ИФВЭ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

IHEP

ИФВЭ 96–34
ОТФ

В.Е. Рочев

ОБ ОДНОМ НЕПЕРТУРБАТИВНОМ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Направлено в *ТМФ*

Протвино 1996

УДК 539.1.01 М–24

Аннотация

Рочев В.Е. Об одном непертурбативном методе вычисления функций Грина: Препринт ИФВЭ 96–34. – Протвино, 1996. – 10 с., библиогр.: 4.

Предложен новый метод непертурбативного вычисления функций Грина квантовой механики и квантовой теории поля. Метод основан на аппроксимации уравнения Швингера для производящего функционала точно решаемым уравнением в функциональных производных. Для модели скалярного поля с самодействием ϕ_d^4 решены уравнения главного приближения и первого шага. Для $d = 1$ (ангармонический осциллятор) вычислена энергия основного состояния. Для теории поля ($d = 2, 3$) выполнена программа перенормировок. При $d = 4$ перенормировка константы связи приводит к тривиализации теории.

Abstract

Rochev V.E. A Non-Perturbative Method of Calculation of Green Functions: IHEP Preprint 96–34. – Protvino, 1996. – p. 10, refs.: 4.

A new method for non-perturbative calculation of Green functions in quantum mechanics and quantum field theory is proposed. The method is based on an approximation of Schwinger equation for the generating functional by exactly soluble equation in functional derivatives. Equations of the leading approximation and the first step are solved for the ϕ_d^4-model. At $d = 1$ (anharmonic oscillator) the ground state energy is calculated. The renormalization program is performed for the field theory at $d = 2, 3$. At $d = 4$ the renormalization of coupling constant involves a trivialization of the theory.

Построение непертурбативных приближенных решений в течение многих лет остается актуальной проблемой квантовой теории поля.

В настоящей работе предлагается метод построения такого рода приближений, в основе которого лежит идея об аппроксимации уравнения Швингера для производящего функционала некоторым более простым уравнением в функциональных производных, допускающим точное решение. Это решение является основой для линейной итерационной схемы, каждый шаг которой сводится к решению замкнутой системы линейных интегральных уравнений. Предложенным методом исследованы главное приближение и первый шаг (включающий двухчастичную амплитуду) для модели скалярного поля с самодействием ϕ^4_d, где d — размерность пространства. При $d = 1$ эта модель соответствует квантовомеханическому ангармоническому осциллятору, для которого получена формула энергии основного состояния. Для $d = 2, 3$ (сверхперенормируемая теория поля) выполнена перенормировка главного приближения и первого шага. Для $d = 4$ (перенормируемая теория) выполнение программы перенормировок приводит к нефизическим особенностям амплитуды, что является отражением известной проблемы тривиальности ϕ^4_4–теории в непертурбативной области.

Рассмотрим теорию скалярного поля $\phi(x)$ в евклидовом пространстве ($x \in E_d$) с действием

$$S(\phi) = \int dx\{\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \lambda\phi^4\}. \tag{1}$$

Производящий функционал функций Грина может быть записан в виде функционального интеграла

$$G(\eta) = N^{-1}\int D\phi \exp\{-S + \phi\eta\phi\}, \tag{2}$$

где

$$\phi\eta\phi \equiv \int dxdy\phi(x)\eta(xy)\phi(y), \tag{3}$$

а $\eta(xy)$ — билокальный источник.

Использование билокального источника в предлагаемом варианте аппроксимационной схемы является существенным моментом, в связи с чем мы будем рассматривать только теорию без спонтанного нарушения симметрии с $m^2 > 0$. Краткое обсуждение теории с простым источником и со спонтанным нарушением симметрии содержится в конце.

При $d \geq 2$ в действие должны быть включены соответствующие контрчлены, устраняющие ультрафиолетовые расходимости. Константа N определяется условием нормировки производящего функционала $G(0) = 1$.

