$[c_i, c_j^+] = \delta_{ij},$$

и можно ввести оператор числа магнов $n_i = c_i^+ c_i$. Эти соотношения и определения, однако, являются совершенно формальными, поскольку мы не определили оператор $\sqrt{S_i^z}$, и его место в определении c_i и c_i^+ . Это можно сделать приближенно в рамках квазиклассического приближения ($1/S$ -разложения). Магнитный момент атома $\mu \sim \hbar S$, поэтому при $\hbar \rightarrow 0$ (квазиклассический предел) мы должны считать S большой величиной для того, чтобы магнитный момент μ оставался конечным.

По определению $S_i^z = S - n_i$, поэтому если число магнов n_i невелико по сравнению с S , то

$$S_i^+ \simeq \sqrt{2S} c_i, \quad S_i^- \simeq \sqrt{2S} c_i^+.$$

Таким образом, область применимости нижеследующих результатов определяется соотношением $S \gg n_i$, или (что эквивалентно) главным квазиклассическим приближением. Используя данные определения, гамильтониан Гейзенберга (1.22) в этом приближении можно представить в виде

$$H = \epsilon_0 + H_M + H_{int}. \quad (1.24)$$

Здесь ϵ_0 — энергия основного состояния ферромагнетика (1.23); H_M — квадратичная по c_i и c_i^+ часть гамильтониана, описывающая распространение магнов

$$H_M = - \sum_{i,j} J_{ij} S (c_i^+ c_j + c_i c_j^+ - c_i^+ c_i - c_j^+ c_j), \quad (1.25)$$

а H_{int} описывает взаимодействие магнов

$$H_{int} = - \sum_{i,j} J_{ij} c_i^+ c_i c_j^+ c_j.$$

В главном порядке по S взаимодействием магнов можно пренебречь.

Запишем уравнение движения Гейзенберга для оператора c_i :

$$i\hbar \dot{c}_l = [c_l, H_M]. \quad (1.26)$$

Выполняя коммутации, получим

$$i\hbar \dot{c}_l = 2S \sum_j (c_l - c_j) J_{lj}. \quad (1.27)$$

Будем искать решение уравнения (1.27) в виде плоской волны:

$$c_l = A \exp\{i(\mathbf{q}\mathbf{r}_l - \omega_q t)\}.$$

Здесь \mathbf{r}_l — радиус-вектор; \mathbf{q} — волновой вектор магнона; ω_q — частота. Из уравнения (1.27) получим соотношение

$$\hbar\omega_q = 2S \sum_{\mathbf{r}} (1 - e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}) J(\mathbf{r}). \quad (1.28)$$

Здесь $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l$.

Рассмотрим простую кубическую решетку с взаимодействием между ближайшими соседями $J(\mathbf{r}) = J$ при $|\mathbf{r}| = a$ и $J(\mathbf{r}) = 0$ при $|\mathbf{r}| > a$, где a — шаг решетки. Тогда

$$\sum_{\mathbf{r}} J(\mathbf{r})(1 - e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}) = -J \sum_{\mathbf{r}} \left(i\mathbf{q}\mathbf{r} - \frac{(\mathbf{q}\mathbf{r})^2}{2} + \dots \right) \simeq Jq^2 a^2,$$

и в итоге мы получаем *дисперсионное соотношение для магнонов*

$$\hbar\omega_q = 2SJq^2 a^2.$$

Число магнонов $n_{\mathbf{q}}$ с данным \mathbf{q} зависит от температуры согласно формуле Бозе-Эйнштейна

$$n_{\mathbf{q}} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \frac{1}{e^{2SJq^2 a^2/kT} - 1}. \quad (1.29)$$

Полное число магнонов в единице объема $V = Na^3$ при температуре T есть

$$n = \sum_{\mathbf{q}} n_{\mathbf{q}} = \frac{Na^3}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} \frac{1}{e^{2SJq^2 a^2/kT} - 1}. \quad (1.30)$$

Вычисляя интеграл, получаем

$$n = N\gamma \left(\frac{kT}{2SJ} \right)^{3/2},$$

где

$$\gamma = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{e^x - 1}$$

— константа. По своему смыслу n магнонов уменьшают полный спин системы на n единиц. Отсюда мы получаем закон изменения спонтанной намагниченности при малых температурах (“закон трех вторых”):

$$M(T) = M(0) \left(1 - \gamma \left(\frac{kT}{2SJ} \right)^{3/2} \right). \quad (1.31)$$

1.7. Теоремы Боголюбова и Голдстоуна

Как следует из формул предыдущего раздела, при малых импульсах \mathbf{q} плотность магнонов есть

$$n_{\mathbf{q}} \simeq \frac{kT}{2SJa^2q^2} \sim \frac{1}{q^2}.$$

Такое поведение плотности магнонов есть частный случай общей теоремы Боголюбова (теорема об "1/q²"): плотность распределения бозонов по импульсам при $\mathbf{q} \rightarrow 0$ стремится к бесконечности как $1/q^2$. В терминах квазичастиц эквивалентное утверждение известно как теорема Голдстоуна: при спонтанном нарушении симметрии, соответствующей непрерывной группе, следует ожидать появления длинноволновых возбуждений (квазичастиц) с энергией $\epsilon_{\mathbf{q}} \rightarrow 0$ при $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{0}$ ($\lambda \rightarrow \infty$). (Необычные для теоремы слова "следует ожидать" связаны с тем, что существует весьма важное исключение из этой общей теоремы, см. ниже).

Физический смысл теоремы Голдстоуна на примере ферромагнетика можно пояснить следующим образом: в основном состоянии ферромагнетика нарушена симметрия группы пространственных вращений $SO(3)$. Поскольку выделенное направление (направление намагниченности) произвольно, то поворот всей системы как целого на изменяет энергии системы (основное состояние вырождено):

$$\uparrow\uparrow\uparrow \Rightarrow \nearrow\nearrow\nearrow\nearrow.$$

Такой поворот можно трактовать как возбуждение магнона с бесконечной длиной волны, т.е. голдстоуновского возбуждения (или, попросту, голдстоуна). Таким образом, голдстоуновский бозон осуществляет переход между вырожденными основными состояниями системы со спонтанно нарушенной симметрией.

Еще один пример дает спонтанное нарушение симметрии, связанное с самим существованием кристаллической решетки. Действительно, гамильтониан кристаллической решетки (учитываем только центральные взаимодействия) имеет вид

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{i,j} V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|),$$

явно инвариантный относительно *любых* трансляций $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \delta$. Однако сама решетка, поскольку положение ее в пространстве фиксировано, инвариантна только относительно трансляций на сдвиги, кратные шагу решетки. Следовательно, в кристаллической решетке спонтанно нарушена трансляционная инвариантность, и, согласно теореме Голдстоуна, должны существовать соответствующие длинноволновые возбуждения. Это не что иное как *фононы* — кванты колебаний кристаллической решетки. Сдвиг решетки как целого, т.е. произвольную трансляцию, можно рассматривать как процесс излучения фонона с бесконечной длиной волны.

Разумеется, не существует обратной теоремы Голдстоуна, т.е. наличие длинноволновых возбуждений само по себе не означает, что симметрия спонтанно нарушена. Сама теорема Голдстоуна может не срабатывать, когда, например, явление спонтанного нарушения симметрии происходит при наличии векторных полей.

Тогда эти векторные поля могут поглощать голдстоун таким образом, что в наблюдаемом спектре длинноволновые возбуждения отсутствуют. Важным примером такого рода является сверхпроводимость (глава II).

В заключение этого раздела коснемся кратко вопроса об особенностях СНС в одномерных (цепочки) и двумерных (пленки) системах. Мермин и Вагнер, основываясь на корреляционных неравенствах Боголюбова, показали, что в одномерном и двумерном случаях изотропный гамильтониан Гейзенберга не описывает ферромагнитного состояния. Этот результат можно понять, оценивая полное число магнонов в d -мерном пространстве:

$$n \sim \int d\mathbf{q} n_{\mathbf{q}} \sim \int_0^{\infty} q^{d-1} dq \frac{1}{e^{\alpha q^2} - 1}.$$

Последний интеграл расходится на нижнем пределе при $d = 1$ и $d = 2$, что означает излучение бесконечного числа длинноволновых (голдстоуновских) магнонов. Вследствие этого ферромагнитное основное состояние становится нестабильным, т.е. фазовый переход в парамагнитное состояние происходит при нулевой температуре.

1.8. Теория Ландау фазовых переходов 2-го рода. Фазовый переход в ферромагнетике

В предыдущих разделах мы изучали ферромагнетик Гейзенберга при низких температурах ($T \ll T_c$). Наиболее сложной для описания является область фазового перехода, т.е. поведение вблизи точки Кюри T_c .

Фазовый переход в точке Кюри для ферромагнетика является фазовым переходом 2-го рода. В этом разделе излагается теория Ландау фазовых переходов 2-го рода. Область применимости этой феноменологической теории весьма ограничена, и для ферромагнетика она дает лишь качественное описание. Однако теория Ландау на удивление хорошо описывает другой важный физический феномен — фазовый переход из сверхпроводящего состояния в нормальное. Поэтому эта теория послужит нам введением в теорию сверхпроводимости, излагаемую в следующей главе.

Термодинамическое состояние вещества описывается термодинамическими потенциалами. Для описания фазовых переходов удобен термодинамический потенциал, зависящий от “внешних” переменных: давления P и температуры T , т.е. свободная энергия Гиббса

$$G = G(P, T).$$

Энтропия S и объем V есть первые производные G :

$$S = -\frac{\partial G}{\partial T}, \quad V = \frac{\partial G}{\partial P}. \quad (1.32)$$

Вторые производные потенциала G определяют теплоемкость C_P , изотермическую сжимаемость κ и коэффициент теплового расширения β :

$$\begin{aligned} C_P &= T \frac{\partial S}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 G}{\partial T^2}, \\ \kappa &= -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{1}{V} \frac{\partial^2 G}{\partial P^2}, \\ \beta &= \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{1}{V} \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial P}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

При фазовом переходе 1-го рода первые производные термодинамического потенциала изменяются скачкообразно. Если же при фазовом переходе нет скачка первых производных, то такой фазовый переход является фазовым переходом 2-го рода.

Разные фазы вещества можно различать, вводя *степень упорядоченности* или *параметр порядка*. Например, для ферромагнетика это спонтанная намагниченность. При фазовом переходе 1-го рода параметр порядка меняется скачком, а при фазовом переходе 2-го рода обращается в нуль непрерывным образом. Симметрия одной из фаз при фазовом переходе 2-го рода является более высокой, т.е. группа симметрии одной из фаз является подгруппой группы симметрии другой фазы. При фазовом переходе 1-го рода, вообще говоря, нет ограничений на группы симметрии различных фаз.

Поскольку вблизи точки фазового перехода 2-го рода, которую мы будем обозначать (P_c, T_c) , параметр порядка η мал, то мы можем разложить термодинамический потенциал G в ряд по параметру порядка

$$\begin{aligned} G(P, T, \eta(P, T)) &= G_0(P, T) + \alpha(P, T)\eta + \\ &+ A(P, T)\eta^2 + B(P, T)\eta^3 + C(P, T)\eta^4 + \dots, \end{aligned} \quad (1.34)$$

и ограничиться в разложении (1.34) выписанными первыми членами. Такое разложение является основой для теории Ландау фазовых переходов 2-го рода. (Отметим, что при определенных условиях теория Ландау пригодна и для описания фазовых переходов 1-го рода.)

В состоянии термодинамического равновесия потенциал минимален, т.е.

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} > 0.$$

Поскольку в точке фазового перехода параметр порядка η обращается в нуль, то $\alpha(P_c, T_c) = 0$. Можно показать, что если группы симметрии разных фаз не совпадают, то $\alpha \equiv 0$ в окрестности точки фазового перехода. Далее мы будем называть фазу с более высокой симметрией *симметричной*, а другую — *несимметричной*. В симметричной фазе $\eta = 0$, поэтому из условия минимальности получаем, что $A > 0$. В несимметричной фазе точка $\eta = 0$ должна соответствовать не минимуму, а локальному максимуму потенциала, поэтому в несимметричной фазе $A < 0$. В точке перехода $A(P_c, T_c) = 0$.

Функция $C(P, T)$ должна быть положительной, чтобы обеспечить глобальность экстремума. Далее, в несимметричной фазе существуют два отличных от нуля значения параметра порядка, минимизирующих потенциал. Из условия одновременного обращения в нуль обоих значений η в точке фазового перехода получаем $B(P_c, T_c) = 0$. Возможны два случая.

1. $B \neq 0$. Тогда система уравнений

$$\begin{cases} A(P_c, T_c) = 0 \\ B(P_c, T_c) = 0 \end{cases}$$

определяет изолированную точку фазового перехода 2-го рода. Такие фазовые переходы не обнаружены.

2. $B \equiv 0$. Тогда существует линия фазовых переходов 2-го рода, определяемая уравнением $A(P_c, T_c) = 0$. Именно этот случай адекватен физической ситуации.

Результаты этого исследования можно просуммировать следующим образом: термодинамический потенциал G в окрестности точки фазового перехода 2-го рода имеет вид

$$G(P, T, \eta) = G_0(P, T) + A(P, T)\eta^2 + C(P, T)\eta^4, \quad (1.35)$$

причем $C > 0$; $A > 0$ в симметричной фазе, $A < 0$ в несимметричной фазе, и $A(P_c, T_c) = 0$ (см. рис.2, где кривая (а) соответствует симметричной фазе, а кривая (б) — несимметричной, т.е. фазе со спонтанно нарушенной симметрией). Отметим, что если $B(P_c, T_c) \neq 0$, то эта теория тоже может описывать фазовый переход, но 1-го рода.

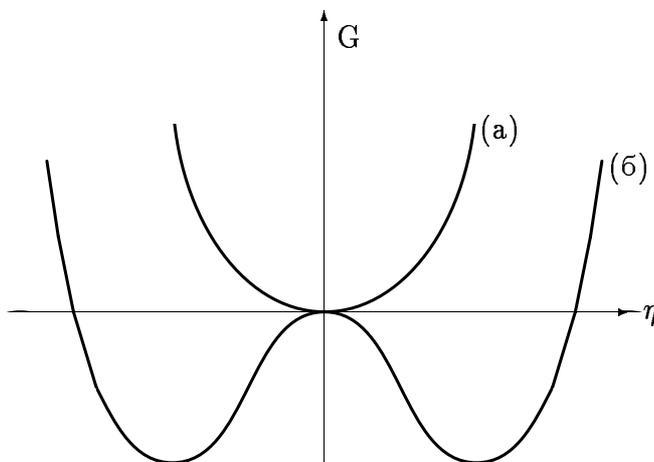


Рис. 2. Термодинамический потенциал как функция параметра порядка.

