



И  
Ф  
В  
Э

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 96-3  
ОТФ

И.Н.Никитин\*

ЧАСТНЫЕ КЛАССЫ ДВИЖЕНИЙ СТРУНЫ,  
КВАНТУЕМЫЕ БЕЗ АНОМАЛИЙ

---

\*E-mail: Nikitin\_I@mx.ihep.su

Протвино 1996

## Аннотация

Никитин И.Н. Частные классы движений струны, квантуемые без аномалий: Препринт ИФВЭ 96-3. – Протвино, 1996. – 22 с., 15 рис., библиогр.: 6.

Исследованы конечномерные подмногообразия фазового пространства открытой бозонной струны, квантование которых свободно от аномалий при  $d = 4$ .

## Abstract

Nikitin I.N. Special types of string motions with anomaly-free quantization: IHEP Preprint 96-3. – Protvino, 1996. – p. 22, figs. 15, refs.: 6.

In a phase space of the open bosonic string finite dimensional submanifolds are studied, whose quantization is free of anomalies at  $d = 4$ .

## Введение

При квантовании теории струн возникают аномалии. Как и в теориях поля, возникновение аномалий вызвано тем, что используемые в теории регуляризации расходящихся выражений нарушают классические симметрии системы. Аномалии зависят от процедуры квантования: выбора канонических переменных и их представления операторами в пространстве состояний. Обычно квантование струны проводится в фоковском представлении. При этом симметрии системы сохраняются, только если теория формулируется в 26-мерном пространстве Минковского.

Имеется возможность построения квантовой теории струн при  $d \neq 26$  с использованием других, отличных от осцилляторных, канонических переменных. Ключевой идеей является проведение такого канонического преобразования в классической механике, чтобы генераторы симметрий стали независимыми переменными (или простыми функциями последних). В этом случае коммутационные соотношения для генераторов постулируются непосредственно из скобок Пуассона, и аномалий не возникает.<sup>1</sup> Локальное существование и неединственность таких канонических преобразований следуют из элементарных теорем гамильтоновой динамики. Необходимый набор переменных построен в работах [1] с использованием методов обратной задачи рассеяния. Глобальная структура полученного фазового пространства изучена недостаточно для его квантования. Квантовая теория построена для подмногообразий фазового пространства, представляющих определённые частные классы движения струн. Наиболее полно изучено 4-мерное многообразие, геометрически интерпретируемое как струны, прямолинейные в системе покоя [2]. В работе [3] проводится квантование бесконечномерных многообразий, которым отвечают мировые листы, обладающие осевой симметрией.

В данной работе исследуется класс конечномерных многообразий в фазовом пространстве струны, которые в общем случае не являются подмножествами осесимметричных и каждое из которых содержит прямолинейные струны. В рабо-

---

<sup>1</sup>Так, для лоренц-ковариантности квантовой теории достаточно, чтобы независимой переменной был спин струны (орбитальный момент в системе покоя).

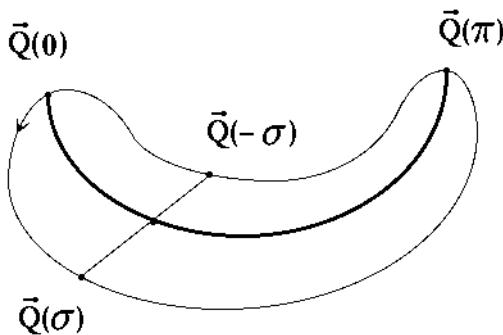
те используется гамильтонова механика струны в системе покоя [1], описанная в разд.1. В разд.2 в фазовом пространстве струны выделены 6-мерные многообразия (ограниченные конфигурации) и показано, что эти многообразия локально изоморфны фазовому пространству совокупности 1-мерного осциллятора и 3-мерного ротатора. В разд.3 показано, что при определённых ограничениях топологического характера эти многообразия глобально изоморфны фазовым пространствам систем осциллятор+ротатор и волчок. В разд.4 проведено квантование этих многообразий, получены спин-массовые спектры и исследованы дискретные симметрии системы. Заключительный раздел посвящен обсуждению результатов работы.

## 1. Фазовое пространство струны

Фазовым пространством открытой струны является множество  $\mathcal{M}$  всевозможных замкнутых ориентированных кривых  $\vec{Q}(\sigma)$  с отмеченной точкой  $\vec{Q}(0)$ . Эти кривые в дальнейшем именуются опорными. Параметрические инварианты опорных кривых являются сохраняющимися динамическими переменными в теории струны, например, длина кривой равна удвоенной массе струны  $L = 2M$ , ориентированная площадь поверхности, натянутой на кривую, не зависит от поверхности и равна удвоенному спину струны  $\vec{A} = 2\vec{S}$ . На опорных кривых введена натуральная параметризация:  $\sigma = 2\pi l/L$ ,  $l$  – длина дуги кривой, отсчитываемая от отмеченной точки;  $|\vec{Q}'| = M/\pi$ . Опорные кривые являются траекториями концов струны в системе покоя, причём  $\vec{Q}(0)$  является положением конца в текущий момент времени. Форма струны определяется формулой (см.рис.1)

$$\vec{x}(\sigma) = (\vec{Q}(\sigma) + \vec{Q}(-\sigma))/2, \quad 0 \leq \sigma \leq \pi;$$

эволюция сводится к равномерному движению отмеченной точки по неподвижной опорной кривой:  $\vec{Q}(\sigma) \rightarrow \vec{Q}(\sigma + \tau)$ .



**Рис.1.** Форма струны определяется следующим образом: отложим на опорной кривой две дуги равной длины, лежащие по разные стороны от точки  $\vec{Q}(0)$ ; соединим концы дуг прямолинейным отрезком и отметим его середину. Множество таких середин описывает струну в момент времени, когда её конец находится в точке  $\vec{Q}(0)$ .

Симплектическая структура фазового пространства определяется замкнутой 2-формой

$$\omega = -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\sigma \delta \vec{Q}'(\sigma) \wedge \delta \vec{Q}(\sigma). \quad (1)$$

Факторизуем  $\mathcal{M}$  по действию группы  $\Gamma = SO(3) \times \mathbf{R}^3 \times S^1$  вращений, трансляций и сдвигов отмеченной точки. Произвольную опорную кривую представим в виде

$$\vec{Q}(\sigma) = \vec{e}_i Q_i(\sigma + \tau; u) + \vec{D}, \quad (2)$$

ортонормированный репер  $\vec{e}_i$  и вектор  $\vec{D}$  задают положение опорной кривой,  $\tau$  определяет сдвиги отмеченной точки. Переменные  $u \in \mathcal{M}/\Gamma$  определяют форму опорной кривой – среди всех кривых заданной формы, отличающихся на вращения, трансляции и сдвиги отмеченной точки, выбран один представитель  $Q_i(\sigma)$  (этот выбор будет конкретизирован ниже). Подставляя (2) в форму (1), получим

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_M + \omega_S + \omega_u, \\ \omega_M &= d\tau \wedge d\mu, \quad \omega_S = \frac{1}{2} d\vec{e}_i \wedge d(\vec{S} \times \vec{e}_i), \\ \omega_u &= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\sigma \delta Q'_i(\sigma) \wedge \delta Q_i(\sigma), \\ \mu &= \frac{M^2}{2\pi}, \quad \vec{S} = -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\sigma \vec{Q}' \times \vec{Q} \text{ – спин струны.} \end{aligned} \quad (3)$$

Переменная  $\vec{D}$  выпадает из формы и не участвует в механике. Положим  $\vec{D} = 0$  (положение  $Q_i(\sigma)$  зафиксируем условием  $\int_0^{2\pi} d\sigma Q_i = 0$ ).

Форма  $\omega_M$  определяет гамильтонову механику осциллятора. В подходе [1] гамильтониан струны  $H = \mu$ , отсюда видно, что эволюция сводится к сдвигу  $\tau \rightarrow \tau + \Delta\tau$ .

Форма  $\omega_S$  определяет механику волчка. Направим  $\vec{e}_3$  вдоль  $\vec{S}$ :  $\vec{e}_3 = \vec{S}/S$ ,  $\vec{e}_1 = \vec{e}$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1$  (ориентацию  $Q_i(\sigma)$  зафиксируем условием  $\int_0^{2\pi} d\sigma Q'_3 Q_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ ). В этом случае  $\omega_S$  превращается в симплектическую форму ротора:

$$\omega_S = d\vec{e} \wedge d(\vec{S} \times \vec{e}), \quad \vec{e}^2 = 1, \quad \vec{S}\vec{e} = 0.$$

Форма  $\omega_u$  определяет симплектическую структуру фактор-пространства  $\mathcal{M}/\Gamma$ . Формы  $\omega_M$ ,  $\omega_S$  и  $\omega_u$  не являются независимыми, поскольку в набор  $u$  входят переменные  $\mu$  и  $S$ . Добавление  $\omega_u$  к  $\omega_M + \omega_S$  меняет некоторые скобки Пуассона в механике  $\omega_M + \omega_S$  (в частности,  $\{\tau, \vec{e}\}$ ). Форма  $\omega_u$  не содержит переменных  $\tau$  и  $\vec{e}_i$ , она сохраняется при преобразованиях, генерируемых  $\mu$  и  $\vec{S}$  в механике  $\omega_M + \omega_S$  (при сдвигах  $\tau$  и вращениях  $\vec{e}_i$ ). Поэтому в механике  $\omega_M + \omega_S + \omega_u$  переменные  $\mu$  и  $\vec{S}$  генерируют те же преобразования:

$$\{\mu, \tau\} = 1, \quad \{S^i, S^j\} = -\epsilon_{ijk} S^k, \quad \{S^i, e^j\} = -\epsilon_{ijk} e^k,$$

остальные скобки Пуассона  $\{\mu, \dots\}$ ,  $\{\vec{S}, \dots\}$  равны нулю.