Уравнение Швингера для производящего функционала $G(\eta)$ имеет вид

$$4\lambda \frac{\delta^2 G}{\delta\eta(yx)\delta\eta(xx)} + (m^2 - \partial^2)\frac{\delta G}{\delta\eta(yx)} - 2\eta(x1)\frac{\delta G}{\delta\eta(y1)} - \delta(x-y)G = 0. \tag{4}$$

Здесь и всюду в дальнейшем арабской цифрой обозначается немая переменная интегрирования.

Идея предлагаемой итерационной схемы состоит в том, чтобы в качестве главного приближения рассматривать “уравнение с постоянными коэффициентами”, т.е. уравнение (4), в котором опущен предпоследний член, содержащий в явном виде источник

$$4\lambda \frac{\delta^2 G_0}{\delta\eta(yx)\delta\eta(xx)} + (m^2 - \partial^2)\frac{\delta G_0}{\delta\eta(yx)} - \delta(x-y)G_0 = 0. \tag{5}$$

Поскольку функции Грина есть производные $G(\eta)$ в нуле, то нам достаточно знать поведение G вблизи $\eta = 0$, и такое приближение представляется вполне оправданным.

Опущенный член с источником будет рассматриваться как возмущение, т.е. итерационная процедура для производящего функционала

$$G = G_0 + G_1 + \cdots + G_n + \cdots \tag{6}$$

состоит в последовательном решении уравнений

$$4\lambda \frac{\delta^2 G_n}{\delta\eta(yx)\delta\eta(xx)} + (m^2 - \partial^2)\frac{\delta G_n}{\delta\eta(yx)} - \delta(x-y)G_n = 2\eta(x1)\frac{\delta G_{n-1}}{\delta\eta(y1)}. \tag{7}$$

Решение уравнения главного приближения (5) есть функционал

$$G_0 = \exp\{\eta(12) \triangle_0 (21)\}, \tag{8}$$

где $\triangle_0$ — решение уравнения

$$4\lambda \triangle_0 (0) \triangle_0 (xy) + (m^2 - \partial^2) \triangle_0 (xy) = \delta(x-y). \tag{9}$$

При $d \geq 2$ выражение $\triangle_0(0)$ должно пониматься как некоторая регуляризация.

Уравнение (9) имеет вид уравнения самосогласования, но отличается от него коэффициентом при λ — в уравнении самосогласования он в три раза больше. В этом смысле оно более соответствует уравнению для пропагатора в главном приближении $1/N$-разложения, хотя и это соответствие чисто внешнее, поскольку принцип построения аппроксимационной схемы совсем иной.

Решение уравнения (9) есть свободный пропагатор

$$\triangle_0 = \frac{1}{\mu^2 - \partial^2} \tag{10}$$

с перенормированной массой $\mu^2 = m^2 + 4\lambda \triangle_0 (0)$. Величина $\triangle_0(0)$ определяется из условия самосогласования. Пропагатор есть первая производная $G(\eta)$ по источнику $\eta:\ \ \triangle = \frac{\delta G}{\delta \eta}\mid_{\eta=0}$ и, как легко видеть, в главном приближении это просто $\triangle_0$.

Обращает на себя внимание тот факт, что все высшие функции Грина главного приближения, начиная с четырехточечной функции $G^4 = \frac{\delta^2 G}{\delta \eta^2}\mid_{\eta=0}$ не обладают правильной связной структурой и, соответственно, полной бозе-симметрией. Правильная связная структура и другие свойства, связанные с бозе-симметрией (такие, как кроссинг-симметрия), последовательно восстанавливаются на следующих шагах итерационной схемы. (В этом легко убедиться, анализируя, например, уравнения итерационной схемы при $\lambda \to 0$, когда они значительно упрощаются.) Эта особенность итерационной схемы связана с использованием билокального источника и не является чем-то необычным: как известно, похожее явление происходит и при построении $1/N$-разложения в формализме билокального источника.