Рассмотрим изменение термодинамических характеристик вблизи точки фазового перехода при постоянном давлении $P = \text{const}$. Будем считать фазу при $T > T_c$ симметричной, а при $T < T_c$ — несимметричной. Вблизи точки фазового перехода $A(T) \simeq a(T - T_c)$, где $a = (\partial A / \partial T)_{T=T_c}$. Из установленных выше свойств

коэффициентов разложения Ландау заключаем, что $a > 0$. Кроме того, положим $C(T) \simeq C(T_c) > 0$. Из условия экстремума

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = 2\eta(A + 2C\eta^2) = 0$$

получаем, что в несимметричной фазе ($T < T_c$)

$$\eta^2 = -\frac{A}{2C} = \frac{a}{2C}(T_c - T),$$

а в симметричной фазе ($T > T_c$)

$$\eta = 0.$$

Используя условия экстремума, получаем для энтропии

$$S = -\frac{\partial G}{\partial T} = S_0 - \frac{\partial A}{\partial T}\eta^2,$$

т.е. при $T > T_c$ $S = S_0$, а при $T < T_c$ $S = S_0 + \frac{a^2}{2C}(T - T_c)$. Энтропия в точке фазового перехода меняется непрерывным образом. Теплоемкость $C_P = T\frac{\partial S}{\partial T}$ в точке фазового перехода меняется скачком:

$$\Delta C_P = \frac{a^2}{2C}T_c. \quad (1.36)$$

Так же скачкообразно меняются в теории Ландау изотермическая сжимаемость и коэффициент теплового расширения.

Обратимся теперь к ферромагнетикам. Параметром порядка для ферромагнетика является намагниченность M . В рамках теории Ландау свободная энергия Гиббса ферромагнетика во внешнем поле H есть

$$G(T, M) = G_0(T) + a(T - T_c)M^2 + CM^4 - MH. \quad (1.37)$$

Спонтанная намагниченность M_s ниже точки Кюри T_c есть

$$M_s = \sqrt{\frac{a}{2C}}(T_c - T)^{1/2}.$$

Для реального ферромагнетика

$$M_s \sim (T_c - T)^\beta,$$

где $\beta \simeq 0.3$, т.е. теория Ландау не дает хорошего количественного описания поведения спонтанной намагниченности вблизи температуры Кюри. Еще заметнее отклонение теории Ландау от наблюдаемой ситуации для теплоемкости. Экспериментально измеренное поведение теплоемкости ферромагнетика соответствует скорее острому пику (λ -переходу), чем конечному скачку теории Ландау. Для уяснения причин столь заметного отклонения рассмотрим поведение ферромагнетика

Ландау выше точки Кюри во внешнем поле. Равновесное значение намагниченности определяется условием экстремума

$$2a(T - T_c)M + 4CM^3 - H = 0.$$

При $T > T_c$ можно пренебречь вторым членом, и мы получим

$$M = \chi H,$$

где

$$\chi = \frac{1}{2a(T - T_c)}.$$

Это не что иное как закон Кюри-Вейсса (см.(1.15)). Таким образом, теория Ландау соответствует приближению среднего поля, которое для ферромагнетика является довольно грубым приближением, лишь качественно отражающим реальную физическую ситуацию.

Существует, однако, физическое явление, для которого теория Ландау дает хорошее количественное описание вблизи точки фазового перехода (а реально не только вблизи, но и вплоть до $T = 0$). Это явление сверхпроводимости, к изучению которого мы переходим в следующей главе.

2. Сверхпроводник

2.1. Эффект Мейсснера

Сверхпроводимость была открыта в 1911 г. Камерлинг-Оннесом. Постоянный электрический ток может существовать в сверхпроводнике сколь угодно долгое время без каких-либо признаков затухания, т.е. электрическое сопротивление сверхпроводника равно нулю. Сверхпроводящее состояние разрушается при некоторой температуре T_c (для большинства сверхпроводников это величина порядка нескольких градусов Кельвина). Выше этой температуры сверхпроводник ведет себя как обычный нормальный металл. В отсутствие магнитного поля это фазовый переход 2-го рода. Сверхпроводящее состояние разрушается также в достаточно сильном магнитном внешнем поле. Этот фазовый переход сопровождается энерговыделением, т.е. является фазовым переходом 1-го рода. Внешнее магнитное поле, при котором разрушается сверхпроводящее состояние, называется критическим полем H_c .

Характерным свойством сверхпроводящей среды является также выталкивание из сверхпроводника магнитного поля $H < H_c$. Это явление было открыто в 1933 г. Мейсснером и Оксенфельдом и получило название эффекта Мейсснера. Внутри сверхпроводника $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} = 0$, т.е. сверхпроводник является не только идеальным проводником, но и идеальным диамагнетиком.

Для описания эффекта Мейсснера установим связь между током и магнитным полем в сверхпроводнике. Плотность тока \mathbf{j} в сверхпроводнике определяется квантовомеханической формулой для потока частиц:

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar q}{2m_q}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*). \quad (2.1)$$

Здесь q — заряд носителя сверхпроводимости; m_q — его масса; ∇ — оператор дифференцирования (градиент); ψ — волновая функция сверхпроводника. Магнитное поле $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ (\mathbf{A} — вектор-потенциал) включается в игру путем перехода к каноническому импульсу $\mathbf{p} + \frac{q}{c} \mathbf{A}$, что эквивалентно известному “удлинению производной”:

$$\nabla \rightarrow \nabla \mp \frac{iq}{\hbar c} \mathbf{A}. \quad (2.2)$$

Здесь верхний знак соответствует действию оператора на ψ , а нижний — на ψ^* . Если $\psi = |\psi|e^{i\varphi}$, то из формул (2.1)-(2.2) следует, что плотность тока в сверхпроводнике дается формулой

$$\frac{m_q c}{q^2 n_s} \mathbf{j} = \frac{\hbar c}{q} \nabla \varphi - \mathbf{A}. \quad (2.3)$$

Здесь введено обозначение для плотности носителей сверхпроводимости $n_s = |\psi|^2$.

Взяв ротор от обеих частей этого уравнения, получим уравнение Лондонов для магнитного поля \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = -\text{rot} \left\{ \frac{m_q c}{q^2 n_s} \mathbf{j} \right\}. \quad (2.4)$$

Поскольку \mathbf{j} — микроскопический ток, то воспользовавшись уравнением Максвелла, можно исключить ток \mathbf{j} из уравнения (2.4). Если, кроме того, предположить, что сверхпроводящая среда достаточно однородна, т. е. $\text{grad} n_s$ мал, то мы получим для поля \mathbf{B} уравнение

$$\mathbf{B} = \lambda^2 \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (2.5)$$

Здесь ∇^2 — оператор Лапласа, а

$$\lambda = \sqrt{\frac{m_q c^2}{4\pi n_s q^2}} \quad (2.6)$$

— лондоновская длина проникновения.

Рассмотрим сверхпроводник, занимающий полупространство, и внешнее поле \mathbf{H} , направленное параллельно его поверхности вдоль оси z . Тогда $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ и, соответственно, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, причем $B = B(x)$. Уравнение (2.5) становится обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\lambda^2 \frac{d^2 B}{dx^2} = B,$$

откуда следует

$$B = H e^{-\frac{x}{\lambda}}. \quad (2.7)$$

Эта формула и описывает эффект Мейсснера, т.е. исчезновение (точнее, экспоненциальное падение) поля \mathbf{B} внутри сверхпроводника. Физический смысл λ благодаря формуле (2.7) становится очевидным.

Перепишав уравнение (2.5) в виде

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\lambda^2}\right) \mathbf{B} = 0, \quad (2.8)$$

мы видим, что это уравнение Клейна-Гордона для *массивной* векторной частицы (в статическом пределе). Следовательно, фотон в сверхпроводнике ведет себя как массивная частица с массой $\mu \sim 1/\lambda$, т.е. калибровочная симметрия в сверхпроводнике спонтанно нарушена, и кулоновское дальнее действие заменяется на юкавское короткое действие. Отметим, что в данном случае спонтанное нарушение симметрии не сопровождается возникновением голдстоуновских возбуждений — они поглощаются полем фотона, которое становится массивным.

2.2. Теория Гинзбурга-Ландау. Фазовый переход в сверхпроводнике. Сверхпроводники 1- и 2-го рода

Если проанализировать вывод уравнения Лондонов в предыдущем разделе, то становится ясным, что основным положением, использованным при выводе, является предположение о возможности описания сверхпроводника единой волновой функцией, медленно меняющейся в пространстве. Эта волновая функция является, по существу, параметром порядка, отличающим сверхпроводящее состояние от нормального.

Теория сверхпроводимости Гинзбурга-Ландау (или макроскопическая теория сверхпроводимости) представляет собой обобщение теории Ландау фазовых переходов 2-го рода. Основное положение ее заключается в том, что параметр порядка сверхпроводника $\psi(\mathbf{r})$ является комплексным и медленно меняется в пространстве. Свободная энергия сверхпроводника при таком описании является функционалом от $\psi(\mathbf{r})$, причем

$$|\psi(\mathbf{r})|^2 = n_s(\mathbf{r}), \quad (2.9)$$

где n_s — плотность носителей сверхпроводимости.

В соответствии с этими положениями плотность свободной энергии сверхпроводника Гинзбурга-Ландау есть

$$g_s(\mathbf{r}) = g_n(\mathbf{r}) + A(T)|\psi(\mathbf{r})|^2 + C|\psi(\mathbf{r})|^4 + \frac{\hbar^2}{2m_q} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2. \quad (2.10)$$

Здесь $g_n(\mathbf{r})$ — плотность свободной энергии нормального металла. Последний член в этом выражении описывает изменение параметра порядка ψ в пространстве. Коэффициент перед ним выбран из соображений соответствия с уравнением Шредингера.

Полная свободная энергия

$$G = \int d\mathbf{r} g(\mathbf{r}) \quad (2.11)$$

есть функционал от ψ , значение которого в равновесном состоянии минимально. Магнитное поле $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ включается путем удлинения производной по формуле (2.2). Такое удлинение производной предполагает, что ψ обладает свойствами

волновой функции при калибровочном преобразовании. Кроме того, необходимо добавить плотность энергии магнитного поля $\mathbf{B}^2/8\pi$.

Окончательно плотность свободной энергии при наличии магнитного поля есть

$$g_s(\mathbf{r}, \mathbf{B}) = g_n(\mathbf{r}, \mathbf{B}) + A(T)|\psi(\mathbf{r})|^2 + C|\psi(\mathbf{r})|^4 + \frac{\hbar^2}{2m_q} \left| \left(\nabla - \frac{iq}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}. \quad (2.12)$$

Вариация полной свободной энергии по ψ^* дает уравнение Гинзбурга-Ландау

$$A\psi + 2C|\psi|^2\psi = \frac{\hbar^2}{2m_q} (\nabla - \frac{iq}{\hbar c} \mathbf{A})^2 \psi. \quad (2.13)$$

Вариация по \mathbf{A} приводит к уравнению для поля \mathbf{B} :

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2.14)$$

где плотность микроскопического тока \mathbf{j} дается формулой (2.1).

Теория Гинзбурга-Ландау позволяет определить поведение физических характеристик сверхпроводника вблизи точки фазового перехода. Рассмотрим уравнение Гинзбурга-Ландау в отсутствие магнитного поля

$$-\frac{\hbar^2}{2m_q} \nabla^2 \psi + A(T)\psi + 2C|\psi|^2\psi = 0.$$

Всегда существует постоянное решение

$$|\psi|^2 \equiv |\psi_\infty|^2 = -\frac{A(T)}{2C} = \frac{a}{2C}(T_c - T). \quad (2.15)$$

Это решение соответствует равновесному значению параметра порядка в несимметричной (сверхпроводящей) фазе. Из (2.15) следует, что плотность носителей сверхпроводимости изменяется по закону

$$n_s(T) = \frac{a}{2C}(T_c - T).$$

Разность свободных энергий единицы объема сверхпроводящего и нормального состояний для равновесного значения параметра порядка (2.15) есть

$$\Delta G = G_s - G_n = -\frac{a^2}{4C}(T_c - T)^2.$$

Эта величина равна энергии критического магнитного поля H_c (со знаком минус):

$$\Delta G = -\frac{H_c^2}{8\pi}.$$

Отсюда следует, что вблизи точки фазового перехода критическое магнитное поле меняется по закону

$$H_c = \sqrt{\frac{2\pi a^2}{C}}(T_c - T). \quad (2.16)$$

Скачок теплоемкости при фазовом переходе дается формулой (1.36) п.1.8.

Для того чтобы оценить пространственное изменение параметра порядка, введем безразмерную функцию $f = \frac{\psi}{|\psi_\infty|}$. Уравнение Гинзбурга-Ландау в терминах f приобретает вид

$$-\xi^2 \nabla^2 f - f + |f|^2 f = 0,$$

где введена *длина когерентности Гинзбурга-Ландау*

$$\begin{aligned} \xi(T) &= \xi_0 \sqrt{\frac{T_c}{T_c - T}}, \\ \xi_0 &= \xi(0) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m_q a T_c}}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Как видно из уравнения для f , $\xi(T)$ характеризует расстояния, на которых существенны отклонения параметра порядка от равновесного значения $|\psi_\infty|$.

Лондоновскую длину проникновения (2.6) с учетом (2.15) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \lambda(T) &= \lambda_0 \sqrt{\frac{T_c}{T_c - T}}, \\ \lambda_0 &= \sqrt{\frac{m_q c^2 C}{2\pi q^2 a T_c}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Из определений (2.17) и (2.18) видно, что отношение этих длин не зависит от температуры и поэтому может служить характеристикой свойств сверхпроводника. Это отношение называется *параметром Гинзбурга-Ландау*.

$$\kappa = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)} = \frac{m_q c}{\hbar q} \sqrt{\frac{C}{\pi}}. \quad (2.19)$$

На величине этого параметра основана классификация сверхпроводников: а) *сверхпроводники 1-го рода*: $\kappa \ll 1$ (это, как правило, чистые металлы); б) *сверхпроводники 2-го рода* (сплавы) $\kappa \gg 1$. Магнитное поле относительно слабо проникает внутрь сверхпроводников 1-го рода и относительно глубоко внутрь сверхпроводников 2-го рода, причем масштабом для сравнения является расстояние, на котором параметр порядка выходит на асимптотический режим.