Канонические преобразования фазового пространства  $\delta u = \alpha X$  с гамильтонианом  $H : i_X\omega = dH$  сохраняют симплектическую форму:  $\delta\omega = 0$ . Преобразования с динамическим параметром  $\delta u = \alpha(u)X$  меняют  $\omega$  на полный дифференциал:  $\delta\omega = \mathcal{L}_{\alpha X}\omega = d(\alpha i_X\omega) = d\alpha \wedge dH$  (использованы соотношения  $\mathcal{L}_X = i_Xd + di_X$  и  $d\omega = 0$ ). При добавлении к  $\omega$  слагаемого  $\Delta\omega$ , сохраняющегося при преобразованиях  $\delta u = \alpha(u)X : \forall \alpha(u) \delta\Delta\omega = 0$ , генератор  $H$  этих преобразований не меняется.

Восстановление механики до 4-мерной проводится следующим образом. Вводятся канонические переменные  $Z_\mu, P_\mu$  – средняя координата и полный 4-импульс струны, в симплектическую форму добавляется слагаемое  $dP_\mu \wedge dZ_\mu$ . Опорная кривая в пространстве Минковского определяется выражением

$$Q_\mu(\sigma) = X_\mu + P_\mu \left( \frac{\sigma}{\pi} - 1 \right) - \vec{N}_\mu \vec{Q}(\sigma), \quad (4)$$

где  $N_\mu^i = N_\mu^i(P) : N_\mu^i P_\mu = 0, N_\mu^i N_\mu^j = -\delta^{ij}; X_\mu = Z_\mu - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Gamma_\mu^{ij}S^k, \Gamma_\mu^{ij} = N_\nu^i \partial N_\nu^j / \partial P_\mu$ . Опорная кривая является мировой линией конца струны. Она светоподобна:  $Q'^2 = 0$ . Мировой лист струны определяется выражением  $x_\mu(\sigma_1, \sigma_2) = (Q_\mu(\sigma_1) + Q_\mu(\sigma_2))/2$  (геометрическое место середин отрезков, соединяющих всевозможные пары точек на опорной кривой), сечение мирового листа плоскостью  $x_0 = Const$  даёт струну в этот момент времени. Гамильтонианом системы является связь  $H = (P^2 - M^2)/2\pi \approx 0$ , генерирующая сдвиги  $Q_\mu(\sigma) \rightarrow Q_\mu(\sigma + \tau)$ .

Генераторы группы Лоренца определяются выражением

$$M_{\mu\nu} = X_\mu P_\nu - X_\nu P_\mu + \epsilon_{ijk} N_\mu^i N_\nu^j S^k.$$

Эти переменные генерируют преобразования Лоренца вектора  $X_\mu$  и системы координат  $(P_\mu/\sqrt{P^2}, \vec{N}_\mu \vec{e}_i)$ . Вектор  $Q_\mu(\sigma)$  разложен по этой системе координат с коэффициентами  $(M \left( \frac{\sigma}{\pi} - 1 \right), Q_i(\sigma + \tau))$ , сохраняющимися при преобразованиях Лоренца. В нашем подходе  $Z_\mu, P_\mu$  и  $\vec{S}$  являются независимыми каноническими переменными, квантовые коммутационные соотношения для которых постулируются из скобок Пуассона. Нетрудно проверить, что в квантовой механике алгебра Лоренца  $M_{\mu\nu}$  замкнута, и  $Q_\mu$  преобразуется как 4-вектор.

Переменные  $u$  параметризуют симплектическое многообразие  $\mathcal{M}/\Gamma$ . В работах [1] на картах этого многообразия введены симплектические координаты и исследована структура полноразмерной окрестности прямолинейной струны. Глобальная структура этого многообразия не изучена. Мы будем рассматривать в  $\mathcal{M}$  подмногообразия вида  $u = u(\mu, S)$ .

## 2. Ограничные конфигурации

Рассмотрим семейство  $\mathcal{M}_2$  опорных кривых, форма которых однозначно определяется двумя параметрами – массой и спином струны (длиной и площадью опорной кривой). Примером является семейство эллипсов. В  $\mathcal{M}_2$  включаются опорные кривые заданной формы со всевозможными значениями  $\tau$  и  $\vec{e}_i$ . Поэтому выделенные

подмногообразия фазового пространства сохраняются при эволюции и при поворотах. Фактически мы рассматриваем теорию частного класса движений струны, в которой имеется вращательная инвариантность.

С учётом переменных, определяющих ориентацию и выбор отмеченной точки, такое семейство обладает шестью степенями свободы. Подстановка выражения  $Q_i = Q_i(\sigma; \mu, S)$  в третью слагаемое формы (3) приводит это слагаемое к виду  $g(\mu, S)dS \wedge d\mu$ , где

$$g(\mu, S) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{\partial Q'_i}{\partial \mu} \frac{\partial Q_i}{\partial S}.$$

$\omega_u$  можно записать в виде  $dF \wedge d\mu + dG \wedge dS$ , где

$$F = -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\sigma Q'_i \frac{\partial Q_i}{\partial \mu} + \frac{\partial K}{\partial \mu}, \quad G = -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\sigma Q'_i \frac{\partial Q_i}{\partial S} + \frac{\partial K}{\partial S}. \quad (5)$$

Эти два слагаемых можно включить в  $\omega_M$  и  $\omega_S$ , при этом в формах переопределятся  $\tau$  и  $\vec{e}$  (см. приложение):

$$\tau^* = \tau + F, \quad \vec{e}^* = R(G)\vec{e}.$$

(В данной работе  $R(\vec{v}, \alpha)$  обозначает вращение вокруг направления  $\vec{v}$  на угол  $\alpha$ . Если ось  $\vec{v}$  не указана, подразумевается вращение вокруг направления  $\vec{S}$ .)

Таким образом, на рассматриваемых подмногообразиях фазового пространства симплектическая форма имеет вид “осциллятор + ротатор”:

$$\omega = d\tau^* \wedge d\mu + d\vec{e}^* \wedge d(\vec{S} \times \vec{e}^*). \quad (6)$$

Этот результат не зависит от выбора семейства опорных кривых.

Произвольная функция  $K$  в (5) определяет канонические преобразования переменных  $\tau^*$  и  $\vec{e}^*$ . При преобразовании

$$\tau \rightarrow \tau + \delta\tau, \quad \vec{e} \rightarrow R(\delta\alpha)\vec{e}, \quad Q_i(\sigma) \rightarrow R_{ij}(-\delta\alpha)Q_j(\sigma - \delta\tau)$$

( $\delta\tau, \delta\alpha$  зависят от  $\mu, S$ ) меняется представитель  $Q_i(\sigma)$  в классе эквивалентности  $\mathcal{M}_2/\Gamma$ , и не меняется  $\vec{Q}(\sigma) \in \mathcal{M}_2$ . Нетрудно убедиться, что изменение переменных  $(\tau^*, \vec{e}^*)$  при этом преобразовании можно скомпенсировать каноническим преобразованием с  $K = -\mu\delta\tau - S\delta\alpha$ . Поэтому канонические переменные  $(\tau^*, \vec{e}^*)$  не зависят от выбора представителя  $Q_i(\sigma)$ , вектор  $\vec{e}^*$  и точка  $\vec{Q}(0)|_{\tau^*=0}$  связаны с кривой  $\vec{Q}(\sigma)$  инвариантным образом. Мы выберем  $\vec{e} = \vec{e}^*$ ,  $\tau = \tau^*$  и не будем делать различия между этими переменными.

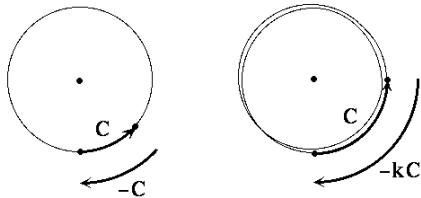
### 3. Глобальная топология фазового пространства

В теории струн масса и спин удовлетворяют неравенству  $\mu \geq S$  (условие Редже). Геометрически это условие означает, что среди всех замкнутых кривых заданной

длины максимальная ориентированная площадь достигается на окружности. Таким образом,  $\mathcal{M}_2$  занимает область в прямом произведении фазовых пространств осциллятора и ротора. Имеется ещё одно важное отличие  $\mathcal{M}_2$  от

$$\mathbf{R}^2 (\mu, \tau) \times TM(S^2) (\vec{e}, \vec{S}). \quad (7)$$

Пусть опорная кривая является ( $k$  раз сложенной) окружностью. В этом случае струна является прямолинейной ( $k$  раз сложенной). Преобразование  $\tau \rightarrow \tau + C$ ,  $\vec{e} \rightarrow R(-kC)\vec{e}$  сохраняет такие опорные кривые (см.рис.2). Для прямолинейных струн точки фазового пространства, связанные этим преобразованием, необходимо отождествить. Прямолинейные струны выполняют роль склеек в фазовом пространстве. Если семейство опорных кривых содержит окружности, то  $\mathcal{M}_2$  обладает более сложной топологической структурой, чем (7).



**Рис.2.** Эволюция и поворот сохраняют окружности.

Мы рассмотрим два типа ограниченных конфигураций, которые можно взаимно однозначно отобразить в фазовые пространства систем

- a) осциллятор + ротор  
(без ограничений на энергию осциллятора и спин ротора);
- б) волчок.

### 3.1. Осциллятор + ротор

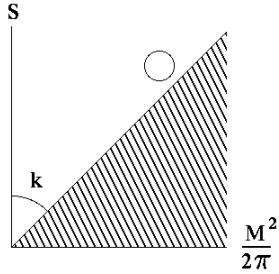
Рассмотрим семейство опорных кривых, для которого область изменения переменных  $(\mu, S)$  имеет вид  $\mu \geq kS$  (рис.3). Отображение в фазовое пространство “осциллятор+ротор”  $\mathcal{F}$  имеет вид

$$(\mu, \tau, \vec{S}, \vec{e}) \rightarrow (I, \tau, \vec{S}, \vec{n}),$$

$(I \geq 0, \tau \in S^1)$  – переменные действие-угол для осциллятора,

$$\mu = kS + I, \quad \vec{n} = R(k\tau)\vec{e}.$$

Отображение взаимно однозначно, только если  $k \in \mathbf{N}$ . При этом на верхней границе области струна должна быть прямолинейной ( $k$  раз сложенной).



**Рис.3.** Область Редже для конфигураций типа “осциллятор+ротатор”.

□ Положим  $\mu = f(I, S)$ . Подставляя это выражение в форму (6), получим

$$\omega = d\tilde{\tau} \wedge dI + d\vec{n} \wedge d(\vec{S} \times \vec{n}), \quad \tilde{\tau} = f'_I \tau, \quad \vec{n} = R(f'_S \tau) \vec{e}.$$

Форма определяет скобки Пуассона<sup>2</sup>

$$\{I, \tilde{\tau}\} = 1, \quad \{S^i, S^j\} = -\epsilon_{ijk} S^k, \quad \{S^i, n^j\} = -\epsilon_{ijk} n^k.$$

Изменение  $\tau$  на  $2\pi$  не меняет конфигурацию. Это преобразование должно быть тождественным в  $\mathcal{F}$ . Отсюда следует, что  $f'_I, f'_S \in \mathbf{Z}$ . Обратное отображение  $\tau = \tilde{\tau}/f'_I$ ,  $\vec{e} = R(-f'_S/f'_I \cdot \tilde{\tau}) \vec{n}$  однозначно при  $1/f'_I, f'_S/f'_I \in \mathbf{Z}$ . Отображение фазовых пространств взаимно однозначно при  $f'_I = \pm 1$ ,  $f'_S = k \in \mathbf{Z}$ , т.е. при  $\mu = kS \pm I$ . Условие Редже выполняется во всём фазовом пространстве только при  $\mu = kS + I$ ,  $k \in \mathbf{N}$ .

Области другого вида невозможна взаимно однозначно отобразить в  $\mathcal{F}$ , если требовать, чтобы  $\mu$  зависел только от  $I$  и  $S$ . Мы также требуем, чтобы в спиновой части отображение было тождественным (спин ротатора равен спину струны). Эти требования сужают класс рассматриваемых отображений. Заметим в связи с этим, что при сужении канонических преобразований осциллятора (произвольных сохраняющих площадь диффеоморфизмы фазовой плоскости) на класс  $\tilde{I} = f(I)$  ( $\tilde{I}$  не зависит от  $\tau$ ) учёт сохранения глобальной топологии фазовой плоскости оставляет только преобразования вида  $\tilde{I} = I$ ,  $\tilde{\tau} = \tau + F(I)$ . Аналогичное явление происходит в рассматриваемой задаче. Локально канонические преобразования фазового пространства существуют в классе  $\mu = f(I, S) \forall f$ . Требование сохранения глобальной топологии отбирает в этом классе дискретный набор преобразований.

Покажем, что на верхней границе области Редже струна должна быть прямолинейной. В фазовом пространстве осциллятора множество  $\{I = 0, \tau \in [0, 2\pi]\}$  представляет одну точку. Поэтому  $(0, \tau, \vec{S}, \vec{n}) \rightarrow (\mu = kS, \tau, \vec{S}, \vec{e} = R(-k\tau) \vec{n}) \forall \tau$  должно представлять одну конфигурацию. Эволюция и вращение действуют на такую конфигурацию одинаково. Это возможно только в случае прямолинейной ( $k$  раз сложенной) струны. ■

Внутри области Редже (при  $I \neq 0$ ) струна не должна быть прямолинейной, поскольку в этом случае в  $\mathcal{F}$  возникают лишние отождествления. По той же причине

<sup>2</sup>Для получения этих соотношений необходимо обратить коэффициентную матрицу симплектической формы и вычислить скобки Дирака на поверхности связей  $\vec{n}^2 = 1$ ,  $\vec{S} \vec{n} = 0$ .

внутри области опорная кривая не должна быть кратной и не должна обладать осевой симметрией, поскольку в этих случаях в  $\mathcal{F}$  существуют дискретные преобразования, сохраняющие конфигурацию. Однако в частном случае, когда все опорные кривые в  $\mathcal{M}_2$  являются кратными и/или осесимметричными, т.е. когда эти симметрии имеются не при исключительных значениях  $\mu$  и  $S$ , а во всём фазовом пространстве, такое семейство можно взаимно однозначно отобразить в  $\mathcal{F}$ .

**Осьевая симметрия.** Пусть все конфигурации (может быть, за исключением граничных) являются  $d$ -кратными и обладают осевой симметрией порядка  $p$ . Осьевая симметрия разбивает опорную кривую на  $pd$  симметричных участков. Сдвиг  $T : \tau \rightarrow \tau + 2\pi/pd$  эквивалентен повороту  $\vec{Q}(\sigma)$  вокруг  $\vec{S}$  на угол  $\alpha = 2\pi\nu/pd$ , где  $\nu$  – число зацепления  $\vec{Q}(\sigma)$  за ось симметрии  $\vec{S}$  (см.рис.4). Запишем  $\alpha = 2\pi r/p$ ,  $r = (\nu/d) \bmod p \in \mathbf{Z}_p$ . При  $p \neq 1$   $1 \leq r < p$ ,  $r$  и  $p$  взаимно просты (в противном случае  $r = n\tilde{r}$ ,  $p = n\tilde{p}$ ,  $\tilde{p}\Delta\tau = 2\pi/nd$ ,  $\tilde{p}\alpha = 2\pi\tilde{r}$ , т.е. опорная кривая является  $nd$ -кратной). При  $p = 1$  (нет осевой симметрии)  $r = 0$ . Для опорных кривых, пересекающих ось симметрии,  $\nu$  не определено. Однако при непрерывной деформации кривой, сохраняющей осевую симметрию,  $pd$  симметричных участков одновременно пересекают ось симметрии. При этом  $\nu$  меняется на  $pd$ , а  $r$  не меняется. Таким образом, в классе осесимметричных кривых  $r$  является топологическим инвариантом, все кривые в  $\mathcal{M}_2$  обладают одним и тем же  $r$ . В частности, для граничной  $k$ -кратной окружности  $\nu = k = d(r + pn)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

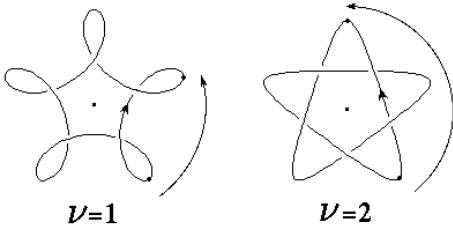


Рис.4. Осесимметричные опорные кривые,  $p = 5$ ,  $d = 1$ .

Конфигурация сохраняется при преобразовании

$$U = T(2\pi/pd)R(-2\pi r/p).$$

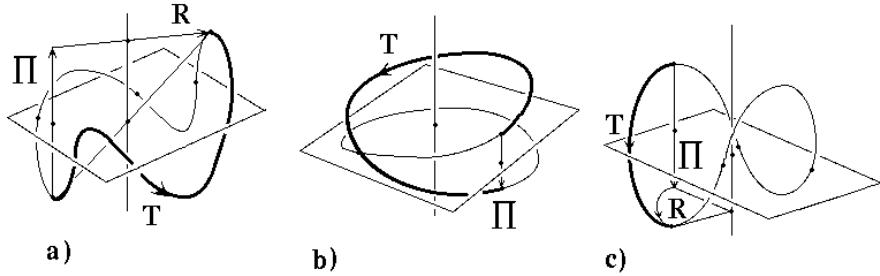
На верхней границе области Редже могут происходить дополнительные вырождения,  $k$  может не совпадать с  $d$ . Для  $k$ -кратной окружности дискретная симметрия  $U$  является частным случаем непрерывной симметрии этой конфигурации:  $T(C)R(-kC)$ .

Вектор  $\vec{n} = R(k\tau)\vec{e}$  сохраняется при преобразовании  $U: \vec{n} \rightarrow R(2\pi(k-rd)/pd)\vec{n} = \vec{n}$ . Таким образом, в  $\mathcal{F}$  преобразование  $U$  является сдвигом  $\tau \rightarrow \tau + 2\pi/pd$ . Переайдём к новым каноническим переменным  $\tau = \tilde{\tau}/pd$ ,  $I = \tilde{I} \cdot pd$ . В новых переменных  $U: \tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\tau} + 2\pi$ , поэтому в новом фазовом пространстве нет избыточных отождествлений, оно находится во взаимно однозначном соответствии с  $\mathcal{M}_2$ . В следующем разделе

будет показано, что при переходе к переменным  $(\tilde{I}, \tilde{\tau})$  изменяется спин-массовый спектр системы.

**P-отражение.** Для плоских опорных кривых ( $Q_3 = 0$ )  $P$ -отражение является поворотом  $R(\vec{S}, \pi)$ . Для неплоских кривых  $P$ -отражение действует в  $\mathcal{M}_2$  только при специальном выборе опорных кривых.