2.3. Квантование потока. Вихревые структуры в сверхпроводнике 2-го рода

Рассмотрим сверхпроводящую трубку, помещенную в магнитное поле, параллельное оси трубки. В силу эффекта Мейсснера магнитное поле выталкивается из материала трубки, однако проникает в отверстие. Для сверхпроводника без тока из соотношения (2.3) мы получим для величины потока Φ магнитного поля внутри трубки:

$$\Phi = \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} dl = \frac{\hbar c}{q} \oint_l \nabla \varphi dl,$$

где контур l охватывает отверстие трубки. Последний интеграл есть полное изменение фазы волновой функции сверхпроводника вдоль контура l . В силу непрерывности волновой функции полное изменение фазы может принимать значения $2\pi n$, где n — целое число. Следовательно, величина потока магнитного поля внутри сверхпроводящей трубки может принимать значения, кратные некоторому минимальному значению Φ_0 :

$$\begin{aligned} \Phi &= n\Phi_0, \\ \Phi_0 &= \frac{2\pi\hbar c}{q}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Φ_0 называется *квантом потока* или *флюксоидом*. Такое квантование потока в неодносвязном проводнике, предсказанное Ф.Лондоном, было обнаружено экспериментально Дивером и Фербенком в 1961 г. Измерение величины флюксоида показало, что величина заряда носителя сверхпроводимости есть $q = 2e$, где e — заряд электрона. Это открытие явилось одним из экспериментальных подтверждений концепции куперовской пары электронов как носителя сверхпроводимости.

В сверхпроводниках 2-го рода существует еще одно явление, связанное с проникновением магнитного поля, а именно, возникновение нитевидных вихревых структур (трубок), внутри которых сверхпроводящее состояние разрушается. Согласно классификации Гинзбурга-Ландау, в сверхпроводнике 2-го рода параметр порядка быстро выходит на равновесное значение $|\psi| = |\psi_\infty|$, в то время как магнитное поле \mathbf{B} проникает достаточно глубоко. Поскольку условие равновесия фиксирует лишь модуль параметра порядка, то возможны конфигурации с переменной фазой:

$$\psi = e^{i\varphi(\mathbf{r})} |\psi_\infty|.$$

Рассмотрим конфигурацию, изображенную на рис.3. Для нее

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= -\frac{y}{\rho}, \quad \sin \varphi = \frac{x}{\rho}, \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

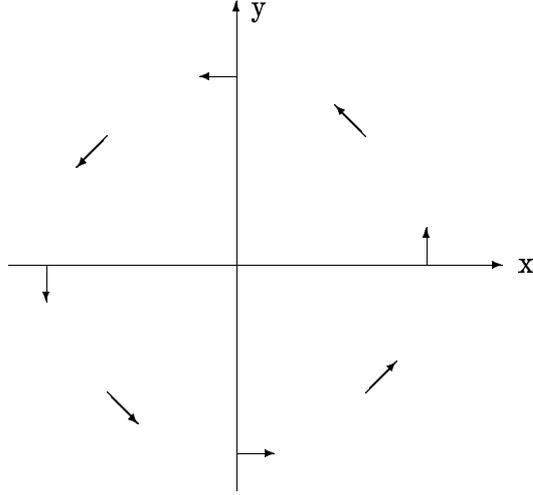


Рис. 3. Элементарный вихрь.

Такая конфигурация соответствует “элементарному вихрю”. Энергия этой конфигурации есть $\epsilon = \epsilon_0 + \Delta\epsilon$, где ϵ_0 — энергия конфигурации с постоянной фазой, а

$$\Delta\epsilon \sim \int d\mathbf{r} |\nabla\psi|^2.$$

Поскольку

$$\nabla\psi = -\frac{i\psi}{\rho^2}(y, -x, 0),$$

$$|\nabla\psi|^2 = \frac{|\psi_\infty|^2}{\rho^2},$$

то эта добавка к энергии бесконечна:

$$\Delta\epsilon \sim \int dx dy |\nabla\psi|^2 = 2\pi |\psi_\infty|^2 \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{\rho^2} \rightarrow \infty,$$

и поэтому такая конфигурация является физически неосуществимой. Однако если включить магнитное поле, то можно добиться сокращения этой расходимости и, таким образом, в присутствии магнитного поля такая конфигурация может реализоваться. Действительно, если подключить магнитное поле с вектор-потенциалом

$$\mathbf{A} = -\frac{\hbar c}{q\rho^2}(y, -x, 0), \quad (2.22)$$

то $(\nabla - \frac{iq}{\hbar c})\psi \rightarrow 0$, и энергия вихря становится конечной.

Вычислим поток магнитного поля этого элементарного вихря. Это вычисление требует известной осторожности, поскольку поле \mathbf{A} сингулярно в нуле и “тупое” дифференцирование даст неверный ответ. Прежде всего заметим, что

$$\frac{1}{\rho^2}(y, -x, 0) = \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln \rho, -\frac{\partial}{\partial x} \ln \rho, 0 \right),$$

и поэтому поле \mathbf{A} , описываемое формулой (2.22), есть ротор некоторой вектор-функции \mathbf{V} , направленной вдоль оси z :

$$\mathbf{A} = \text{rot}\mathbf{V}; \quad \mathbf{V} = \left(0, 0, -\frac{\hbar c}{q} \ln \rho\right).$$

Поток поля $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ через любую площадку в плоскости xy , включающую в себя начало координат, есть

$$\Phi = \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int \text{rot rot}\mathbf{V} d\mathbf{S}.$$

Произведя вычисление с использованием правил векторного анализа и известной формулы

$$\nabla^2 \ln \rho = 2\pi \delta(x)\delta(y),$$

(уравнение Пуассона для потенциала заряженной нити), мы получим

$$\mathbf{B} = \left(0, 0, \frac{2\pi\hbar c}{q} \delta(x)\delta(y)\right),$$

$$\Phi = \frac{2\pi\hbar c}{q} = \Phi_0,$$

т.е. магнитный поток элементарного вихря в точности равен флюксоиду.

В реальной физической ситуации нитевидные вихревые структуры имеют конечные размеры, т.е. приведенный пример есть некоторая идеализация. Основные черты реальной ситуации, однако, этот пример отражает вполне адекватно. В частности, величина потока не зависит от конкретного вида конфигурации и всегда кратна флюксоиду.

Эти вихревые структуры, открытые Абрикосовым и впоследствии наблюдавшиеся экспериментально, объясняют физическое различие между сверхпроводниками 1- и 2-го рода. В сверхпроводниках 2-го рода при некотором значении внешнего магнитного поля H_{c1} происходит (путем образования вихрей) частичное проникновение магнитного поля внутрь сверхпроводника, но сверхпроводящее состояние при этом не разрушается вплоть до некоторого значения H_{c2} .

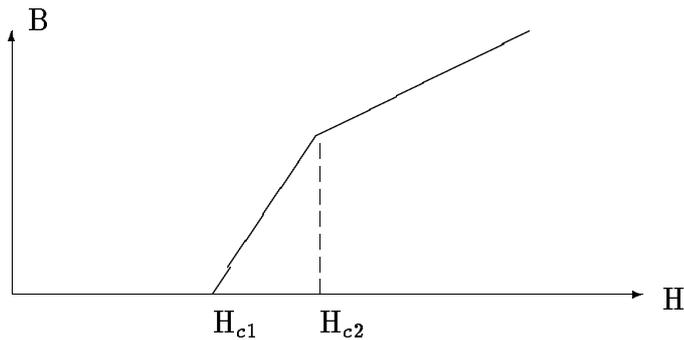


Рис. 4. Магнитное поле в сверхпроводнике 2-го рода.

Значения H_{c2} могут быть весьма велики, и поэтому именно сверхпроводники 2-го рода используются для производства мощных сверхпроводящих магнитов.

2.4. Микроскопическая теория сверхпроводимости. Гамильтониан Бардина-Купера-Шриффера. Приближение среднего поля и модельный гамильтониан Боголюбова

Толчком к созданию микроскопической теории сверхпроводимости стало открытие изотопического эффекта. В 1950 г. измерения температуры сверхпроводящего перехода T_c для различных изотопов ртути показали, что T_c зависит от атомного числа, т.е. массы иона, по закону

$$T_c \sim M^{-1/2},$$

где M — масса иона соответствующего изотопа. Такая зависимость, аналогичная зависимости скорости звука от массы ионов, привела Фрелиха к заключению, что решающую роль в механизме возникновения сверхпроводящего состояния играет взаимодействие электронов проводимости с кристаллической решеткой путем обмена фононами — квантами колебаний кристаллической решетки. Это взаимодействие имеет характер притяжения, и, как показал Купер, при определенных условиях электрон-фононное взаимодействие может преобладать кулоновское отталкивание, и электроны образуют связанные состояния — *куперовские пары*.

Электроны в куперовской паре имеют противоположные импульсы и спины, т.е. полный спин пары равен нулю. Из соотношения неопределенностей можно оценить размер пары: $\xi \sim 10^{-4}$ см, т.е. размер куперовской пары на 4 порядка превосходит характерное межатомное расстояние (10^{-8} см). Пары сильно перекрываются в пространстве, и оценки показывают, что в объеме, занятом одной куперовской парой, находится 10^6 центров других пар.

Сама по себе теория куперовской пары не раскрывает механизма сверхпроводимости, однако представление о спаривании электронов благодаря электрон-фононному взаимодействию явилось физической основой для микроскопической теории сверхпроводимости, созданной в 1956 г. Бардиным, Купером и Шриффером (БКШ). Вскоре Боголюбов и независимо Валатин предложили метод исследования теории БКШ, основанный на каноническом преобразовании Боголюбова. Этот метод, позволяющий описать основное состояние сверхпроводника и его одночастичные возбуждения на ясном и простом языке, и по сей день является основой для изучения механизма сверхпроводимости.

Мы будем описывать электронный газ на языке операторов рождения и уничтожения, т.е. в представлении вторичного квантования. Пусть $c_{\mathbf{k}s}^+$ — оператор рождения электрона с импульсом \mathbf{k} в спиновом состоянии s , а $c_{\mathbf{k}s}$ — соответствующий оператор уничтожения. В силу принципа Паули эти операторы должны антикоммутировать:

$$c_{\mathbf{k}s}c_{\mathbf{k}'s'} = -c_{\mathbf{k}'s'}c_{\mathbf{k}s} \quad \text{или} \quad \{c_{\mathbf{k}s}, c_{\mathbf{k}'s'}\} = 0. \quad (2.23)$$

Аналогично

$$\{c_{\mathbf{k}s}^+, c_{\mathbf{k}'s'}^+\} = 0.$$

Антикоммутатор $c_{\mathbf{k}s}$ и $c_{\mathbf{k}s}^+$ согласно определению операторов рождения и уничтожения есть

$$\{c_{\mathbf{k}s}, c_{\mathbf{k}'s'}^+\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{ss'}. \quad (2.24)$$

Оператор числа частиц в состоянии (\mathbf{k}, s)

$$n_{\mathbf{k}s} = c_{\mathbf{k}s}^+ c_{\mathbf{k}s}$$

в соответствии с принципом Паули имеет собственные значения 0 и 1. Спиновая переменная s принимает два значения, которые мы будем обозначать как \uparrow или \downarrow .

Бардин, Купер и Шриффер предложили описывать электронный газ в сверхпроводнике с помощью гамильтониана

$$H^{\text{БКШ}} = \sum_{\mathbf{k}s} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}s}^+ c_{\mathbf{k}s} + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} V_{\mathbf{k}\mathbf{l}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^+ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^+ c_{-\mathbf{l}\downarrow} c_{\mathbf{l}\uparrow}. \quad (2.25)$$

Первый член соответствует энергии нормального электронного газа, отсчитываемой от поверхности Ферми, $\xi_{\mathbf{k}} = \mathcal{E}_{\mathbf{k}} - \mathcal{E}_F$, где \mathcal{E}_F — энергия Ферми. Второй член описывает куперовское спаривание электронов с противоположными спинами и импульсами. Каждый член суммы соответствует элементарному акту уничтожения электронов (\mathbf{l}, \uparrow) , $(-\mathbf{l}, \downarrow)$ и рождения электронов (\mathbf{k}, \uparrow) , $(-\mathbf{k}, \downarrow)$ при обмене фононом $V_{\mathbf{k}\mathbf{l}}$ ($V_{\mathbf{k}\mathbf{l}}$ есть фурье-компонента потенциала электрон-фононного взаимодействия). Таким образом, гамильтониан БКШ описывает электронный газ, взаимодействующий с кристаллической решеткой путем обмена фононами.

Получить точное решение квантостатистической задачи с гамильтонианом БКШ на современном уровне развития математической физики не удастся. Поэтому первоочередной задачей является поиск подходящего физически адекватного приближения. В теории сверхпроводимости такое приближение нам уже известно — это приближение среднего поля, хорошо описывающее фазовый переход в сверхпроводящее состояние. Для того чтобы сформулировать аналог приближения среднего поля для гамильтониана БКШ, определим *конденсаты куперовских пар*, т. е. средние значения операторов рождения и уничтожения пар электронов:

$$\begin{aligned} b_{\mathbf{k}} &= \langle c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle, \\ b_{\mathbf{k}}^* &= \langle c_{\mathbf{k}\uparrow}^+ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^+ \rangle. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Поскольку сверхпроводящее состояние является высококоррелированным когерентным состоянием, то эти средние в сверхпроводнике имеют ненулевые значения в отличие от нормального металла, где фазовые соотношения случайны и $b_{\mathbf{k}} = 0$. “Приближение среднего поля” в данном случае заключается в том, что отклонения от этих средних считаются малыми, т.е. в соотношении

$$c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} \equiv b_{\mathbf{k}} + (c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} - b_{\mathbf{k}}) \equiv b_{\mathbf{k}} + \delta_{\mathbf{k}}, \quad (2.27)$$

$\delta_{\mathbf{k}}$ считается малой добавкой. Подставляя соотношение (2.27) (и аналогичное соотношение для $c_{\mathbf{k}\uparrow}^+ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^+$) в гамильтониан БКШ, мы получаем:

$$H^{\text{БКШ}} = H^M + O(\delta^2),$$

где мы ввели *модельный гамильтониан Боголюбова*

$$\begin{aligned} H^M &= \sum_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^* + \sum_{\mathbf{k}s} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}s}^+ c_{\mathbf{k}s} - \\ &- \sum_{\mathbf{k}} (\Delta_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^+ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^+ + \Delta_{\mathbf{k}}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow}), \end{aligned} \quad (2.28)$$

и *параметр щели*

$$\Delta_{\mathbf{k}} = - \sum_{\mathbf{l}} V_{\mathbf{k}\mathbf{l}} b_{\mathbf{l}} = - \sum_{\mathbf{l}} V_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \langle c_{-\mathbf{l}\downarrow} c_{\mathbf{l}\uparrow} \rangle. \quad (2.29)$$

Отметим, что $V_{\mathbf{k}\mathbf{l}}$ предполагается вещественным и симметричным относительно перестановки \mathbf{k} и \mathbf{l} , поэтому

$$\Delta_{\mathbf{k}}^* = - \sum_{\mathbf{l}} V_{\mathbf{k}\mathbf{l}} b_{\mathbf{l}}^*.$$

2.5. Основное состояние сверхпроводника и одночастичные возбуждения. Квазичастицы Боголюбова. Энергетическая щель и механизм сверхпроводимости

Модельный гамильтониан (2.28) квадратичен по операторам рождения и уничтожения и соответствует точно решаемой задаче. Для определения основного состояния и одночастичных возбуждений необходимо произвести его диагонализацию, т.е. привести к виду гамильтониана свободных частиц (аналогичному первому члену гамильтониана БКШ). Для этого мы перейдем от описания в терминах обычных электронов к описанию в терминах новых квазичастиц — *квазичастиц Боголюбова*, или *боголонов*, представляющих собой смесь электрона и электронной дырки. Боголоны не взаимодействуют между собой в порядке $O(\delta)$ и являются одночастичными возбуждениями сверхпроводника. Основное состояние сверхпроводника есть вакуум боголонов.