Поскольку  $P\vec{Q}$  обладает теми же  $\mu$  и  $\vec{S}$ , что и  $\vec{Q}$ , эти кривые имеют одинаковую форму и их можно совместить вращением вокруг  $\vec{S}$  на некоторый угол. Таким образом,  $P$  действует в  $\mathcal{M}_2$  только в том случае, если опорные кривые обладают зеркально-поворотной симметрией  $S_{2p}$ . Эта симметрия разбивает опорную кривую на  $2pd$  симметричных участков. Сдвиг  $T(\Delta\tau)$ ,  $\Delta\tau = \pi/pd$  для такой кривой эквивалентен отражению  $\Pi$  относительно плоскости, ортогональной  $\vec{S}$ , и повороту вокруг  $\vec{S}$  на угол  $\alpha = \pi\nu/pd$ . (Плоские опорные кривые включаются сюда как частный случай  $\Delta\tau = \alpha = 0$ .) При непрерывной деформации кривой  $\nu/d$  может измениться на  $2pn$ , при этом  $r_2 = (\nu/d) \bmod 2p$  не меняется, и  $\alpha = \pi r_2/p$ . Для граничной  $k$ -кратной окружности  $\nu = k = d(r_2 + 2pn)$ . Заметим, что  $(S_{2p})^2 = C_p$ ,  $S_{2p}$ -симметричная кривая при  $p \neq 1$  является также  $C_p$ -симметричной. При  $p = 1$  кривая является  $P$ -симметричной для нечётных  $\nu/d$  ( $r_2 = 1$ ) и  $\Pi$ -симметричной для чётных  $\nu/d$  ( $r_2 = 0$ ), см.рис.5.



**Рис.5.** Опорные кривые с зеркально-поворотной симметрией,  
а:  $p = 1, \nu = 1, r_2 = 1$ , б:  $p = 1, \nu = 2, r_2 = 0$ , в:  $p = 2, \nu = 1, r_2 = 1$ , ( $d = 1$ ).

Преобразование  $\Pi$  действует на данные конфигурации как  $R(-\alpha)T(\Delta\tau)$ , поэтому  $P = \Pi R(\pi) = R(\pi - \alpha)T(\Delta\tau)$ . Для вектора  $\vec{n} = R(k\tau)\vec{e}$ :  $P\vec{n} = R(\pi + \pi(k - r_2d)/pd)\vec{n} = R(\pi)\vec{n}$ . Таким образом, в  $\mathcal{F}$  для  $S_{2p}$ -симметричных конфигураций  $P = R(\pi)T(\pi/pd)$ .

В отличие от симметрии  $U$ , сохранение конфигураций при преобразовании  $V = \Pi RT$  не приводит к тождественности в фазовом пространстве и перестройке спектров в квантовой механике. Операцию  $\Pi$  нельзя представить дискретным преобразованием в  $\mathcal{M}_2$ , отличным от  $(RT)^{-1}$ , поэтому  $V$  нельзя представить оператором, отличным от тождественного. В общей механике  $\mathcal{M}$  преобразование  $\Pi$  меняет форму кривой  $u$ . Для  $S_{2p}$ -симметричных кривых в  $\mathcal{M}$  точки  $(\tau, \vec{e}, u)$  и  $(T\tau, R\vec{e}, \Pi u)$  необходимо отождествить.

### 3.2. Волчок

Пусть область изменения переменных  $(\mu, S)$  имеет вид  $k_1S \leq \mu \leq k_2S$  (рис.6). Отображение в фазовое пространство волчка  $\mathcal{G}$

$$(\mu, \tau, \vec{S}, \vec{e}) \rightarrow (\vec{S}, \vec{n}_i \in SO(3))$$

взаимно однозначно, только если  $k_{1,2} = k \mp 1$ ,  $k \in \mathbf{N}$ ,  $k \geq 2$ . При этом на границах области струна должна быть прямолинейной ( $k \mp 1$  раз сложенной).

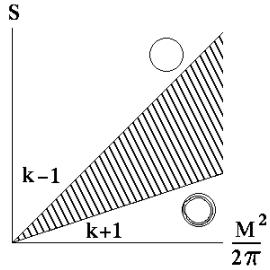


Рис.6. Область Редже для волчка.

□ Положим  $\mu = f(S, S_3)$ ,  $S_3$  – проекция  $\vec{S}$  на направление  $\vec{n}_3$ , которое мы сейчас определим.

$$\omega = df'_S \tau \wedge dS + df'_{S_3} \tau \wedge dS_3 + d\vec{e} \wedge d(\vec{S} \times \vec{e}) = \frac{1}{2} d\vec{n}_i \wedge d(\vec{S} \times \vec{n}_i). \quad (8)$$

Репер  $\vec{n}_i$  определяется следующим образом (рис.7). Вначале  $\vec{n}_i = \vec{e}_i = (\vec{e}, \vec{S} \times \vec{e}/S, \vec{S}/S)$ . Симплектическую форму ротатора (третье слагаемое (8)) можно также записать как симплектическую форму волчка (правая часть (8)) с  $\vec{n}_i = \vec{e}_i$ . Первое слагаемое в форме можно втянуть в третье с помощью поворота репера вокруг  $\vec{n}_3$  на угол  $\alpha = f'_S \tau$ . Затем повернём репер вокруг  $\vec{n}_2$  на угол  $\beta = \arccos S_3/S$ ,  $S_3 = F(\mu, S)$ . Это вращение ничего не выделяет в форме, поскольку  $\vec{S} \vec{n}_2 = 0$ . Второе слагаемое можно втянуть в третье с помощью поворота репера вокруг  $\vec{n}_3$  на угол  $\gamma = f'_{S_3} \tau$ . Таким образом,  $\vec{n}_i$  получается из  $\vec{e}_i$  тремя поворотами на углы Эйлера  $\alpha \in S^1$ ,  $\beta \in [0, \pi]$ ,  $\gamma \in S^1$ , зависящие от  $\mu$ ,  $\tau$  и  $S$ :

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3).$$

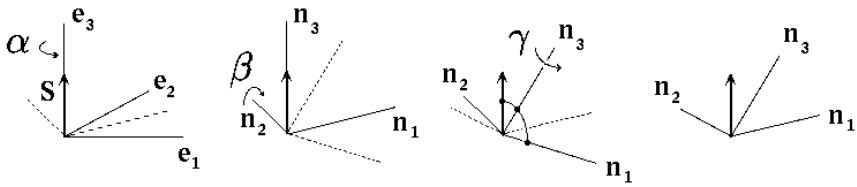


Рис.7. Преобразования репера.

Форма (8) определяет скобки Пуассона:<sup>3</sup>

$$\{S^i, S^j\} = -\epsilon_{ijk} S^k, \quad \{S^i, n_j^k\} = -\epsilon_{ikl} n_j^l.$$

Учтём условие взаимной однозначности отображения. Пусть  $\beta \in (0, \pi)$ . Тогда:

1. Изменение  $\tau$  на  $2\pi$  не меняет  $\vec{n}_i$ , если  $f'_{S_3}, f'_S \in \mathbf{Z}$ .
2. Рассмотрим обратное отображение  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{M}_2$ . Переменная  $\gamma$  определяется как угол поворота репера относительно  $\vec{n}_3$ , при котором  $\vec{n}_1$  переходит в плоскость  $(\vec{S}, \vec{n}_3)$ , и  $(\vec{S}, \vec{n}_3, \vec{n}_2)$  имеет положительную ориентацию. При этом  $\tau = \gamma/f'_{S_3}$  и  $\alpha = \gamma f'_S/f'_{S_3}$ . При изменении  $\gamma$  на  $2\pi$   $\tau$  меняется на  $2\pi/f'_{S_3}$  и  $\vec{e}$  поворачивается на угол  $2\pi f'_S/f'_{S_3}$ . В  $\mathcal{M}_2$  это преобразование тождественно, если  $1/f'_{S_3}, f'_S/f'_{S_3} \in \mathbf{Z}$ .

Отображение фазовых пространств взаимно однозначно, если  $f'_{S_3} = \pm 1$ ,  $f'_S = k \in \mathbf{Z}$ ,  $\mu = kS \pm S_3$ . (Такой гамильтониан вызывает пресессию волчка.) Условие Редже выполняется при  $k \geq 2$ . Замена знака  $S_3$  эквивалентна дискретному преобразованию репера  $\beta \rightarrow \pi - \beta$ ,  $\gamma \rightarrow -\gamma$ . Для определённости в  $\mu$  выберем знак плюс.

Если нарушено 1, то существуют несколько положений репера, которым отвечает одна конфигурация. При  $f'_S = k/n$ ,  $f'_{S_3} = l/n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $k, l \in \mathbf{Z}$  (дроби несократимы)  $n$  положениям репера отвечает одна конфигурация. Если при этом не нарушено 2, то  $l = \pm 1$ . Далее мы покажем, что на границах области Редже струна должна быть прямолинейной, сложенной  $(k \pm 1)/n$  раз. Поэтому  $(k \pm 1)/n \in \mathbf{N} \Rightarrow n = 2, k$  нечётно,

$$\mu = (kS + S_3)/2. \quad (9)$$

Если нарушено 2, то некоторым конфигурациям отвечает один репер, т.е. струнные переменные являются многолистными функциями репера. В квантовой механике нарушение 1 более приемлемо, так как в этом случае топологическую структуру фазового пространства можно учесть с помощью правила отбора: существуют дискретные преобразования репера, не меняющие состояние. При нарушении 2 необходимо вводить неаналитические функции операторов.

Для того чтобы получить групповое многообразие  $SO(3) \cong RP^3$  из многообразия углов Эйлера  $S^1 \times [0, \pi] \times S^1$ , необходимо произвести определённые склейки в точках  $\beta = 0, \pi$ . (В  $\mathcal{M}_2$  эти точки лежат на границе области Редже.) При  $\beta = 0, \pi$  преобразование  $\alpha \rightarrow \alpha + C$ ,  $\gamma \rightarrow \gamma \mp C$  (верхний знак для  $\beta = 0$ , нижний – для  $\beta = \pi$ ) сохраняет  $\vec{n}_i$ . Представим это преобразование как композицию двух преобразований:  $\alpha \rightarrow \alpha \mp f'_S/f'_{S_3} C$ ,  $\gamma \rightarrow \gamma \mp C$  и  $\alpha \rightarrow \alpha + (1 \pm f'_S/f'_{S_3})C$  при неизменном  $\gamma$ . В  $\mathcal{M}_2$  эти преобразования соответствуют эволюции  $\tau \rightarrow \tau \mp C/f'_{S_3}$  и повороту  $\vec{e} \rightarrow R(\pm(f'_S \pm f'_{S_3})C/f'_{S_3})\vec{e}$ . Эти преобразования сохраняют конфигурацию только в том случае, когда опорная кривая является окружностью, сложенной  $f'_S \pm f'_{S_3}$  раз ( $(k \pm 1$  раз, если выполнены 1 и 2). Для того чтобы в  $\mathcal{G}$  не возникало избыточных отождествлений, струна должна быть прямолинейной только на границах области.

<sup>3</sup>Для получения этих соотношений необходимо обратить коэффициентную матрицу симплектической формы и вычислить скобки Дирака на поверхности связей  $\vec{n}_i \vec{n}_j = \delta_{ij}$ .

**Осевая симметрия.** В том случае, когда все конфигурации внутри области Редже являются  $d$ -кратными и обладают симметрией  $C_p$ , в фазовом пространстве волчка действует дискретное преобразование  $U$ , сохраняющее конфигурацию. Рассматривая граничные конфигурации, нетрудно показать, что  $k \pm 1 = d(r + pn_{1,2})$ . Возможны два случая:

- a)  $p = 2, d = 1, r = 1, k = 2n;$
- б)  $p = 1, d = 2, r = 0, k = 2n + 1.$

Таким образом, конфигурация может быть осесимметричной только при чётных  $k$  и кратной только при нечётных  $k$ . Преобразование  $U : \alpha \rightarrow \alpha + 2\pi(k - rd)/pd, \gamma \rightarrow \gamma + 2\pi/pd$ . В обоих случаях (а и б) это эквивалентно замене  $\alpha \rightarrow \alpha + \pi, \gamma \rightarrow \gamma + \pi$ , т.е.  $U = R(\vec{S}, \pi)R(\vec{n}_3, \pi)$ .

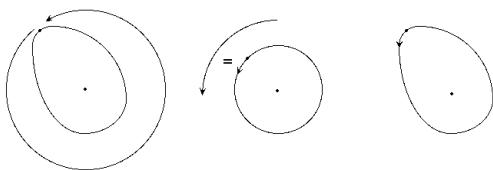
**Р-отражение.** Для плоских опорных кривых  $P = R(\vec{S}, \pi)$ . Рассмотрим кривые с симметрией  $S_{2p}$ . Для граничных конфигураций  $k \pm 1 = d(r_2 + 2pn_{1,2})$ , что возможно лишь при  $p = d = 1$  (рис.5а,б). Преобразование  $P = R(\vec{S}, \pi(1-r_2))T(\pi)$  эквивалентно замене  $\alpha \rightarrow \alpha + \pi(k + 1 - r_2) = \alpha, \gamma \rightarrow \gamma + \pi$ , т.е.  $P = R(\vec{n}_3, \pi)$ .

**Фазовое пространство волчка неодносвязно,** его фундаментальная группа  $\pi_1(\mathbf{R}^3 \times SO(3)) = \mathbf{Z}_2$ . В силу взаимной однозначности соответствия,  $\mathcal{M}_2$  обладает той же топологической структурой. Нестягивающим контуром в  $SO(3)$  является вращение на  $2\pi$ . В фазовом пространстве струн этому контуру отвечает вращение конфигурации на  $2\pi$ . С помощью непрерывной деформации (рис.8) это преобразование можно перевести в эволюцию в течение периода, однако его невозможно непрерывно деформировать в постоянное тождественное преобразование. В то же время все контуры, которые нельзя получить из нестягиваемого контура непрерывной деформацией, являются стягиваемыми. В частности, стягивающим является вращение на  $4\pi$ . Рассмотрим для определённости случай  $k = 2$ . На границах области Редже находятся окружности, сложенные 1-кратно и 3-кратно, для которых эволюция в течение времени  $\tau$  эквивалентна вращению на угол  $\tau$  и  $3\tau$  соответственно. Представим вращение на  $4\pi$  как композицию вращений на  $6\pi$  и  $-2\pi$ . Деформируя конфигурацию в 3-кратную окружность, можно превратить первое преобразование в эволюцию на  $2\pi$ . Затем, переводя конфигурацию через 1-кратную окружность, превратим эту эволюцию во вращение на  $2\pi$ . В композиции с вращением на  $-2\pi$  получим тождественное преобразование.

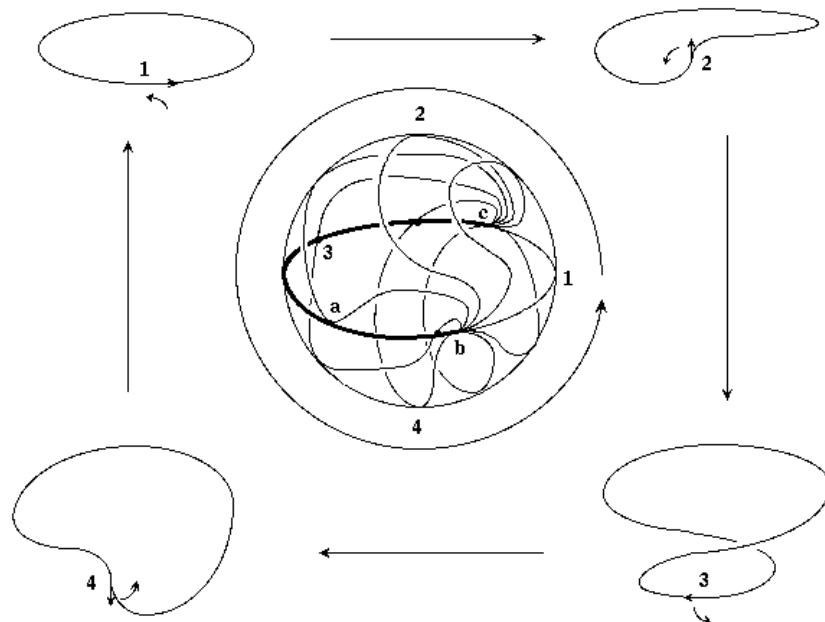
Множество  $\mathcal{M}$  всех непрерывных замкнутых кривых обладает тривиальной топологией:  $\pi_n(\mathcal{M}) = 0$ . ( $n$ -сферу в  $\mathcal{M}$ :  $\vec{Q}_0(\sigma; u), u \in S^n$  можно стянуть в точку  $\vec{Q}_1(\sigma) \in \mathcal{M}$  гомотопией  $\vec{Q}_0(\sigma; u) \cdot (1 - f) + \vec{Q}_1(\sigma) \cdot f, f = 0 \rightarrow 1$ .) Множество гладких замкнутых кривых  $\mathcal{M}'$  обладает более сложной структурой. Это множество связано:  $\pi_0(\mathcal{M}') = 0$  (все гладкие пространственные кривые можно перевести друг в друга непрерывной деформацией; заметим, что гладкие кривые на плоскости разбиваются на классы по числу оборотов касательного вектора,  $\pi_0(\mathcal{M}') = \mathbf{Z}$ ).  $\mathcal{M}'$

неодносвязно:  $\pi_1(\mathcal{M}') \neq 0$ . Нестягиваемый контур в  $\mathcal{M}'$  показан на рис.9. (Гладким замкнутым кривым  $\vec{Q}(\sigma)$  отвечают непрерывные замкнутые кривые  $\vec{Q}'(\sigma)$  на сфере  $|\vec{Q}'(\sigma)| = M/\pi$ . Существуют непрерывные отображения  $\vec{Q}'(\sigma, u) : S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$ , обладающие степенью  $n = \deg \vec{Q}' \neq 0$ , при которых образ тора покрывает сферу  $n$  раз. Такие отображения невозможно непрерывно деформировать в отображения, тождественные по  $u$ .)

Заметим также, что при рассмотрении ограниченных конфигураций в  $\mathcal{M}$  можно выделить подмногообразия с топологическими свойствами, отличными от свойств  $\mathcal{M}$ .



**Рис.8.** Вращение конфигурации на  $2\pi$  можно непрерывно деформировать в эволюцию за период. Деформация проводит конфигурацию через подмногообразие прямолинейных струн, для которых эти два преобразования совпадают.



**Рис.9.** Нестягиваемая деформация гладкой замкнутой кривой. При указанной деформации кривой  $\vec{Q}(\sigma)$  кривая  $\vec{Q}'(\sigma)$  одинократно заметает сферу. Это движение невозможно непрерывно деформировать в неподвижную кривую  $\vec{Q}'(\sigma)$ .

Точки самопересечения кривой  $\vec{Q}'(\sigma)$  отвечают особым точкам на мировом листе [4]. Данная деформация опорной кривой сопровождается процессами рождения/уничтожения особых точек: в

момент  $a$  на листе появляется пара особых точек, которые перемещаются к краю листа и исчезают на крае в моменты  $b$  и  $c$  (в эти моменты петли на кривой  $\vec{Q}'(\sigma)$  стягиваются в точках возврата).

**Замечание.** Точки фазового пространства  $S = 0$  являются особыми. В разд.1 мы выбрали  $\vec{e}_3 = \vec{S}/S$ . Кроме того, при канонических отображениях производились вращения векторов вокруг направления  $\vec{S}$ , гамильтониан также генерирует такие вращения. Эти вращения определены только при  $S \neq 0$ . Причина неопределённости состоит в том, что функция  $S = \sqrt{\vec{S}^2}$  является негладкой в точке  $\vec{S} = 0$ . В квантовой механике эту особенность можно устранить при соответствующем выборе квантовых аналогов  $S$  и  $\vec{n}_i$ .