Переход к боголонам осуществляется с помощью канонического преобразования операторов рождения и уничтожения электронов c и c^+ к операторам рождения и уничтожения боголонов γ и γ^+ (преобразования Боголюбова):

$$\begin{cases} c_{\mathbf{k}\uparrow} = u_{\mathbf{k}}^* \gamma_{\mathbf{k}0} + v_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}1}^+, \\ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^+ = -v_{\mathbf{k}}^* \gamma_{\mathbf{k}0} + u_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}1}^+. \end{cases} \quad (2.30)$$

Здесь $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$ — числовые коэффициенты.

Условие каноничности преобразования означает, что боголоны удовлетворяют тем же каноническим коммутационным соотношениям, что и электронные операторы:

$$\begin{aligned} \{\gamma_{\mathbf{k}i}, \gamma_{\mathbf{k}'j}^+\} &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ij}, \\ \{\gamma_{\mathbf{k}i}, \gamma_{\mathbf{k}'j}\} &= \{\gamma_{\mathbf{k}i}^+, \gamma_{\mathbf{k}'j}^+\} = 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Из коммутационных соотношений (2.31) следует, что условие каноничности можно записать в виде

$$|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1. \quad (2.32)$$

В терминах операторов γ и γ^+ модельный гамильтониан Боголюбова (2.28) принимает вид

$$H^M = E_0 + \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} (\gamma_{\mathbf{k}0}^+ \gamma_{\mathbf{k}0} + \gamma_{\mathbf{k}1}^+ \gamma_{\mathbf{k}1}) + \sum_{\mathbf{k}} (A_{\mathbf{k}}^* \gamma_{\mathbf{k}1} \gamma_{\mathbf{k}0} + A_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}0}^+ \gamma_{\mathbf{k}1}^+). \quad (2.28a)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} E_0 &= \sum_{\mathbf{k}} (\Delta_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^* + 2\xi_{\mathbf{k}} |v_{\mathbf{k}}|^2 - \Delta_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* - \Delta_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}), \\ \epsilon_{\mathbf{k}} &= \xi_{\mathbf{k}} (|u_{\mathbf{k}}|^2 - |v_{\mathbf{k}}|^2) + \Delta_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}} + \Delta_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^*, \\ A_{\mathbf{k}} &= 2\xi_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} - \Delta_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}^2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Путем выбора коэффициентов $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$ преобразования Боголюбова (2.30) можно добиться диагонализации модельного гамильтониана H^M .

Основное состояние гамильтониана (2.28a) должно быть состоянием без боголонов:

$$\gamma|0\rangle = 0. \quad (2.34)$$

Для этого нужно потребовать обращения в нуль коэффициента $A_{\mathbf{k}}$:

$$A_{\mathbf{k}} = 2\xi_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} - \Delta_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}^2 = 0. \quad (2.35)$$

Соотношения (2.35) и (2.32) представляют собой систему уравнений для определения коэффициентов преобразования Боголюбова $u_{\mathbf{k}}$ и $v_{\mathbf{k}}$ как функций $\xi_{\mathbf{k}}$ и $\Delta_{\mathbf{k}}$. Вводя фазы комплексных параметров $u_{\mathbf{k}}$, $v_{\mathbf{k}}$ и $\Delta_{\mathbf{k}}$

$$\Delta_{\mathbf{k}} = |\Delta_{\mathbf{k}}| e^{i\theta}, \quad u_{\mathbf{k}} = |u_{\mathbf{k}}| e^{i\varphi}, \quad v_{\mathbf{k}} = |v_{\mathbf{k}}| e^{i\psi},$$

мы получим из уравнения (2.35) и условия положительности энергии боголонов $\epsilon_{\mathbf{k}}$:

$$\psi - \varphi = \theta. \quad (2.36)$$

Для $|u_{\mathbf{k}}|$ и $|v_{\mathbf{k}}|$ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\xi_{\mathbf{k}} |u_{\mathbf{k}}| |v_{\mathbf{k}}| = |\Delta_{\mathbf{k}}| (|u_{\mathbf{k}}|^2 - |v_{\mathbf{k}}|^2), \\ |u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1. \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений есть

$$\begin{cases} |u_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}}|^2}} \right), \\ |v_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}}|^2}} \right). \end{cases} \quad (2.37)$$

Для энергии боголонов мы получим из определения (2.33) и формул (2.36)-(2.37)

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}}|^2}. \quad (2.38)$$

Этот результат чрезвычайно важен и является ключом к пониманию механизма сверхпроводимости: минимальная энергия одночастичных возбуждений сверхпроводника ограничена снизу величиной параметра щели $|\Delta_{\mathbf{k}}|$.

Значение конденсата куперовских пар $b_{\mathbf{k}}$ в основном состоянии $|0\rangle$ вычисляется с помощью формул (2.30), (2.36), (2.37) и условия (2.34) (а также эрмитово сопряженного ему условия $\langle 0|\gamma^+ = 0$):

$$b_{\mathbf{k}} = \langle 0|c_{-\mathbf{k}\downarrow}c_{\mathbf{k}\uparrow}|0\rangle = u_{\mathbf{k}}^*v_{\mathbf{k}} = \frac{\Delta_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_{\mathbf{k}}}. \quad (2.39)$$

Для сдвига полной энергии E_0 относительно энергии поверхности Ферми получаем

$$E_0 = - \sum_{\mathbf{k}} \frac{(\epsilon_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}})^2}{2\epsilon_{\mathbf{k}}}, \quad (2.40)$$

т.е. вакуум боголонов энергетически выгоднее поверхности Ферми и, значит, в самом деле является основным состоянием сверхпроводника.

Все полученные выше формулы являются весьма общими и не зависят от конкретного вида потенциала электрон-фононного взаимодействия. Единственным параметром является $\Delta_{\mathbf{k}}$. Согласно определению (2.29) и формуле для конденсата (2.39), параметр щели $\Delta_{\mathbf{k}}$ есть решение уравнения

$$\Delta_{\mathbf{k}} = - \sum_{\mathbf{l}} V_{\mathbf{kl}} \frac{\Delta_{\mathbf{l}}}{2\sqrt{\xi_{\mathbf{l}}^2 + |\Delta_{\mathbf{l}}|^2}}. \quad (2.41)$$

Уравнение (2.41) называется уравнением энергетической щели. Всегда существует тривиальное решение $\Delta_{\mathbf{k}} = 0$. Это решение описывает нормальный металл. Существование нетривиального решения $\Delta_{\mathbf{k}} \neq 0$ является условием существования сверхпроводящего состояния. Ясно, что нетривиальное решение может существовать лишь для потенциала притяжения $V < 0$.

Наличие энергетической щели для одночастичных возбуждений сверхпроводника является наиболее существенным моментом в понимании механизма сверхпроводимости. Стационарный электрический ток затухает в нормальном металле благодаря рассеянию электронов на неоднородностях и дефектах кристаллической решетки: примесях, дислокациях и т.п. В сверхпроводящем состоянии каждый элементарный акт такого рассеяния должен сопровождаться “перепрыгиванием” через энергетическую щель, что энергетически невыгодно, и сверхпроводящий ток не затухает даже в реальных кристаллах.

Непосредственным экспериментальным указанием на существование энергетической щели в сверхпроводнике является измерение тока в сверхпроводящем туннельном диоде, состоящем из сверхпроводника и нормального металла, разделенных тонким слоем диэлектрика. Выше температуры сверхпроводящего перехода, когда энергетическая щель отсутствует, ток в диоде подчиняется закону Ома, а в сверхпроводящем состоянии (при $T < T_c$) в точке, определяемой величиной параметра щели, происходит характерный резкий скачок величины тока как функции напряжения.

Для решения уравнения энергетической щели (2.41) и определения в рамках теории БКШ физических характеристик сверхпроводника, таких как температура сверхпроводящего перехода T_c , необходимо дополнить общую теорию модельными предположениями о конкретном виде потенциала электрон-фононного взаимодействия V . Бардин, Купер и Шриффер предложили такую модель, позволившую провести вычисление физических характеристик сверхпроводника. Дальнейшие исследования показали, что общая структура результатов, например формулы для T_c , слабо зависит от конкретной модели и является весьма устойчивой по отношению к модельным предположениям. Полуфеноменологическую теорию Гинзбурга-Ландау, рассмотренную выше, также можно включить в общую микроскопическую теорию БКШ, причем оказывается, что волновая функция Гинзбурга-Ландау напрямую связана с основным параметром порядка сверхпроводящего состояния — параметром энергетической щели.

3. Физический вакуум

3.1. Физический вакуум как среда

Вакуум есть состояние без частиц. В классической и квантовой механике такое состояние есть не что иное, как абсолютная пустота, не представляющая никакой физической проблемы. Однако при высоких энергиях возникает принципиально новое физическое явление, которое заставляет нас переосмыслить понятие вакуума. Это явление рождения новых частиц, не существовавших в начальном состоянии. Эти новые частицы могут быть того же сорта, что и исходные, либо другого сорта (так, например, при столкновении лептонов могут рождаться адроны). Легче всего понять это явление в рамках физической картины *вакуума виртуальных частиц*. Согласно этой картине, физический вакуум представляет собой среду, заполненную *виртуальными частицами*, т.е. частицами, для которых не выполняется обычное релятивистское соотношение между энергией и импульсом: $\epsilon^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ (здесь ϵ — энергия частицы; \mathbf{p} — импульс; m — масса.)¹

Виртуальные частицы не могут быть зарегистрированы физическими приборами в отличие от обычных реальных частиц, для которых соотношение между энергией и импульсом выполнено. При нерелятивистских энергиях реальная частица движется в среде виртуальных частиц без взаимодействия с ними, т.е. как в пустоте. При высоких энергиях, однако, в результате обмена энергией между реальными и виртуальными частицами последние могут превращаться в реальные частицы, регистрируемые приборами. (Отметим, что в каждом акте такого взаимодействия энергия и импульс, а также угловой момент по-прежнему сохраняются, как и для системы реальных частиц, поскольку их сохранение связано с однородностью и изотропностью пространства-времени.)

Таким образом, мы приходим к определению *физического вакуума* как *состояния без реальных частиц*. Про реальные частицы говорят, что они находятся

¹В этой главе мы используем натуральную систему единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

на *массовой поверхности*: квадрат релятивистского 4-вектора энергии-импульса $p \equiv (\epsilon, \mathbf{p})$ равен квадрату массы: $p^2 = m^2$. Физический вакуум является своего рода резервуаром, из которого можно черпать новые частицы, затратив на это соответствующую энергию. Доступ к этому резервуару определяется энергетическим масштабом рассматриваемого явления: чем больше энергия, тем более разнообразный спектр частиц может перейти из разряда виртуальных в реальные.

Свойства физического вакуума определяются типом взаимодействия и энергетическим масштабом. Так, например, для электромагнитного взаимодействия при не слишком больших энергиях эффекты, связанные с виртуальными частицами, сравнительно невелики: это лэмбовский сдвиг уровней, аномальный магнитный момент электрона и т.п. Физический вакуум электромагнитных взаимодействий при не слишком больших энергиях ведет себя как газ: наличием виртуальных частиц в главном приближении можно пренебречь и учитывать связанные с ними эффекты как возмущение. Когда энергия частиц достигает характерного масштаба ядерных взаимодействий, свойства среды виртуальных частиц меняются. Такую среду уже нельзя считать разреженным газом виртуальных частиц, скорее это некая конденсированная среда. При этом свойства этой среды необходимо учитывать уже на самом раннем этапе исследования.

Создание модели этой релятивистской среды — физического вакуума — потребовало весьма изощренного и сложного математического аппарата, который называется квантовой теорией поля. К счастью, основные физические черты этой среды оказались уже знакомы физикам. Так, физический вакуум теории электрослабого взаимодействия оказался подобным релятивистской сверхпроводящей среде, а главный эффект этой теории — спонтанное нарушение калибровочной симметрии и появление массы у переносчиков слабого взаимодействия (W - и Z -бозонов) есть не что иное, как релятивистский эффект Мейсснера.

Более сложной средой является физический вакуум сильных взаимодействий, но и он обладает характерными свойствами сверхпроводящей среды, а для легких адронов также и ферромагнитной (точнее, антиферромагнитной) среды. Это позволяет понять основные черты теории сильных взаимодействий, такие как конфайнмент (удержание) цвета, спонтанное нарушение киральной симметрии и другие, без привлечения сложного аппарата квантовой теории поля. Еще важнее то, что аналогии с хорошо изученной физикой конденсированных сред позволяют задать направление поиска и составляют основу физической интуиции в такой непростой области исследования, как физика высоких энергий.

3.2. Спонтанное нарушение симметрии в релятивистской теории.

Модель Голдстоуна

Релятивистское полевое описание частиц высоких энергий состоит в сопоставлении частицам квантованных полей. Простейший случай — скалярная (бесспиновая) частица, которой сопоставляется скалярное поле $\phi(x)$. Здесь x — точка из пространства Минковского — пространства с псевдоевклидовой метрикой:

$x^2 \equiv g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = x_0^2 - \mathbf{x}^2 = x_\mu x^\mu$. Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ есть диагональный тензор с компонентами $(1, -1, -1, -1)$; μ и ν — 4-векторные индексы: $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Функционал действия для скалярного поля есть

$$S = \int d^4x L(\phi, \partial_\mu \phi).$$

Здесь L — *лагранжева плотность* (или просто *лагранжиан*) поля ϕ , а $\partial_\mu \phi \equiv \partial\phi/\partial x^\mu$. Принцип наименьшего действия дает нам полевое уравнение для ϕ (уравнение Эйлера-Лагранжа). Для свободной скалярной частицы это уравнение Клейна-Гордона

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0. \quad (3.1)$$

Здесь

$$\partial^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x_\mu} = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \nabla^2,$$

а m^2 есть масса свободной частицы. Исходя из уравнения Клейна-Гордона, легко найти лагранжиан свободной скалярной частицы. Он имеет вид

$$L_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2). \quad (3.2)$$

Две свободные скалярные частицы ϕ_1 и ϕ_2 описываются суммой двух лагранжианов типа (3.2). Если массы этих частиц равны $m_1 = m_2 = m$, то они описываются одним двухкомпонентным полем (ϕ_1, ϕ_2) с лагранжианом

$$L_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2) - \frac{m^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2). \quad (3.3)$$

Вместо двух вещественных полей ϕ_1 и ϕ_2 можно ввести одно комплексное поле

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2).$$

В терминах поля ϕ (и комплексно-сопряженного поля ϕ^*) лагранжиан (3.3) принимает вид

$$L_0 = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi. \quad (3.4)$$

Лагранжиан (3.4) инвариантен относительно преобразований полевых переменных ϕ и ϕ^* вида

$$\phi = e^{i\alpha} \phi', \quad \phi^* = e^{-i\alpha} \phi'^*, \quad (3.5)$$

где α — вещественная константа. Следовательно, соответствующая теория обладает внутренней симметрией группы $U(1)$. Для свободной частицы подобная симметрия не приводит к каким-либо информативным следствиям. Иное дело — теория с взаимодействием. Тогда эта симметрия будет проявляться в структуре наблюдаемых величин: массовом спектре, сечениях рассеяния и пр. Взаимодействие (точнее,

самодействие) поля ϕ описывается членами лагранжиана, полиномиальность которых по ϕ выше, чем квадратичная. Если потребовать сохранения инвариантности лагранжиана относительно калибровочных преобразований (3.5), то простейший член лагранжиана, описывающий взаимодействие, должен иметь вид

$$L_{int} = -\frac{\lambda}{2}(\phi^*\phi)^2. \quad (3.6)$$

Если константа связи λ мала, то это взаимодействие может быть учтено как возмущение свободных полей.