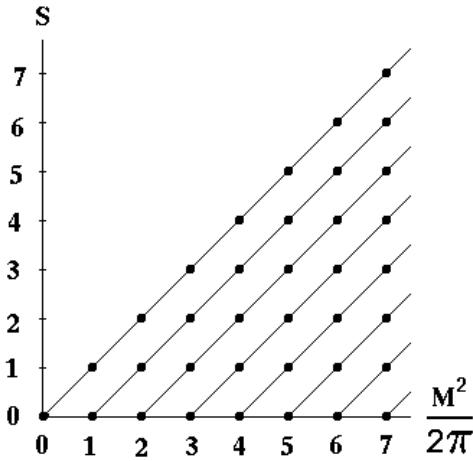
## 4. Квантование

В предыдущем разделе мы рассмотрели 6-мерные подмногообразия в фазовом пространстве струны, изоморфные фазовым пространствам осциллятор+ротатор и волчок. Квантовые теории этих систем хорошо изучены.

### 4.1. Осциллятор + ротатор

Пространство состояний: прямое произведение фоковского пространства  $\alpha|0\rangle = 0$ ,  $|I\rangle = (\alpha^+)^I|0\rangle$ ,  $[\alpha, \alpha^+] = 1$ , ( $\alpha$  – квантовый аналог  $\sqrt{I}e^{-i\tau}$ ) на пространство (квадратично интегрируемых) функций от вектора  $\vec{n}$  на единичной сфере. При этом  $\vec{S} = -i\vec{n} \times \partial/\partial\vec{n}$ . Выполнены соотношения

$$\vec{S}\vec{n} = 0, \quad [S^i, S^j] = i\epsilon_{ijk}S^k, \quad [S^i, n^j] = i\epsilon_{ijk}n^k.$$



**Рис.10.** Спектр масс для конфигураций типа осциллятор+ротатор,  $k = 1$ .

Базис пространства состояний:  $|ISS^3\rangle = |I\rangle \cdot Y_{SS^3}(\vec{n})$ .

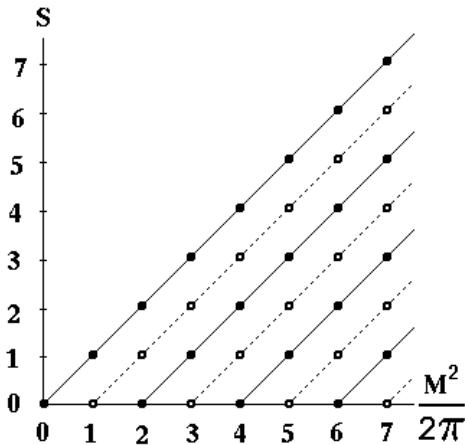
Оператор квадрата массы:  $\mu = kS + I + c_0$ ,  $I = \alpha^+\alpha$ ,  $c_0$  – произвольная числовая константа. Оператор  $S$  определяется соотношением [5]  $S = \sqrt{\vec{S}^2 + 1/4} -$

$1/2$ , так что  $\vec{S}^2 = S(S + 1)$ . Оператор  $S$  генерирует вращения  $\vec{n}$  вокруг  $\vec{S}$ . В теории ротатора собственные значения  $S = 0, 1, 2\dots$  Спин-массовый спектр приведён на рис.10. Спектр состоит из линейных реджевских траекторий,  $I$  является номером траектории. Состояния спектра невырождены (без учёта  $(2S + 1)$ -кратного вырождения по  $S^3$ ).

## Дискретные симметрии

**Осьвая симметрия.** При квантовании  $C_p$ -симметричных конфигураций получается спектр  $\mu = kS + pd\tilde{I} + c_0$ ,  $\tilde{I} = 0, 1, 2\dots$ , т.е. в спектре рис.10 необходимо оставить траектории с номерами, кратными  $pd$ .<sup>4</sup>

Этот результат можно получить также с помощью правила отбора по квантовому числу  $U$ . Преобразование  $U = T(2\pi/pd) \Leftrightarrow \alpha^+ \rightarrow e^{i2\pi/pd}\alpha^+$  можно реализовать с помощью унитарного оператора  $U = e^{i2\pi I/pd}$ . Для  $U$ -симметричных конфигураций  $[\vec{Q}(\sigma), U] = 0$ ,  $\vec{Q}(\sigma)$  сохраняет  $U$ . Таким образом, пространство состояний разбивается на  $pd$  изолированных секторов с разными  $U$ : нет операторов, построенных из конфигурации  $\vec{Q}(\sigma)$ , которые переводят друг в друга состояния из разных секторов. Спектры масс для этих секторов (рис.11) отличаются друг от друга на сдвиг вдоль оси  $\mu$ . Поскольку этот сдвиг также можно получить изменением константы  $c_0$ , имеет смысл рассматривать только один сектор с  $U = 1$ .



**Рис.11.** Спектр масс для осесимметричной конфигурации с  $p = 2$ ,  $d = 1$ ,  $k = 1$ . Пространство состояний разбито на 2 сектора с определёнными значениями  $U = (-1)^I$ :  $U = +1$  (сплошные линии),  $U = -1$  (штриховые линии).

**P-отражение.** Для плоских конфигураций  $P = e^{i\pi S} = (-1)^S$ . Для  $S_{2p}$ -симметричных конфигураций  $P = e^{i\pi S + i\pi I/pd} = (-1)^{S+I/pd} = (-1)^{S+\tilde{I}}$ .

---

<sup>4</sup>Полученный спектр содержится в спектре для произвольных осесимметричных конфигураций, приведенном в работе [3].

## 4.2. Волчок

Пространство состояний образовано функциями от  $\vec{n}_i \in SO(3)$ . В силу свойства  $\pi_1(SO(3)) = \mathbf{Z}_2$ , возможны два представления  $SO(3)$ : однозначное и двузначное [6].

Спин определяется дифференциальным оператором  $\vec{S} = -i\vec{n}_i \times \partial/\partial\vec{n}_i$ . Проекция спина на репер  $S_i = \vec{n}_i \cdot \vec{S}$ . Выполнены коммутационные соотношения:

$$[S^i, S^j] = i\epsilon_{ijk}S^k, \quad [S^i, n_j^k] = i\epsilon_{ikl}n_j^l, \\ [S_i, S_j] = -i\epsilon_{ijk}S_k, \quad [S_i, n_j^k] = -i\epsilon_{ijl}n_l^k, \quad [S^i, S_j] = 0.$$

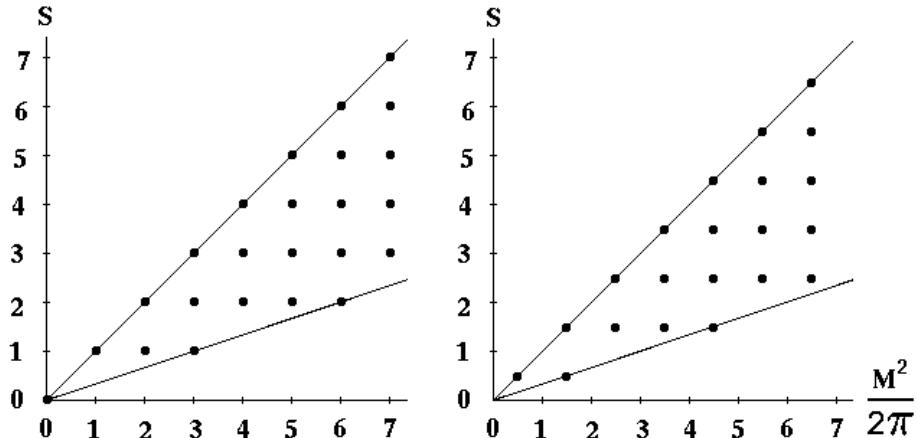
Оператор  $S^i$  генерирует вращения репера относительно внешней системы координат,  $S_i$  генерирует вращения относительно осей репера. Эти преобразования действуют на разные индексы в  $n_j^k$ . Они коммутируют, поэтому  $S^3$  и  $S_3$  одновременно измеримы.

Базис пространства состояний образован  $\mathcal{D}$ -функциями Вигнера:

$$|SS_3S^3\rangle = \mathcal{D}_{S_3S^3}^S(\vec{n}_i), \quad S_3, S^3 = -S, -S+1 \dots S,$$

где  $S$  принимает целые значения для однозначного представления и полуцелые для двузначного.

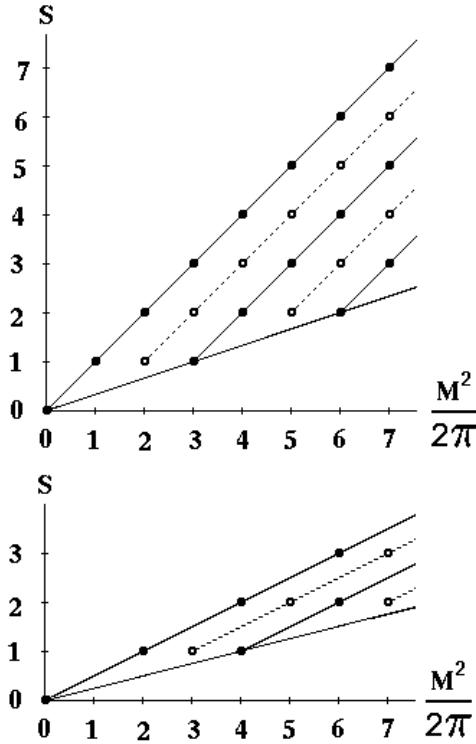
Оператор квадрата массы  $\mu = kS + S_3 + c_0$ . Спектр приведён на рис.12.



**Рис.12.** Спектр масс для волчка,  $k = 2$ , целые и полуцелые значения  $S$ .

## Дискретные симметрии

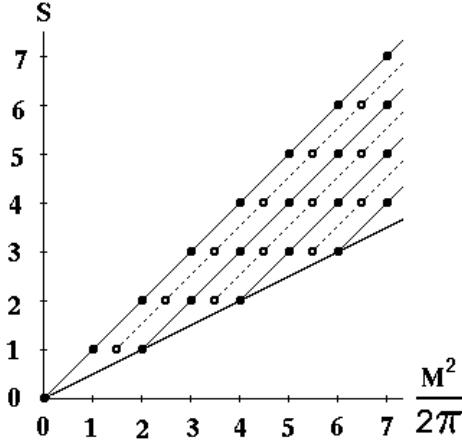
**Осьвая симметрия.**  $U = R(\vec{S}, \pi)R(\vec{n}_3, \pi) = e^{i\pi S}e^{i\pi S_3} = (-1)^{S+S_3}$ . На верхней границе области  $S_3 = -S$ ,  $U = +1$ . Спектр разбивается на траектории, параллельные верхней границе, с чередующимися значениями  $U = \pm 1$  (рис.13).



**Рис.13.** Спектр масс: вверху – для осесимметричной конфигурации  $p = 2, d = 1, k = 2$ ; внизу – для кратной конфигурации  $p = 1, d = 2, k = 3$ . Пространство состояний разбито на 2 сектора с определёнными значениями  $U$ :  $U = +1$  (сплошные линии),  $U = -1$  (штриховые линии).

**P-отражение.** Для плоских конфигураций  $P = (-1)^S$ . Для  $S_{2p}$ -симметричных конфигураций  $P = (-1)^{S_3}$ . В механике волчка и в механике осциллятор+ротор  $P$ -чётности состояний с заданными  $(\mu, S)$  подчиняются одной закономерности — на главной траектории ( $\tilde{I} = 0, S_3 = -S$ )  $P = (-1)^S$ , на дочерних траекториях ( $\tilde{I} = n, S_3 = -S + n, n = 1, 2, \dots$ ) чётности те же в случае плоских конфигураций и отличаются множителем  $(-1)^n$  для  $S_{2p}$ -симметричных конфигураций.

Рассмотрим волчок (9):  $\mu = (kS + S_3)/2$ ,  $k$  нечётно. Система обладает дискретной симметрией: преобразование  $\tau \rightarrow \tau + 2\pi \Rightarrow \alpha \rightarrow \alpha + \pi, \gamma \rightarrow \gamma + \pi$  не меняет конфигурацию. Преобразование совпадает с симметрией  $U$ . Пространство состояний разбито на два изолированных сектора с определёнными значениями  $U = (-1)^{S+S_3}$ . Спектр показан на рис.14. (Заметим, что конфигурации (9) не могут быть  $C_p$ -симметричными, поскольку  $(k \pm 1)/2 = d(r + pn_{1,2}) \Rightarrow p = d = 1$ . В данном случае симметрия  $U$  возникает из-за двузначности отображения  $\mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{G}$ . Конфигурации (9) также не могут быть  $S_{2p}$ -симметричными, поскольку условие  $(k \pm 1)/2 = d(r_2 + 2pn_{1,2})$  не выполняется ни при каких  $p$  и  $d$ . Поэтому в фазовом пространстве конфигураций (9) не действует  $P$ -отражение.)



**Рис.14.** Спектр системы с дискретной симметрией (9),  $k = 3$ .

### 4.3. Конфигурация

Построим оператор  $\vec{Q}(\sigma)$  в теории "осциллятор+ротатор":

$$\begin{aligned}\vec{Q}(\sigma) &= \vec{n}^+ Q_-(\sigma) + Q_+(\sigma) \vec{n}^- + \vec{n}_3 Q_3(\sigma), \\ \vec{n}_1 &= \vec{n}, \quad \vec{n}_2 = \frac{1}{S+1/2} (\vec{S} \times \vec{n} - \frac{i}{2} \vec{n}), \quad \vec{n}_3 = \frac{1}{S+1/2} \vec{S}, \quad \vec{n}_i^+ = \vec{n}_i, \\ \vec{n}^\pm &= (\vec{n}_1 \mp i \vec{n}_2) / \sqrt{2}, \quad [S, \vec{n}^\pm] = \pm \vec{n}^\pm, \quad \vec{S} \vec{n}^\pm = 0, \\ \vec{n}^\pm \vec{n}^\pm &= 0, \quad (\vec{n}^+ \vec{n}^- + \vec{n}^- \vec{n}^+)/2 = 1,\end{aligned}\tag{10}$$

(доказательство этих свойств приведено в [5]);

$u = \frac{1}{\sqrt{I+1}} \alpha$  – квантовый аналог  $e^{-i\tau}$ ,  $[u, I] = u$ ,  $uu^+ = 1$ ;

$$\begin{aligned}Q_-(\sigma) &= Q_-^k e^{ik\sigma} + \sum_{n=k+1}^{\infty} u^{+n-k} Q_-^n e^{in\sigma} + \sum_{n=-k+1}^{\infty} Q_-^{-n} u^{n+k} e^{-in\sigma}, \\ Q_+(\sigma) &= Q_+^{-k} e^{-ik\sigma} + \sum_{n=-k+1}^{\infty} u^{+n+k} Q_+^n e^{in\sigma} + \sum_{n=k+1}^{\infty} Q_+^{-n} u^{n-k} e^{-in\sigma}, \\ Q_3(\sigma) &= \sum_{n=1}^{\infty} u^{+n} Q_3^n e^{in\sigma} + Q_3^{-n} u^n e^{-in\sigma}, \\ Q_i^n &= Q_i^n(I, S), \quad i = \pm, 3; \quad Q_i^0 = 0; \quad (Q_-^n)^+ = Q_+^{-n}, \quad (Q_3^n)^+ = Q_3^{-n}.\end{aligned}\tag{11}$$

Оператор  $\vec{Q}$  эрмитов. При вращениях  $\vec{Q}$  преобразуется как вектор:  $[S^i, Q^j] = i\epsilon_{ijk}Q^k$ . Нетрудно показать, что  $[Q_\pm, I] = (i\frac{d}{d\sigma} \mp k)Q_\pm$ ,  $[Q_3, I] = i\frac{d}{d\sigma}Q_3$ , поэтому  $[\vec{Q}, \mu] = i\frac{d}{d\sigma}\vec{Q}$ . Построение 4-вектора  $Q_\mu(\sigma)$  проводится согласно (4), при этом не возникает неопределённости упорядочения. Как уже отмечалось, в данном подходе группа Лоренца свободна от квантовых аномалий, и  $Q_\mu(\sigma)$  преобразуется по ней как 4-вектор.

$Q_i^n(I, S)$  совпадают с коэффициентами фурье-разложений классических функций  $Q_i(\sigma)$ . При натуральной параметризации опорных кривых эти функции, как пра-

вило, не являются элементарными. Действие операторов  $Q_i^n$  наиболее просто определяется в базисе  $|ISS^3\rangle$ . Заметим, что в (11) можно выбрать иное упорядочение некоммутирующих операторов  $u, u^+$  и  $Q_i^n$ , согласованное со свойством эрмитовости  $\vec{Q}$ . Структура оператора (10) обеспечивает правильные трансформационные свойства оператора  $\vec{Q}$  независимо от конкретного вида функций  $Q_i^n$  и упорядочения в (11).

Для  $C_p$ -симметричных конфигураций  $\vec{Q}(\sigma)$  содержит степени операторов  $u^{pd}, u^{+pd}$ , меняющие  $I$  на  $npd$ . Отсюда непосредственно видно, что пространство состояний разбито на изолированные секторы с разными  $I \bmod pd$ . Для  $S_{2p}$ -симметричных конфигураций компонента  $\vec{Q}(\sigma)$ , ортогональная  $\vec{S}$ , содержит чётные степени операторов  $u^{pd}, u^{+pd}$ , а компонента, параллельная  $\vec{S}$  – нечётные степени этих операторов. Поэтому симметрия  $S_{2p}$  не приводит к дополнительным разбиениям пространства состояний. Коэффициенты при  $\vec{n}^\pm$  меняют  $I$  на  $2npd$  и сохраняют  $P = (-1)^{S+I/pd}$ , коэффициент при  $\vec{n}_3$  меняет  $P$ , векторы  $\vec{n}^\pm$  являются  $P$ -нечётными,  $\vec{n}_3$  –  $P$ -чётным, поэтому оператор  $\vec{Q}(\sigma)$  является  $P$ -нечётным:  $P\vec{Q} = -\vec{Q}P$ , в соответствии с определением операции  $P$ .

Способ упорядочения (11) является выделенным. При таком упорядочении главная реджевская траектория изолирована от дочерних, т.е. оператор  $\vec{Q}$  сохраняет подпространство с  $I = 0$  и ортогональное дополнение к нему. Для прямолинейной  $k$  раз сложенной струны коэффициенты  $Q_i^n$  принимают следующие значения:

$$Q_-^n(0, S) = \sqrt{\frac{S}{\pi k}} \delta_{n,k}, \quad Q_+^n(0, S) = \sqrt{\frac{S}{\pi k}} \delta_{n,-k}, \quad Q_3^n(0, S) = 0. \quad (12)$$

При действии на состояния  $|0SS^3\rangle$  в операторах  $Q_i(\sigma)$  отличны от нуля только первые слагаемые  $Q_\pm(\sigma)$ . Операторы  $\vec{n}_i$  коммутируют с  $I$  (действуют на реджевской траектории). Поэтому  $\vec{Q}(\sigma)|0SS^3\rangle = (\vec{n}^+ \sqrt{\frac{S}{\pi k}} e^{ik\sigma} + \sqrt{\frac{S}{\pi k}} \vec{n}^- e^{-ik\sigma})|0SS^3\rangle$ . Выражение в скобках совпадает с оператором конфигурации в теории прямолинейной струны [2], с точностью до замены на массовой поверхности  $kS \rightarrow P^2/2\pi$ .