Во всех вышеприведенных формулах и построениях предполагалось, что $m^2 > 0$, и, соответственно, масса свободной частицы положительна. Это, на первый взгляд, совершенно естественное и не подлежащее сомнению обстоятельство. Однако для теории со взаимодействием не является заранее очевидным то, что именно параметр m^2 соответствует физической массе. Рассмотрим теорию комплексного скалярного поля со взаимодействием (3.6) и представим лагранжиан (3.4)-(3.6) в виде

$$L = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi), \quad (3.7)$$

где

$$V(\phi^* \phi) = m^2 \phi^* \phi + \frac{\lambda}{2}(\phi^* \phi)^2. \quad (3.8)$$

Такое разбиение лагранжиана на часть, зависящую от производных (так называемый *кинетический член*) и часть, от производных не зависящую, полностью аналогично определению лагранжиана классической механики как разности кинетической и потенциальной энергий:

$$L = T - U. \quad (3.9)$$

Функционал V играет роль потенциала в релятивистской теории.² Если вспомнить теорию Ландау фазовых переходов (п.1.7), то становится ясным, что возможны две физические ситуации: 1) нормальная, или симметричная фаза, когда $m^2 > 0$; 2) фаза со спонтанно нарушенной симметрией при $m^2 < 0$ (при этом всегда $\lambda > 0$). В дальнейшем нас будет интересовать именно случай со спонтанным нарушением симметрии (модель Голдстоуна).

Очевидно, что в модели Голдстоуна параметр m^2 не может быть физической массой частицы. Для симметричной фазы потенциал V имеет минимум в точке $\phi = 0$. Для фазы со спонтанно нарушенной симметрией минимуму потенциала, как легко видеть, соответствует значение

$$(\phi^* \phi)_0 \equiv v^2 = -\frac{m^2}{\lambda}, \quad (3.10)$$

²Можно показать, используя аппарат квантовой теории поля, что V является *эффективным потенциалом* в главном квазиклассическом приближении. При этом ϕ есть среднее значение квантованного поля.

и потенциал V можно записать в виде

$$V = \frac{\lambda}{2}(\phi^*\phi - v^2)^2 + \text{const.} \quad (3.11)$$

Физически это означает, что основному состоянию — вакууму модели Голдстоуна соответствует ненулевое значение поля $\phi_0 = ve^{i\beta}$ и, следовательно, физические частицы — это возбуждения $\tilde{\phi}$ над несимметричным вакуумом ϕ_0 : $\phi = \tilde{\phi} + \phi_0$. Этот вакуум является бесконечно вырожденным — значение фазы β есть произвольное вещественное число. Зафиксируем значение фазы $\beta = 0$ и перейдем от полей (ϕ, ϕ^*) к вещественным полям $\eta(x)$ и $\tilde{\alpha}(x)$ путем преобразования

$$\begin{aligned} \phi(x) &= (v + \eta(x))e^{i\tilde{\alpha}(x)}, \\ \phi^*(x) &= (v + \eta(x))e^{-i\tilde{\alpha}(x)}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Поля η и $\tilde{\alpha}$ соответствуют возбуждениям над физическим несимметричным вакуумом (симметрия нарушена выбором конкретного значения фазы ϕ_0). Следовательно, именно им можно сопоставить физические частицы. Кинетический член преобразуется следующим образом:

$$\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi = \partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + (v + \eta)^2\partial_\mu\tilde{\alpha}\partial^\mu\tilde{\alpha}, \quad (3.13)$$

а потенциал V в новых полевых переменных есть

$$V = \frac{\lambda}{2}\eta^2(\eta + 2v)^2. \quad (3.14)$$

Для того чтобы определить массы частиц, соответствующих физическим полям $\eta(x)$ и $\tilde{\alpha}(x)$, нужно собрать квадратичные по полям члены. Проведя эту операцию, получим для лагранжиана

$$L = \partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - 2\lambda v^2\eta^2 + v^2\partial_\mu\tilde{\alpha}\partial^\mu\tilde{\alpha} + L_{\text{int}}, \quad (3.15)$$

где в L_{int} включены все члены выше квадратичных. Из формулы (3.15) следует, что в модели Голдстоуна физическими частицами являются две скалярные частицы, одна из которых безмассова (это голдстоуновский бозон), а другая массивна:

$$\begin{aligned} m_\alpha^2 &= 0, \\ m_\eta^2 &= 2\lambda v^2 > 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Очевидна связь между условием $v \neq 0$ и возникновением голдстоуна. Голдстоун в данной модели — это частица, которая осуществляет переходы между эквивалентными вакуумами, отличающимися значением фазы. Таким образом, при $m^2 < 0$ симметрия группы $U(1)$ спонтанно нарушена, и в соответствии с теоремой Боголюбова-Голдстоуна в массовом спектре возникает безмассовая скалярная частица — голдстоуновский бозон.

3.3. Механизм Хиггса. Физический вакуум электрослабых взаимодействий как релятивистский сверхпроводник

Новый физический эффект возникает при включении взаимодействия комплексного заряженного поля модели Голдстоуна с электромагнитным полем. Этот эффект аналогичен эффекту Мейсснера в сверхпроводнике и чрезвычайно важен для понимания современной теории электрослабых взаимодействий.

Электромагнитное поле является абелевым калибровочным полем, поэтому включение его осуществляется на основании принципа локальной калибровочной инвариантности. В соответствии с этим принципом лагранжиан должен быть инвариантен относительно *локальных* калибровочных преобразований

$$\phi(x) = e^{i\alpha(x)}\phi'(x); \quad \phi^*(x) = e^{-i\alpha(x)}\phi'^*(x). \quad (3.17)$$

Преобразование (3.17) отличается от *глобального* калибровочного преобразования (3.5) тем, что $\alpha(x)$ зависит от пространственно-временной координаты $x = (x_0, \mathbf{x})$, т.е. угол вращения разный в разных точках пространства-времени.

Лагранжиан (3.7) не обладает свойством инвариантности относительно локальных калибровочных преобразований (3.17). Инвариантность нарушает кинетический член, поскольку производные преобразуются по закону

$$\begin{aligned} \partial^\mu \phi(x) &= e^{i\alpha(x)}(\partial^\mu \phi' + i\phi' \partial^\mu \alpha), \\ \partial_\mu \phi^*(x) &= e^{-i\alpha(x)}(\partial_\mu \phi'^* - i\phi'^* \partial_\mu \alpha), \end{aligned} \quad (3.18)$$

откуда видно, что члены $\partial_\mu \alpha$, описывающие изменение калибровочной функции $\alpha(x)$ в пространстве-времени, нарушают инвариантность лагранжиана.

Для того чтобы скомпенсировать эти члены и обеспечить инвариантность лагранжиана относительно локальных калибровочных преобразований, необходимо ввести в кинетический член *калибровочное* векторное поле A_μ . Это соответствует замене обычной производной ∂_μ на удлиненную производную $\partial_\mu - ieA_\mu$:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi &\Rightarrow (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi, \\ \partial_\mu \phi^* &\Rightarrow (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Здесь e — безразмерная постоянная (константа связи).

Если потребовать, чтобы при преобразовании (3.17) полей ϕ и ϕ^* одновременно преобразовывалось поле A_μ по закону

$$A_\mu = A'_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha, \quad (3.20)$$

то длинная производная (3.19) будет преобразовываться следующим образом:

$$\begin{aligned} (\partial^\mu - ieA^\mu)\phi &= e^{i\alpha(x)}(\partial^\mu - ieA'^\mu)\phi', \\ (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^* &= e^{-i\alpha(x)}(\partial_\mu + ieA'_\mu)\phi'^*. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Поэтому, если в качестве лагранжиана поля ϕ взять

$$L_\phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi - V(\phi^*\phi), \quad (3.22)$$

то такой лагранжиан будет обладать свойством локальной калибровочной инвариантности относительно преобразований (3.17) и (3.20) калибровочной группы $U(1)$.

К этому лагранжиану, который описывает поле ϕ и его взаимодействие с электромагнитным калибровочным полем A_μ , следует добавить лагранжиан самого электромагнитного поля

$$L_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (3.23)$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3.24)$$

— тензор электромагнитного поля. Тензор $F_{\mu\nu}$ очевидным образом инвариантен относительно калибровочного преобразования (3.20); соответственно инвариантен и лагранжиан (3.23).³ Отметим, что в лагранжиан (3.23) входят только квадратичные по A_μ члены с производными, т.е. поле A_μ безмассовое. Добавление к лагранжиану L_μ массового члена, т.е. члена, квадратичного по A_μ и не содержащего производных

$$\frac{m_A^2}{2}A_\mu A^\mu, \quad (3.25)$$

нарушает локальную калибровочную инвариантность относительно преобразований (3.20).

Из всего вышесказанного следует, казалось бы, совершенно очевидный вывод — модель с лагранжианом

$$L = L_\phi + L_A \quad (3.26)$$

описывает заряженное скалярное поле ϕ , взаимодействующее с *безмассовым* калибровочным полем A_μ . Однако этот вывод справедлив лишь в симметричной фазе при $m^2 > 0$. В этом случае модель с лагранжианом (3.22)-(3.23)-(3.26) есть не что иное, как электродинамика заряженной скалярной частицы.

В фазе со спонтанным нарушением симметрии (при $m^2 < 0$) ситуация иная. Самое интересное заключается в том, что она решительным образом отличается и от ситуации предыдущего раздела (модель Голдстоуна). Присутствие калибровочного поля приводит к тому, что голдстоуновский бозон исчезает из физического спектра, а само калибровочное поле становится массивным. Для того, чтобы убедиться в этом, перейдем в модели с лагранжианом (3.26) при $m^2 < 0$ к разложению над физическим несимметричным вакуумом:

$$\phi(x) = (v + \eta(x))e^{i\tilde{\alpha}(x)}, \quad \phi^*(x) = (v + \eta(x))e^{-i\tilde{\alpha}(x)}. \quad (3.27)$$

³В определении (3.23) множитель $1/4$ соответствует системе единиц Хевисайда, обычно употребляемой в релятивистской теории, в отличие от гауссовой системы единиц, используемой в нерелятивистской теории гл. I и II (см., например, Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, “Теория поля”, §27).

В силу локальной калибровочной инвариантности в любой точке пространства-времени можно выбрать калибровочную функцию $\alpha(x)$ в формулах (3.17) так, что $\alpha(x) = \tilde{\alpha}(x)$, и поэтому

$$\phi'(x) = \phi'^*(x) = v + \eta(x).$$

При этом калибровочное поле преобразуется как

$$A_\mu = A'_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\tilde{\alpha}(x),$$

а длинные производные, в соответствии с формулами (3.21), преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} (\partial^\mu - ieA^\mu)\phi &= e^{i\tilde{\alpha}}[(\partial^\mu - ieA'^\mu)\eta - ievA'^\mu], \\ (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^* &= e^{-i\tilde{\alpha}}[(\partial_\mu + ieA'_\mu)\eta + ievA'_\mu]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Выражая лагранжиан (3.26) как функционал от полей η , A'_μ и выделяя квадратичную часть этого лагранжиана, получаем в результате

$$\begin{aligned} L &= \partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - 2\lambda v^2\eta^2 + e^2v^2A'_\mu A'^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \\ &+ L_{int}(\eta, A'_\mu), \end{aligned} \quad (3.29)$$

где в L_{int} включены все члены со степенью полиномиальности выше квадратичной. Таким образом, при $m^2 < 0$ этот лагранжиан описывает скалярную частицу с массой

$$m_\eta^2 = 2\lambda v^2 \quad (3.30)$$

и векторную частицу с массой

$$m_A^2 = 2e^2v^2. \quad (3.31)$$

В результате спонтанного нарушения симметрии калибровочное поле становится массивным. Характерной особенностью этой модели является то, что безмассовый голдстоуновский бозон исчезает из спектра, или, как говорят, “поглощается” калибровочным полем. При этом общее число степеней свободы сохраняется: в терминах исходных полей комплексное скалярное поле имело две степени свободы, безмассовое калибровочное поле (фотон) — также две. Результирующие физические поля (возбуждения над физическим несимметричным вакуумом) имеют одну степень свободы, соответствующую массивной скалярной частице Хиггса, и три степени свободы, соответствующие массивному калибровочному полю.

Нетрудно провести аналогию между моделью Хиггса и теорией сверхпроводимости Гинзбурга-Ландау. Если сравнить вышеизложенное с соответствующими формулами и построениями п.2.1 и 2.2, то становится очевидным, что модель Хиггса есть не что иное, как прямое релятивистское обобщение теории Гинзбурга-Ландау. При этом роль волновой функции Гинзбурга-Ландау, т.е. параметра порядка сверхпроводника, играет скалярное поле Хиггса. Эффект Мейсснера проявляется в возникновении массы калибровочного поля. Так же, как и в сверхпроводнике, в

результате спонтанного нарушения калибровочной симметрии кулоновское дальное действие заменяется юкавским короткодействием, соответствующим обмену массивными квантами векторного поля.

Сама по себе абелева модель Хиггса, рассмотренная выше, не имеет непосредственных приложений. Но физика, лежащая в ее основе, явилась фундаментом для очень важной физической теории — калибровочной теории электрослабых взаимодействий (модели Вейнберга-Салама). Эта теория, объединяющая электромагнитные и слабые взаимодействия частиц в единую схему, основана на локальной калибровочной симметрии группы $SU(2) \times U(1)$, спонтанно нарушенной до симметрии $U(1)$. Несмотря на то, что эта группа неабелева, и поэтому лагранжиан этой модели строится по более сложным правилам (тензор калибровочного поля в неабелевом случае содержит также член, квадратичный по полям A_μ , соответствующий самодействию неабелева калибровочного поля), главный эффект спонтанного нарушения локальной калибровочной симметрии остается тем же, что и в рассмотренном абелевом случае: калибровочное поле (а точнее, те компоненты его, которые участвуют в спонтанном нарушении симметрии) становится массивным, а безмассовых голдстоуновских бозонов в спектре частиц не возникает. Физически это соответствует тому, что переносчики слабого взаимодействия W^\pm - и Z^0 -бозоны становятся массивными, а фотон, связанный с остаточной (ненарушенной) симметрией $U(1)$, остается безмассовым. Эта теория дала ряд нетривиальных физических предсказаний, впоследствии блестяще подтвердившихся экспериментально (таких, как существование нейтральных токов в слабом взаимодействии). Кроме того, эта теория обладает чертами, выгодно отличающими ее от других возможных вариантов теории слабого взаимодействия.

Во-первых, вид взаимодействия хиггсовских бозонов, кварков и лептонов с калибровочным полем, а также самодействия калибровочных полей однозначно фиксируется принципом локальной калибровочной инвариантности. Во-вторых, результирующая теория электрослабых взаимодействий оказывается *перенормируемой*. Свойство перенормируемости взаимодействия означает возможность описания наблюдаемых теории с помощью *конечного* числа констант, в качестве которых выступают физические (*перенормированные*) массы частиц и константы связи. Необходимость перенормировки (переопределения) констант теории возникает благодаря тому, что при вычислении наблюдаемых в квантовой теории поля с неизбежностью возникают сингулярные произведения обобщенных функций, нуждающиеся в доопределении (так называемая проблема *ультрафиолетовых расходимостей*). Хотя физический смысл принципа перенормируемости в настоящее время ясен не вполне, разумную альтернативу ему предложить трудно. Если теория не обладает свойством перенормируемости, то она фактически не обладает какой-либо предсказательной силой.

Необходимым условием перенормируемости (в рамках теории возмущений) является неотрицательность размерности констант связи (зарядов) в единицах массы (в натуральной системе единиц $\hbar = c = 1$). В калибровочных теориях соответствующие константы связи всегда безразмерны, следовательно, необходимое условие

перенормируемости выполнено. Сложнее обстоит дело с достаточными условиями перенормируемости. Простого критерия тут не существует, и фактически для каждой квантово-полевой модели перенормируемость нужно доказывать заново. Так, например, вместо спонтанно-нарушенной теории электрослабого взаимодействия можно рассмотреть модель, в которой требуемый физический эффект — массивность векторных калибровочных полей — достигается простым введением массового члена типа (3.25), т.е., как говорят, *явным* (в отличие от спонтанного) нарушением симметрии. Оказывается, однако, что такая теория в неабелевом случае не является перенормируемой (хотя необходимое условие выполнено). Отсутствие перенормируемости связано в данном случае с несохранением токов неабелевой теории при явном нарушении симметрии. В противоположность этому модель Вейнберга-Салама, основанная на механизме Хиггса и спонтанном нарушении симметрии, является перенормируемой.

Таким образом, суммируя вышесказанное, можно сказать, что физический вакуум электрослабых взаимодействий есть релятивистский сверхпроводник, а соответствующий эффект Мейсснера проявляется как близкодействие слабого взаимодействия.

3.4. Лагранжиан квантовой хромодинамики и симметрии сильных взаимодействий. Киральная симметрия и ее спонтанное нарушение

Сильное взаимодействие ответственно за существование адронов — основных составляющих нашего материального мира. Спектр адронов обладает богатым набором внутренних симметрий, определяющих свойства адронов и структуру сильного взаимодействия. Соответственно и физический вакуум сильных взаимодействий обладает весьма нетривиальными свойствами, некоторые из них мы попытаемся понять, опираясь на аналогии с физикой конденсированных сред.

Современная модель сильных взаимодействий — это квантовая хромодинамика (КХД) — теория кварков и глюонов, взаимодействие которых определяется локальной калибровочной симметрией группы $SU(3)_c$ (группы *цвета*). Адроны являются связанными состояниями кварков и глюонов. Лагранжиан КХД для спинорных полей кварков ψ и векторных полей глюонов A_μ имеет вид

$$L = \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m + g\hat{A})\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^k F^{k,\mu\nu}. \quad (3.32)$$

Здесь $\hat{\partial} \equiv \gamma_\mu \partial^\mu$ и $\hat{A} \equiv \gamma_\mu A^\mu$, где γ_μ — матрицы Дирака, m — массовая матрица кварков (о ней см. ниже), g — константа связи. Лагранжиан КХД подобен лагранжиану спинорной электродинамики с тем существенным отличием, что калибровочное поле глюонов A_μ является неабелевым, т.е. матрицей

$$A_\mu^{ab} = A_\mu^k \frac{\lambda_k^{ab}}{2}. \quad (3.33)$$

Здесь $a, b = 1, 2, 3$ — цветные индексы, λ_k — матрицы Гелл-Манна (генераторы группы $SU(3)_c$). Число генераторов группы $SU(3)$ равно восьми, т.е. индекс k

пробегает значения от 1 до 8. Поэтому число независимых цветовых компонент глюонного поля равно восьми. Индекс $\mu = 0, 1, 2, 3$ есть обычный лоренцев векторный индекс. Тензор поля глюонов в отличие от абелевого случая (3.24) включает в себя член, квадратичный по A_μ :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]. \quad (3.34)$$

Этот последний член соответствует в лагранжиане (3.32) членам типа $g\partial A \cdot A^2$ и $g^2 A^4$, т.е. лагранжиан неабелева поля глюонов содержит в себе члены с самодействием.

Помимо локальной калибровочной симметрии группы цвета, сильные взаимодействия обладают глобальными (некалибровочными) симметриями, так называемыми симметриями группы *ароматов*. Это изотопическая симметрия группы $SU(2)_f$ и унитарная симметрия группы $SU(3)_f$. Эти симметрии проявляются в массовом спектре адронов. Так, изотопическая симметрия проявляется в том, что адроны группируются в изотопические мультиплеты частиц почти равной массы: дублет нуклонов (p, n), состоящий из протона и нейтрона, триплет пионов (π^+, π^-, π^0), два дублета каонов и т.д. Унитарной симметрии соответствуют $SU(3)$ -мультиплеты: октеты и декуплеты барионов, октет легких псевдоскалярных мезонов, октет векторных мезонов и т.д. В отличие от цветной симметрии, которая является точной, обе эти глобальные симметрии являются приближенными: массы частиц внутри мультиплетов равны лишь с некоторой степенью точности. В особенности это относится к унитарной симметрии: различие масс частиц внутри унитарных мультиплетов весьма значительно. Тем не менее обе эти симметрии, изотопическая и унитарная, просматриваются в спектре адронов весьма отчетливо, и существование их не вызывает сомнений.

Унитарные мультиплеты разбиваются на более мелкие изотопические: так, октет легких псевдоскалярных мезонов состоит из триплета пионов, двух каонных дублетов и синглета (η -мезон), т.е. изотопическая группа $SU(2)_f$ есть подгруппа унитарной группы $SU(3)_f$.

В настоящем разделе мы остановимся на некоторых аспектах физики сильных взаимодействий, связанных именно с этими приближенными глобальными симметриями. Соответствующие свойства физического вакуума сильных взаимодействий в известной степени аналогичны свойствам ферромагнитной (точнее, антиферромагнитной) среды.

Выясним, каким образом глобальные симметрии группы ароматов реализуются в структуре лагранжиана КХД. Сначала отметим, что глюоны, а также их связанные состояния (глюболлы) не участвуют в игре ароматов, т.е. они всегда являются синглетами относительно группы ароматов. Кварки же помимо спинорного лоренцева индекса α , пробегающего значения от 1 до 4 и цветового индекса a , пробегающего значения от 1 до 3, обладают также индексом ароматов j :

$$\psi \equiv \psi_\alpha^{a,j}.$$

Этот индекс пробегает N_f значений, где N_f — число ароматов, т.е. сортов кварков. Глобальные симметрии группы ароматов проявляются в структуре массовой матрицы кварков, которая диагональна и обладает двумя ароматическими индексами

$$m^{ij} \equiv \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_{N_f}). \quad (3.35)$$

В настоящее время установлено, что $N_f = 6$, т.е. существуют кварки шести сортов с массами

$$\begin{aligned} m_u &\simeq 4 \text{ МэВ}, & m_d &\simeq 7 \text{ МэВ}, & m_s &\simeq 150 \text{ МэВ}, \\ m_c &\simeq 1.3 \text{ ГэВ}, & m_b &\simeq 4.8 \text{ ГэВ}, & m_t &\simeq (180 \pm 15) \text{ ГэВ}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Очевидным образом эти шесть кварков разбиваются на две группы: *легкие* кварки с массами менее чем 1 ГэВ, и *тяжелые* кварки с массами более чем 1 ГэВ. (1 ГэВ $\simeq M_{\text{hadron}}$ является естественным энергетическим масштабом сильных взаимодействий.) Глобальные симметрии группы ароматов проявляются только в физике легких кварков, рассмотрением которых мы и ограничимся. Изотопическая симметрия группы $SU(2)_f$ соответствует равенству масс u - и d -кварков:

$$m_u \simeq m_d, \quad (3.37)$$

а унитарная симметрия группы $SU(3)_f$ — равенству масс u , d и s -кварков:

$$m_u \simeq m_d \simeq m_s. \quad (3.38)$$

При этом лагранжиан КХД (3.32), как и должно быть, становится инвариантом относительно преобразований соответствующей группы ароматов.

Однако достаточно взглянуть на верхнюю строчку формулы (3.36), чтобы серьезно усомниться в разумности приближенных равенств (3.37) и (3.38). Действительно, масса d -кварка почти в два раза больше, чем масса u -кварка, а масса s -кварка, и подавно, в десятки раз больше масс u - и d -кварков.

Выход из этого кажущегося противоречия между структурой лагранжиана КХД и наблюдаемой симметрией массового спектра адронов заключается в том, что в действительности лагранжиан КХД обладает более широкой приближенной симметрией, чем глобальная симметрия группы ароматов. Приближенное равенство масс легких кварков следует понимать не в смысле сравнения их абсолютных значений, а в том, что эти массы много меньше масштаба сильных взаимодействий — они равны в своем ничтожестве:

$$m_u, m_d, m_s \ll M_{\text{hadron}} \simeq 1 \text{ ГэВ}. \quad (3.39)$$

Для пары (u, d) такое соотношение несомненно, что соответствует весьма точной изотопической симметрии группы $SU(2)_f$; вполне приемлемо оно и для тройки (u, d, s) , что соответствует приближенной унитарной симметрии группы $SU(3)_f$.

Из такого понимания проблемы включения глобальных симметрий группы ароматов в квантовую хромодинамику следует, что главным приближением для хромодинамики легких кварков является предел, в котором массами этих кварков можно пренебречь — так называемый *киральны́й предел*

$$m \rightarrow 0. \quad (3.40)$$

В этом пределе кварковая часть лагранжиана КХД принимает вид

$$L_{\text{chiral}} = \bar{\psi}(i\hat{\partial} + g\hat{A})\psi. \quad (3.41)$$

Киральный лагранжиан (3.41) обладает дополнительной *киральной* симметрией, связанной с сохранением спиральности безмассовых спинорных частиц. (Слово “киральны́й” одного корня со словом “хиромантия”.) Для описания этой симметрии введем левый и правый *киральные проекторы*:

$$P_L \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2}, \quad P_R \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad (3.42)$$

где

$$\gamma_5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (3.43)$$

Используя свойства матрицы γ_5

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0, \quad \gamma_5^2 = 1, \quad (3.44)$$

легко показать, что киральные проекторы (3.42) обладают всеми обычными свойствами проекционных операторов в пространстве дираковских спиноров:

$$P_{L,R}^2 = P_{L,R}; \quad P_L + P_R = 1; \quad P_L P_R = 0. \quad (3.45)$$

Любой дираковский спинор разбивается на сумму левой ψ_L и правой ψ_R *киральных компонент*:

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \quad (3.46)$$

где

$$\psi_L = P_L\psi, \quad \psi_R = P_R\psi. \quad (3.47)$$

Для дираковски сопряженного спинора $\bar{\psi} \equiv \psi^*\gamma_0$ соответствующие определения имеют вид

$$\bar{\psi}_L = \bar{\psi}P_R, \quad \bar{\psi}_R = \bar{\psi}P_L. \quad (3.48)$$

Рассмотрим комбинации кварковых полей, входящих в кварковую часть лагранжиана КХД. Используя данные выше определения, легко показать, что

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R, \quad (3.49)$$

$$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L. \quad (3.50)$$

Для нас важно, что в соответствии с этими формулами кварковая часть лагранжиана КХД в киральном пределе $m \rightarrow 0$ может быть записана в виде, диагональном по киральным компонентам

$$L_{\text{chiral}} = \bar{\psi}_L(i\hat{\partial} + g\hat{A})\psi_L + \bar{\psi}_R(i\hat{\partial} + g\hat{A})\psi_R. \quad (3.51)$$

Глобальная симметрия группы ароматов означает инвариантность лагранжиана относительно преобразований

$$\psi = e^{it_k\alpha_k}\psi', \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}'e^{-it_k\alpha_k}, \quad (3.52)$$

где α_k — параметры преобразования, а t_k — генераторы соответствующей группы (для изотопической симметрии группы $SU(2)_f$ — это $\sigma_k/2$, где σ_k — матрицы Паули, а для группы $SU(3)_f$ — $\lambda_k/2$, где λ_k — матрицы Гелл-Манна).

Но киральный лагранжиан (3.51) обладает более широкой группой симметрии. Действительно, как очевидно из формулы (3.51), можно вращать *независимо* левые и правые киральные компоненты

$$\psi_L = e^{it_k\alpha_k}\psi'_L, \quad \psi_R = e^{it_k\beta_k}\psi'_R, \quad (3.53)$$

причем параметры вращений могут быть разными: $\alpha_k \neq \beta_k$. Это означает, что киральный лагранжиан обладает симметрией прямого произведения соответствующих групп (*киральной симметрией*):

$$SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R. \quad (3.54)$$

($N_f = 2$ для изотопической симметрии и $N_f = 3$ для симметрии $SU(3)_f$).

Массовый член кваркового лагранжиана нарушает киральную симметрию (3.54). Однако массы легких кварков малы по сравнению с масштабом сильных взаимодействий, и, следовательно, киральная симметрия является приближенной симметрией сильных взаимодействий.