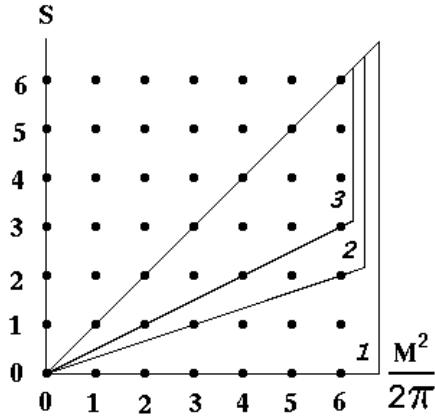
При упорядочениях, отличных от (11), свойство изолированности главной реджевской траектории теряется, в  $Q_i(\sigma)$  появляются члены, вызывающие переходы между главной и дочерними траекториями. Матричный элемент  $\langle 0S'S^{3'}|\vec{Q}(\sigma)|0SS^3\rangle$  по-прежнему совпадает с аналогичным матричным элементом в теории прямолинейной струны, поскольку в него дают вклад только первые слагаемые  $Q_\pm(\sigma)$ , не содержащие неопределённости упорядочения.

## Заключение

Для частных классов движений струны, описанных в разд.2, построена гамильтонова механика, в которой спин струны является независимой переменной. Это позволяет построить квантовую теорию без аномалий. В заключение обсудим роль некоторых элементов конструкции, использованной в данной работе.

Нетрудно заметить, что полученные спектры совпадают с результатом квантования системы как совокупности (6) осциллятор  $(\mu, \tau)$  + ротатор  $(\vec{S}, \vec{e})$  и последу-

ющего наложения классических ограничений на  $\mu$  и  $S$  как условий на собственные значения. За исключением двузначного представления волчка, построенные спектры 2-параметрических конфигураций совпадают с соответствующими частями целочисленной решётки  $(\mu, S)$ , получаемой при "наивном" квантовании (см.рис.15). При этом симметрия  $U = e^{i2\pi(\mu/pd - Sr/p)}$  разбивает спектр на  $pd$  совокупностей параллельных траекторий, и  $P$ -чётность состояний совпадает с вычисленной в разд.4.



**Рис.15.**

Спектры 2-параметрических конфигураций содержатся в спектре системы осциллятор  $(\mu, \tau)$  + ротатор  $(\vec{S}, \vec{e})$  без ограничений на  $\mu$  и  $S$ : 1 – осциллятор+ротатор; 2 – волчок  $S \in \mathbf{Z}$ ; 3 – волчок (9)  $U = +1$ .

В такой квантовой теории, однако, имеются операторы, не сохраняющие выделенные области спектра. Также нет возможности проверить в общем виде, сохраняются ли эти области под действием оператора конфигурации  $\vec{Q}(\sigma)$  (только в этом случае в выделенном подпространстве будет построена квантовая теория ограниченных струнных конфигураций). В подходе, использованном в данной работе, области в спектре возникают вследствие естественных неравенств, выполняющихся во вспомогательных фазовых пространствах ( $I \geq 0$  или  $|S_3| \leq S$ ), все операторы теории сохраняют эти области.

Роль вспомогательных фазовых пространств не ограничивается приведением неравенства Редже к "естественному виду". Отображение во вспомогательные фазовые пространства должно быть взаимно однозначным. В противном случае в квантовой теории будут получены искажённые спектры. Так, выполнения неравенства  $\mu \geq S$  можно добиться, если положить  $\mu = S + I^2$ ,  $I$  – энергия осциллятора. При этом в квантовой теории реджевские траектории не будут эквидистантными. Причина искажения состоит в том, что взаимно однозначного канонического преобразования с таким определением  $\mu$  не существует, это определение описывает систему, принципиально отличающуюся от исходной механики частного класса движений струны.

Автор благодарит Э.А.Петросяна, Г.П.Пронько, А.В.Разумова и Л.Д.Соловьёва за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке Международной Соросовской Программы.

## Список литературы

- [1] Pron'ko G.P. // Rev. Math. Phys. 1990. V.2. N.3. P.355.  
Пронько Г.П. // ТМФ. 1984. Т.59. Н.2. С.240.
- [2] Бородулин В.И. и др. // ТМФ. 1985. Т.65. Н1. С.119.  
Бердников Е.Б., Пронько Г.П. // ЯФ. 1991. Т.54. Н3. С.763.  
Berdnikov E.B., Nanobashvili G.G., Pron'ko G.P. // Int. J. Mod. Phys. A. 1993. V.8. N14. P.2447; V.8. N15. P.2551.
- [3] Никитин И.Н. // ЯФ. 1993. Т.56. Н9. С.230.
- [4] Klimenko S.V., Nikitin I.N., Talanov V.V. Singularities on the World Sheets of Open Relativistic Strings: Preprint IHEP 95-7, Protvino, 1995.
- [5] Бердников Е.Б., Нанобашвили Г.Г., Пронько Г.П. // ЯФ. 1992. Т.55. Н1. С.203.
- [6] Вейль Г. Теория групп и квантовая механика. – М.: Наука, 1986.

*Рукопись поступила 27 ноября 1995 г.*

## Приложение

### Замены репера в симплектической форме волчка

Пусть  $\vec{e}_i = R_{ij} \vec{n}_j$ , где  $R_{ij}(\alpha)$  – ортогональная матрица, зависящая от одного параметра. Подставляя это выражение в симплектическую форму волчка, получим

$$\omega_S = \frac{1}{2} d\vec{n}_i \wedge d(\vec{S} \times \vec{n}_i) - \frac{1}{2} (\vec{S} \times \vec{n}_j, \vec{n}_k) dR_{ij} \wedge dR_{ik} + \frac{1}{2} \epsilon_{kjl} R_{ik} dR_{ij} \wedge d(\vec{n}_l \vec{S}).$$

Второе слагаемое пропорционально  $d\alpha \wedge d\alpha = 0$ . Пусть  $R(\alpha)$  – подгруппа вращений вокруг направления  $\vec{r}$ :  $R(\alpha) = e^{\hat{r}\alpha}$ ,  $\hat{r}_{ij} = \epsilon_{ijk} r_k$ . Тогда  $R^T dR = \hat{r} d\alpha$  и третье слагаемое можно записать в виде  $d\alpha \wedge dS_r$ , где  $S_r = r_i \vec{n}_i \vec{S}$  – проекция  $\vec{S}$  на ось вращения.

Таким образом, при вращении репера на угол  $\alpha$  относительно оси  $\vec{r}$  в симплектической форме выделяется член  $d\alpha \wedge dS_r$ . Вращение может производиться относительно осей  $\vec{e}_i$  (либо относительно оси, имеющей нединамическое разложение по  $\vec{e}_i$ ). При вращении  $\vec{e}_i$  и  $\vec{S}$  относительно осей внешней системы координат выделяется слагаемое  $-d\alpha \wedge dS_r$  ( $e_i^j = R^{jk} n_i^k$ ,  $\omega_S = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} de_a^i \wedge d(S^j e_a^k) = -\frac{1}{2} \epsilon_{abc} de_a^i \wedge d(S_b e_c^i)$ ,  $S_a = \vec{S} \vec{e}_a$ , доказательство аналогично приведенному выше). При преобразованиях  $\omega_S$  существенно использовалось то, что угол вращения  $\alpha$  – единственная динамическая переменная, от которой зависит  $R$ , поэтому положение оси вращений не может зависеть от других динамических переменных. (В противном случае в форме все слагаемые вида  $d\alpha \wedge dI$  можно было бы скомпенсировать переопределением репера: для любого  $I$  ( $|I| \leq S$ ) можно найти такую ось  $\vec{r}$ , что  $S_r = I$ .)

С помощью трёх вращений репер можно привести из произвольного положения в нединамическое. Поэтому каноническими переменными для волчка являются углы Эйлера и

проекции момента на текущие оси:  $\omega_S = d\alpha \wedge dS_z + d\beta \wedge dS_{y'} + d\gamma \wedge dS_{z''}$ . Наоборот, слагаемое вида  $d\alpha \wedge dS_i$  можно втянуть в  $\omega_S$ , переопределяя репер вращением вокруг  $\vec{e}_i$  на угол  $\alpha$ .

Для ротатора  $d\alpha \wedge dS + d\vec{e} \wedge d(\vec{S} \times \vec{e}) = d\vec{n} \wedge d(\vec{S} \times \vec{n})$ ,  $\vec{n} = R(\vec{S}, \alpha)\vec{e}$ .

Согласно разд.1, такой закон преобразования  $\omega_S$  означает, что  $\vec{S}$  является генератором вращений в механике волчка ( $S^i$  вращает  $\vec{e}_k$  и  $\vec{S}$  относительно внешних осей и сохраняет  $S_i$ ,  $S_i$  вращает  $\vec{e}_k$  относительно оси  $\vec{e}_i$  и сохраняет  $\vec{S}$ ), а также в любой механике с симплектической формой  $\omega_S + \Delta\omega$ , где  $\Delta\omega$  сохраняется при вращениях на динамический угол.

И.Н.Никитин.

Частные классы движений струны, квантуемые без аномалий.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

Редактор М.Л.Фоломешкина.

---

Подписано к печати 16.01.96. Формат 60 × 84/8.  
Офсетная печать. Печ.л. 2,75. Уч.-изд.л. 2,11. Тираж 250. Заказ 560.  
Индекс 3649. ЛР №020498 17.04.97.

---

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий  
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

---

П Р Е П Р И Н Т 96-3,                   И Ф В Э,                   1996

---