Другими словами, безмассовая хромодинамика с киральным лагранжианом (3.41), обладающая киральной симметрией (3.54), является главным приближением для хромодинамики легких кварков (u, d, s). Включение глобальных симметрий группы ароматов в хромодинамику с необходимостью приводит к тому, что симметрия главного приближения является симметрией киральной группы $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ с $N_f = 2$ либо 3.⁴

Киральная симметрия сильных взаимодействий должна приводить к многочисленным наблюдаемым следствиям. Одним из таких следствий является *удвоение*

⁴На самом деле, хромодинамика в киральном пределе обладает еще более широкой группой симметрии $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$. Существование такой избыточной симметрии приводит к так называемой $U(1)$ -проблеме, которая физически проявляется в большой массе η' -мезона (958 МэВ). Эта проблема также успешно решается в рамках КХД, но этот интересный вопрос выходит далеко за рамки нашего изложения.

по четности. Преобразования киральной симметрии перемешивают адроны с разной пространственной четностью, поэтому каждому мультиплету адронов с определенной P -четностью должен соответствовать мультиплет, близкий по массе, с противоположной четностью. Например, изотриплету псевдоскалярных пионов 0^- с массой $m_\pi \simeq 140$ МэВ должен соответствовать изотриплет скалярных мезонов 0^+ с близкой по величине массой. В реальном спектре адронов такого изотриплета нет: ближайший по массе скалярный изотриплет a -мезонов имеет массу в 6 раз большую: $m_a \simeq 980$ МэВ. Поиски в таблицах элементарных частиц партнеров по четности для других изотопических и унитарных мультиплетов приводят к не менее печальным результатам: таковые либо резко отличаются по массе, либо отсутствуют вообще.

Из этого можно сделать вывод о том, что вся предлагаемая схема не годится, и место квантовой хромодинамики на свалке, а не в учебниках и монографиях по физике частиц. К счастью, для столь радикальных мер по отношению к блестяще зарекомендовавшей себя теории нет оснований. Действительно, подобная ситуация для нас не нова. Вспомним ферромагнетик Гейзенберга. Гамильтониан Гейзенберга инвариантен относительно пространственных вращений, т.е. теория обладает симметрией группы $SO(3)$. Однако основное состояние ферромагнетика обладает более низкой симметрией группы $SO(2)$ — симметрия спонтанно нарушена. Очевидно, что и в рассматриваемом случае нужно сказать те же волшебные слова — спонтанное нарушение симметрии — для того, чтобы все стало на свои места.

Киральная симметрия главного приближения хромодинамики легких кварков является спонтанно нарушенной, т.е. основное состояние — физический вакуум сильных взаимодействий — не обладает киральной симметрией даже в киральном пределе $m \rightarrow 0$. Приближенная киральная симметрия сильных взаимодействий спонтанно нарушена до наблюдаемой симметрии группы ароматов:

$$SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \rightarrow SU(N_f), \quad (3.55)$$

где $N_f = 2$ для изотопической симметрии и $N_f = 3$ для унитарной симметрии.

Спонтанное нарушение киральной симметрии имеет целый ряд важных следствий для физики легких адронов. Киральные группы относятся к классу непрерывных групп, поэтому, согласно теореме Голдстоуна, следствием спонтанного нарушения киральной симметрии является наличие безмассовых скалярных (точнее, псевдоскалярных) частиц — голдстоунов. Так как киральная симметрия хромодинамики легких кварков является приближенной, то на самом деле эти частицы должны быть не безмассовыми, а легкими (по сравнению с массами частиц других мультиплетов). Поскольку ароматические симметрии глобальны, и соответствующих калибровочных векторных полей нет, то такие частицы реально существуют. Для изотопической симметрии — это триплет пионов, а для приближенной унитарной симметрии $SU(3)_f$ — октет легких псевдоскалярных мезонов. Таким образом, спонтанное нарушение киральной симметрии дает простой ответ на одну из загадок спектроскопии адронов: малую по сравнению с масштабом сильных взаимодействий величину массы пионов.

Еще более важным следствием концепции спонтанно нарушенной киральной симметрии является то, что на этой концепции основан весьма эффективный аппарат динамического описания легких адронов. Основой этого аппарата является *киральная теория возмущений*. Несмотря на свое название, киральная теория возмущений является, по существу, непertурбативным методом вычислений в физике адронов, основанным на киральных тождествах Уорда — соотношениях между матричными элементами различных физических процессов. Эти тождества есть следствия киральной симметрии уравнений безмассовой хромодинамики и аналогичны известным тождествам Уорда квантовой электродинамики, но являются еще более полезными, поскольку позволяют вычислять наблюдаемые величины.

Теория легких адронов, основанная на спонтанно нарушенной киральной симметрии, возникла в шестидесятые годы, еще до эры КХД, и носит название *киральной динамики*. Впоследствии киральная динамика была включена в общую схему теории сильного взаимодействия. Это яркий пример того, как полуфеноменологическая модель с ограниченной областью применимости (киральная динамика) включается в более фундаментальную теорию (КХД) как предельный частный случай. Подобный пример нам уже известен: так полуфеноменологическая теория сверхпроводимости Гинзбурга-Ландау включается в микроскопическую теорию сверхпроводимости Бардина-Купера-Шриффера-Боголюбова.

В заключение данного раздела обсудим вопрос о параметре порядка спонтанного нарушения киральной симметрии — величины, аналогичной намагниченности для ферромагнетика и энергетической щели для сверхпроводника. В качестве такого параметра порядка для легких кварков выбирают так называемый *кварковый конденсат* — среднее по вакууму от произведения полей антикварка и кварка:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \equiv \langle 0 | \bar{\psi}(x)\psi(x) | 0 \rangle . \quad (3.56)$$

По всем дискретным индексам (кроме ароматных) подразумевается суммирование. Эта кирально-неинвариантная величина служит мерой спонтанного нарушения киральной симметрии. Если бы киральная симметрия не являлась спонтанно нарушенной, то в киральном пределе кварковый конденсат обращался бы в нуль:

$$\lim_{m \rightarrow 0} \langle \bar{\psi}\psi \rangle \equiv \langle \bar{\psi}\psi \rangle_0 = 0.$$

В случае спонтанного нарушения (которое и реализуется в действительности) этот предел отличен от нуля. В силу трансляционной инвариантности кварковый конденсат не зависит от x . Кроме того, он очевидным образом калибровочно-инвариантен и может быть оценен численно. Эти оценки дают значение⁵

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_0 \simeq -(240 \text{ МэВ})^3. \quad (3.57)$$

Видно, что спонтанное нарушение киральной симметрии, как и должно быть, характеризуется параметром порядка, имеющим величину, типичную для параметров сильного взаимодействия.

⁵Для искушенного читателя отметим, что кварковый конденсат (3.56) не обладает свойством *ренорминвариантности*, и значение его зависит от *точки вычитания*. Данное значение (3.57) соответствует точке вычитания $M_{\text{hadron}} \simeq 1 \text{ ГэВ}$.

3.5. Конфайнмент цвета. Вакуум квантовой хромодинамики как дуальный сверхпроводник

Одним из наиболее загадочных явлений в физике сильных взаимодействий является конфайнмент (удержание) цвета. Это явление заключается в том, что кварки и глюоны — носители цветового (хромозлектрического) заряда — не наблюдаются как свободные частицы (точнее, как частицы в асимптотических состояниях). Более того, не наблюдаются также и никакие частицы с *открытым цветом*, т.е. не являющиеся синглетами относительно преобразований калибровочной группы $SU(3)_c$. Все наблюдаемые адроны — мезоны, барионы, глюболлы — являются *бесцветными* частицами — синглетами относительно группы $SU(3)_c$.

Спектроскопия тяжелых кварков, т.е. массовый спектр адронов, составленных из c - и b -кварков, хорошо описывается в рамках нерелятивистских представлений с помощью обычной квантовой механики, снабженной потенциалом межкваркового взаимодействия, линейно растущим на больших расстояниях

$$V(r) \simeq a \cdot r. \quad (3.58)$$

Такое поведение потенциала дает простое объяснение конфайнмента: действительно, при увеличении расстояния между кварками энергия взаимодействия возрастает, что и препятствует распаду связанного состояния кварков. Однако для легких кварков и безмассовых глюонов нерелятивистское описание неприемлемо. Кроме того, нуждается в объяснении происхождение самого линейно растущего потенциала, поскольку в аналогичной ситуации электромагнитное взаимодействие — основа нашей квантовомеханической интуиции — ведет себя совсем по-другому: там нерелятивистские частицы взаимодействуют по закону Кулона, и всегда существует область непрерывного спектра (инфинитного движения), которая соответствует ситуации вылетания (отсутствия конфайнмента).

Полного теоретического описания явления конфайнмента по сей день не существует (хотя в этом направлении уже много лет ведется интенсивная работа). Тем не менее, используя представление о физическом вакууме как особого рода конденсированной среде, можно построить физическую картину конфайнмента, основанную на аналогии со свойствами сверхпроводника.

Рассмотрим сначала некоторую воображаемую ситуацию, а именно, предположим, что в нашем распоряжении есть элементарные магнитные заряды (монополи), и попробуем поместить их в сверхпроводящую среду. Ясное дело, у нас ничего не получится: в силу эффекта Мейсснера такие заряды будут просто вытолкнуты из сверхпроводника. Однако, если это сверхпроводник 2-го рода, то возможна следующая ситуация: северный и южный магнитный заряды (т.е. монополь и антимонаполь) могут образовать своеобразное связанное состояние внутри сверхпроводника: сблизившись на достаточно малое расстояние, они своим магнитным полем могут “пробить” сверхпроводник, образовав связующую их абрикосовскую нить (см. главу II, п. 2.3), внутри которой сверхпроводящее состояние локально разрушено. Поскольку магнитный поток этой нити имеет фиксированное значение (равное по величине флюксoidу Лондона), то энергия взаимодействия этой

монополь-антимонопольной пары пропорциональна длине нити, т.е. расстоянию между монополями. Следовательно, хотя магнитные заряды не могут существовать как “самостоятельные” частицы внутри сверхпроводящей среды, однако возможно существование их в виде связанных состояний, причем разрушить это связанное состояние невозможно, поскольку для этого нужно затратить бесконечную энергию.

Эта ситуация поразительно напоминает конфайнмент кварков и глюонов, но с точностью до наоборот: в сверхпроводнике *электрические* заряды удерживаются в связанных состояниях *магнитные* заряды, и, наоборот, в вакууме КХД носители *хромoeлектрических* зарядов могут существовать только в виде бесцветных связанных состояний — адронов. Поэтому совершенно естественной является концепция, согласно которой физический вакуум КХД обладает свойством *дуальной сверхпроводимости*. Термин “дуальный” в этом контексте означает, что магнитные и электрические заряды меняются местами: вакуум КХД является сверхпроводником магнитных зарядов (монополей). Тогда дуальный эффект Мейсснера будет препятствовать существованию в этой среде хромoeлектрических зарядов (кварков и глюонов) иначе, как в виде бесцветных связанных состояний (адронов), внутри которых сверхпроводящее состояние локально разрушено. Например, мезон в этой картине можно представить себе как связанное состояние кварка и антикварка, соединенных аналогом абрикосовской нити — хромодинамической *струной*. Струна обязана своим происхождением свойству дуальной сверхпроводимости физического вакуума КХД: благодаря дуальному эффекту Мейсснера силовые линии хромoeлектрического поля не растекаются по всему пространству, как для обычного электрического поля, а сжимаются в струну, соединяющую пару противоположных хромoeлектрических зарядов. Поскольку поток поля квантован, то энергия взаимодействия пропорциональна расстоянию между зарядами — это линейно растущий потенциал статического предела КХД.

Концепция вакуума КХД как дуального сверхпроводника и конфайнмента цветных зарядов как хромoeлектрического эффекта Мейсснера является весьма привлекательной физической картиной конфайнмента, но вместе с тем сразу же вызывает ряд вопросов. Во-первых, где взять магнитные заряды? Экспериментальных указаний на существование магнитных монополей нет, кроме того, даже теоретическое внедрение их в электродинамику приводит к известным концептуальным трудностям. Однако монополи, являясь для абелевой калибровочной теории (электродинамики) чужеродным внешним объектом, в неабелевой калибровочной теории появляются совершенно естественным образом как частицеподобные решения нелинейных уравнений самодействующего неабелевого поля.⁶ Конденсация этих хромомангнитных монополей, подобно конденсации электронов в куперовские пары, приводит при определенных условиях к возникновению дуального сверхпроводящего состояния. Но каковы эти условия, можно только предполагать, поскольку определение их является весьма сложной динамической проблемой, до сих пор не решенной (хотя в последнее время наметился существенный прогресс в этом направ-

⁶Таким образом, наличие самодействия, т.е. неабелевость калибровочного поля является условием существования дуального сверхпроводящего вакуума.

влении). Во всяком случае ясно, что в неабелевых калибровочных теориях могут существовать, в зависимости от значений некоторых “управляющих параметров”, различные фазы. Во-первых, это фаза Хиггса, когда физический вакуум ведет себя подобно обычному сверхпроводнику. Такая фаза реализуется для электрослабого взаимодействия. В другой фазе — фазе конфинмента — вакуум становится дуальным сверхпроводником, что реализуется в физике сильного взаимодействия. Возможно существование также и других фаз — кулоноподобной и пр. Полное количественное описание фаз калибровочных теорий является одной из важнейших задач современной теоретической физики высоких энергий.

3.6. Экранировка и антиэкранировка заряда. Асимптотическая свобода и великое объединение

В этом заключительном разделе мы коснемся еще одного свойства физического вакуума сильных взаимодействий — это знаменитое свойство *асимптотической свободы*, которое заключается в том, что на малых расстояниях, т.е. при больших импульсах, взаимодействие адронных составляющих — кварков и глюонов — ослабевает, и при асимптотически больших импульсах эти частицы внутри адрона ведут себя как свободные. Здесь ситуация опять как бы дуальна к обычной: при увеличении расстояния кварки и глюоны взаимодействуют все сильнее, что препятствует их вылетанию, а на малых расстояниях их взаимодействием можно пренебречь, и для описания их взаимодействий внутри адрона пригодна обычная теория возмущений, использующая в качестве главного приближения свободные невзаимодействующие поля.

Описание феномена асимптотической свободы основано на концепции *бегущей константы связи*. Эта концепция, в свою очередь, породила идею о великом объединении взаимодействий частиц при очень высоких энергиях, когда бегущие константы связи различных видов взаимодействия — сильного, слабого и электромагнитного — сбегаются в одну точку, т.е. начиная с некоторого энергетического масштаба (энергии великого объединения) взаимодействие частиц описывается единой неабелевой калибровочной теорией с единой константой взаимодействия — теорией великого объединения (Grand Unified Theory=GUT).

Понятие бегущих констант родилось в недрах квантовой теории поля при изучении механизма устранения ультрафиолетовых расходимостей — теории перенормировок. На первый взгляд, само сочетание слов “бегущая (т.е. меняющаяся) константа” кажется довольно бессмысленным, однако концепции бегущих констант есть место даже в классической физике. Как и прежде, на помощь приходит физика конденсированных сред. Проиллюстрируем это понятие на простом примере.

Рассмотрим взаимодействие двух разноименных электрических зарядов, находящихся внутри поляризуемого диэлектрика (например, воды). Молекулы такого диэлектрика можно представить себе в виде элементарных электрических диполей. Под действием поля зарядов эти диполи выстраиваются вдоль направления линий

поля, и результирующий потенциал взаимодействия имеет вид

$$V(r) = -\frac{e^2}{\epsilon \cdot r}, \quad (3.59)$$

где e — заряд, r — расстояние между зарядами, а ϵ — диэлектрическая проницаемость. Для диэлектрика $\epsilon > 1$, и обычно считается, что для однородного изотропного диэлектрика ϵ — постоянная величина (константа). Представим, однако, что расстояние между пробными зарядами уменьшается. Когда оно станет меньше, чем типичный размер молекулярных диполей, эффект поляризации исчезает, и $\epsilon \rightarrow 1$. При этом формула (3.59) по-прежнему справедлива, но ϵ нужно считать функцией расстояния: $\epsilon = \epsilon(r)$, причем $\epsilon(r) \rightarrow 1$ при малых r и $\epsilon(r) \rightarrow \epsilon_0 > 1$ при $r \rightarrow \infty$. Всю эту ситуацию можно описать на другом языке, а именно, если ввести эффективный, или бегущий заряд

$$e_{\text{эфф}}(r) = \frac{e}{\sqrt{\epsilon(r)}}, \quad (3.60)$$

то потенциал взаимодействия всегда будет описываться кулоновской формулой

$$V(r) = -\frac{e_{\text{эфф}}^2}{r}. \quad (3.61)$$

Эффективный заряд есть функция расстояния r . При $r \rightarrow \infty$ он стремится к постоянному значению $e_0 = \frac{e}{\sqrt{\epsilon_0}}$, а на малых расстояниях — к величине пробного заряда, т.е. при увеличении расстояния эффективный заряд уменьшается от величины пробного заряда e до асимптотического значения e_0 — происходит явление *экранировки заряда* в диэлектрике.

Обратимся теперь к миру частиц высоких энергий. Поскольку, как мы уже не раз убеждались, физический вакуум высоких энергий подобен некой среде, то можно ожидать подобного явления и в этом случае. Действительно, в квантовой электродинамике (КЭД) физический вакуум ведет себя подобно диэлектрику. По аналогии с физикой сред это явление называется *поляризацией вакуума*, и связано оно с процессом виртуального рождения и последующей аннигиляции электрон-позитронной пары, см. рис.5.

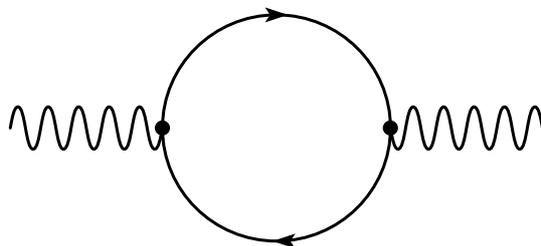


Рис. 5. Поляризация вакуума фермион-антифермионной парой.

На этом рисунке (диаграмме Фейнмана) волнистая линия — это электромагнитное поле, а электрон и позитрон изображены сплошной линией (они различаются направлением стрелки). Вычисления показывают, что эффективный заряд, или бегущая константа связи в КЭД как функция 4-импульса q^2 , определяется (при больших q^2) формулой

$$\alpha(q^2) = \alpha \left(1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|q^2|}{m^2} + \dots \right). \quad (3.62)$$

Здесь $\alpha = e^2/4\pi = 1/137$. Многоточие означает поправки высших порядков теории возмущений по α . При увеличении импульса q^2 (т.е. при уменьшении расстояния) эффективная константа связи $\alpha(q^2)$ растет, т.е. ситуация подобна рассмотренной выше ситуации в диэлектрике: виртуальные электрон-позитронные диполи экранируют заряд.

В квантовой хромодинамике, т.е. для сильных взаимодействий ситуация меняется на противоположную — там опять все наоборот. Дело в том, что кроме экранирующего вклада кварк-антикварковой петли, подобного вкладу электрон-позитронной петли (рис.5), в хромодинамике существует конкурирующий процесс — глюонная петля (см. рис.6):

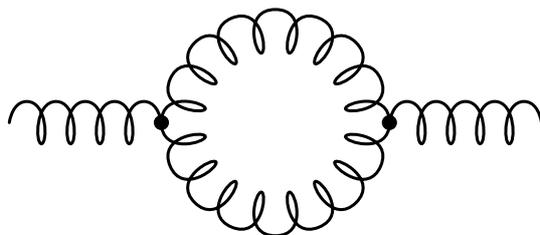


Рис. 6. Антиэкранирующий вклад глюонов.

Существование этого процесса связано с самодействием глюонов, которое, в свою очередь, связано с неабелевостью калибровочной группы КХД $SU(3)_c$ (см. формулы (3.32) — (3.34)). Глюонная петля вносит в эффективный заряд вклад, противоположный по знаку вкладу кварк-антикварковой петли, поскольку глюоны — это бозоны, и в отличие от кварков, не подчиняются принципу Паули. Этот антиэкранирующий вклад превосходит по своей величине экранирующий вклад кварков, потому что глюон “многоцветнее”, чем кварк: вклад глюонной петли порядка N_c^2 , а вклад кварковой петли порядка N_c , где N_c — число цветов. В результате вакуум КХД в отличие от вакуума КЭД на малых расстояниях обладает антиэкранирующим свойством: он подобен некой среде, для которой $\epsilon < 1$.⁷ Вычисление, проведенное методом ренормализационной группы, дает для бегущей константы

⁷Подчеркнем, что здесь речь идет о физическом вакууме на расстояниях, малых по сравнению с размером адрона. На расстояниях порядка размера адрона и больших вакуум КХД, согласно п.3.5, ведет себя как дуальный сверхпроводник, для которого $\epsilon \rightarrow 0$ (дуальный эффект Мейсснера).

связи сильного взаимодействия $\alpha_s(q^2)$ следующий результат:

$$\alpha_s(q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f) \ln \frac{|q^2|}{\Lambda^2}}. \quad (3.63)$$

Здесь N_f — число ароматов; Λ — параметр размерности массы. Формула (3.63) представляет собой главный член асимптотического разложения $\alpha_s(q^2)$ при $q^2 \rightarrow \infty$. Таким образом, при увеличении переданного импульса (уменьшении расстояния) эффективная константа $\alpha_s(q^2)$ стремится к нулю — сильное взаимодействие ослабевает. Это явление и называется асимптотической свободой.

Открытие асимптотической свободы решило многие проблемы теоретической физики высоких энергий. Во-первых, к восторгу теоретиков оказалось, что на малых расстояниях (т.е. при высоких энергиях) для сильного взаимодействия можно использовать обычную квантовополевую теорию возмущений по константе связи — единственный универсальный вычислительный метод квантовой теории поля, что дало возможность количественного описания многих физических процессов в этой области. Во-вторых, асимптотическая свобода решила и некоторые внутренние проблемы квантовой теории поля: благодаря свойству асимптотической свободы неабелевы калибровочные теории типа КХД обладают самосогласованным ультрафиолетовым поведением и являются, по-существу, единственными кандидатами на роль нетривиальных и непротиворечивых моделей квантовой теории поля. И, наконец, поведение бегущих констант связи открыло уникальную возможность для создания теории великого объединения (GUT) трех видов взаимодействий элементарных частиц: сильного, слабого и электромагнитного.

Согласно современной теории частиц — стандартной модели — физические объекты составлены из кварков, лептонов и калибровочных полей — переносчиков взаимодействий. Кварки и лептоны участвуют в электрослабом взаимодействии, основанном на калибровочной группе $SU(2) \times U(1)$ с четырьмя калибровочными полями, соответствующим W^\pm и Z^0 -бозонам и фотону. В электрослабой теории две калибровочные константы связи: $g_1 = e$ — заряд электрона и g_2 — калибровочная константа слабого взаимодействия. Кварки, кроме того, участвуют в сильном взаимодействии с калибровочной группой $SU(3)_c$. Соответствующий калибровочный бозон есть глюон, а калибровочная константа есть константа связи сильного взаимодействия g_3 . Все три калибровочные константы связи являются, вообще говоря, независимыми параметрами, характеризующими соответствующий вид взаимодействия. Примечательным обстоятельством является то, что бегущая константа сильного взаимодействия g_3 — наибольшая из всех — уменьшается при уменьшении расстояния, а наименьшая из всех — бегущая константа электромагнитного взаимодействия — увеличивается, т.е. при уменьшении расстояния значения констант связи *сближаются*.

Бегущая константа слабого взаимодействия, связанная с неабелевой группой $SU(2)_W$ уменьшается, как и константа сильного взаимодействия, но медленнее. О поведении бегущей константы слабого взаимодействия имеет смысл говорить при расстояниях, меньших чем 10^{-17} см (характерный масштаб слабого взаимодействия),

когда массами слабых калибровочных бозонов можно пренебречь. На расстояниях порядка 10^{-17} см бегущие константы имеют значения $\alpha_s = g_3^2/4\pi \simeq 1/10$, $\alpha_W = g_2^2/4\pi \simeq 1/27$ и $\alpha_{em} = e^2/4\pi = 1/129$. При дальнейшем уменьшении расстояния все три константы сбегаются к одному значению

$$\alpha_{GUT} \simeq 1/40. \quad (3.64)$$

Это значение достигается на расстояниях порядка $r_{GUT} \simeq 10^{-29}$ см. Такое сбегание констант приводит к естественному выводу о том, что на расстояниях порядка r_{GUT} происходит радикальная перестройка физического вакуума: в результате фазового перехода все три вида взаимодействия объединяются в единое взаимодействие с единой бегущей константой — происходит великое объединение. Ясно, что теория великого объединения должна быть неабелевой калибровочной теорией, причем калибровочная группа великого объединения (обозначим ее GUT) должна содержать в себе произведения калибровочных групп стандартной модели — калибровочных групп сильного, слабого и электромагнитного взаимодействий:

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset GUT. \quad (3.65)$$

Минимальной группой, удовлетворяющей условию (3.65), является группа $SU(5)$.

Великое объединение происходит при очень больших энергиях порядка 10^{15} ГэВ. Ясно, что ни в каком обозримом будущем такие энергии недостижимы в лабораторных условиях. Тем не менее теория великого объединения приводит к наблюдаемым следствиям, которые, в принципе, могут быть зарегистрированы экспериментально. Наиболее ярким из них является несохранение барионного числа, что приводит, в частности, к возможности распада протона (например, по каналу $p \rightarrow e^+\pi^0$). Активные поиски этого распада пока не увенчались успехом. Не существует также и других экспериментальных данных, интерпретация которых позволила бы однозначно связать их с тем или иным вариантом теории великого объединения. Однако идея великого объединения настолько привлекательна сама по себе, что отказ от нее кажется сейчас невозможным без адекватной замены. Кроме того, теория великого объединения одним махом решает ряд серьезных внутренних проблем теории взаимодействия частиц, например, проблему внутренней противоречивости квантовой электродинамики (КЭД). Дело в том, что КЭД — абелева калибровочная теория — не обладает свойством асимптотической свободы и, скорее всего, не является самосогласованной моделью квантовой теории поля. Для КЭД, рассматриваемой как “вещь в себе”, в отрыве от других взаимодействий, это является серьезной проблемой. Однако если мы включаем КЭД в единую схему, основанную на теории великого объединения, то проблема исчезает: на масштабе великого объединения КЭД вливается в единую неабелеву теорию великого объединения, обладающую асимптотической свободой и всеми ее радостями. Гипотеза великого объединения позволяет также вычислить такой важный параметр стандартной модели, как угол смешивания Вейнберга.

Конечно, теория великого объединения, как и всякая физическая теория, решая одни проблемы, ставит перед нами новые. Самая первая из них — какова же

— конкретная реализация схемы великого объединения? Существуют веские соображения (например, так называемая “проблема тонкой регулировки”) в пользу того, что великое объединение реализуется как *суперсимметричная теория* — теория, в которой бозоны и фермионы описываются единым образом, хотя однозначных экспериментальных указаний на существование суперсимметрии пока нет. В любом случае исследование моделей великого объединения является одним из приоритетных направлений развития современной теории.

Список литературы

- [1] Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н.(мл.). Введение в квантовую статистическую механику. — М.: Наука, 1984.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики, в 10 томах. — М.: Наука, 1973-1987.
- [3] Квасников И.А. Термодинамика и статистическая физика. — М.: Изд-во МГУ, 1991.
- [4] Займан Дж. Принципы теории твердого тела. — М.: Мир, 1966.
- [5] Анималу А. Квантовая теория кристаллических твердых тел. — М., Мир, 1981.
- [6] Уайт Р., Джебелл Т. Дальний порядок в твердых телах. — М.: Мир, 1982.
- [7] Тябликов С.В. Методы квантовой теории магнетизма. — М.: Наука, 1975.
- [8] Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. — М.: Наука, 1967.
- [9] Шриффер Дж. Теория сверхпроводимости. — М.: Наука, 1970.
- [10] Тинкхам М. Введение в сверхпроводимость. — М.: Атомиздат, 1980.
- [11] Окунь Л.Б. Физика элементарных частиц. — М.: Наука, 1988.
- [12] Арбузов Б.А. Взаимодействие элементарных частиц. — М.: Изд-во МГУ, 1986 (ч.І), 1988 (ч.ІІ).
- [13] Ченг Т.-П., Ли Л.-Ф. Калибровочные теории в физике элементарных частиц.— М.: Мир, 1987.
- [14] Хуанг К. Кварки, лептоны и калибровочные поля. — М.: Мир, 1985.
- [15] Aitchison I.J.R., Hey A.J.G. Gauge Theories in Particle Physics. — Bristol, IOP Pub., 1982.

- [16] Киржниц Д.А. Сверхпроводимость и элементарные частицы. // УФН. 1978. Т.125. С.169-194.
- [17] Christos G.A. Chiral symmetry and the $U(1)$ -problem. // Phys. Reports. 1984. V.116. P.251-336.
- [18] Hooft't G. The topological mechanism for permanent quark confinement in a non-Abelian gauge theory. // Phys. Scripta. 1982. V.25. P.133-142.
- [19] Nielsen N.K. Asymptotic freedom as a spin effect. // Am. J. Phys. 1981. v.49. P.1171-1178.
- [20] Ellis J. Supersymmetry and Grand Unification. – Preprint CERN-TH/95-316, 1995; hep-ph/9512335.

Рукопись поступила 19 марта 1996 г.

В.Е.Рочев

Конденсированные среды и физика частиц.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы L^AT_EX.

Редактор Н.В.Ежела

Подписано к печати 21.03.96. Формат 60 × 84/8.

Офсетная печать. Печ.л. 7,25. Уч.-изд.л. 5,5. Тираж 200. Заказ 616.

Индекс 3649. ЛР №020498 17.04.97.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

— —

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 96-25, И Ф В Э, 1996