Уравнение первого шага для производящего функционала G_1 имеет вид

$$4\lambda \frac{\delta^2 G_1}{\delta\eta(yx)\delta\eta(xx)} + (m^2 - \partial^{\,2})\frac{\delta G_1}{\delta\eta(yx)} - \delta(x-y)G_1 = 2\eta(x1) \triangle_0 (1y) G_0. \tag{11}$$

Решение уравнения (11) будем искать в виде $\quad G_1 = P_1(\eta)G_0, \quad$ где $P_1 = \frac{1}{2}F\eta^2 + \triangle_1\eta$. Уравнение (11) с учетом уравнений главного приближения даст нам систему уравнений для F и $\triangle_1$:

$$\begin{aligned} (\mu^2 - \partial_x^{\,2})F\begin{pmatrix} x\, y \\ x'\, y' \end{pmatrix} + 4\lambda F\begin{pmatrix} x\, x \\ x'\, y' \end{pmatrix} \triangle_0 (xy) = \\ = \delta(x-y') \triangle_0 (x'y) + \delta(x-x') \triangle_0 (yy'), \end{aligned} \tag{12}$$

$$(\mu^2 - \partial^{\,2}) \triangle_1 (xy) + 4\lambda \triangle_1 (0) \triangle_0 (xy) + 4\lambda F\begin{pmatrix} x\, x \\ x\, y \end{pmatrix} = 0. \tag{13}$$

Уравнение (12) — линейное интегральное уравнение для функции F. Решение этого уравнения есть

$$\begin{aligned} F\begin{pmatrix} x\, y \\ x'\, y' \end{pmatrix} = \triangle_0(xy') \triangle_0 (x'y) + \triangle_0(xx') \triangle_0 (yy') - \\ -4\lambda \triangle_0 (x1) \triangle_0 (y1) K(12) \triangle_0 (2x') \triangle_0 (2y'), \end{aligned} \tag{14}$$

где ядро K является решением уравнения

$$K(xy) = 2\delta(x-y) - 4\lambda L(x1)K(1y), \tag{15}$$

а $L(xy) \equiv \triangle_0^2(xy)$ — простая петля. Уравнение (15) легко решается в импульсном пространстве. Из трансляционной инвариантности следует, что K — функция одной переменной $x-y$, и уравнение (15) — уравнение в свертках, решение которого в импульсном пространстве

$$\tilde{K}(p)=\frac{2}{1+4\lambda\tilde{L}(p)}. \tag{16}$$

Обратим внимание, что первые два члена в формуле (14) для F — это недостающая связная структура четырехточечной функции главного приближения. Таким образом, связная структура четырехточечной функции восстанавливается уже на первом шаге итераций.

Так же просто решается и уравнение (13) для $\triangle_1$. С учетом вышеприведенных формул это решение может быть записано в виде

$$\triangle_1(xy)=-\triangle_0(x1)\Sigma_r(12)\triangle_0(2y), \tag{17}$$

где

$$\Sigma_r(xy)=[4\lambda\triangle_1(0)+8\lambda\triangle_0(0)]\delta(x-y)+\Sigma(xy), \tag{18}$$

$$\Sigma(xy)=-(4\lambda)^2\triangle_0(xy)L(x1)K(1y). \tag{19}$$

Величина $\triangle_1(0)$ определяется из условия самосогласования.

При $\lambda\to 0$, как легко видеть, $\triangle=\triangle_0+\triangle_1=\triangle^{pert}+O(\lambda^2)$, где $\triangle^{pert}$ — пропагатор теории возмущений, т.е. при малых λ пропагатор первого шага правильно воспроизводит первый член обычной теории возмущений по константе связи.

В общем случае, на n-ом шаге итерационной схемы решение уравнения (7) есть

$$G_n=P_n(\eta)G_0, \tag{20}$$

где P_n — полином по η степени $2n$, т.е. на n-ом шаге вычисление функций Грина сводится к решению системы $2n$ линейных интегральных уравнений, определяющих соответствующую аппроксимацию.

При $d=1$ модель с действием (1) описывает квантовомеханический ангармонический осциллятор. Параметр m^2 соответствует в данном случае частоте гармонического осциллятора, описываемого квадратичным членом потенциала. При $d=1$ нет никаких ультрафиолетовых расходимостей, величины $\triangle_0(0)$ и $\triangle_1(0)$ оказываются конечными, и формулы (8)–(19) непосредственно применимы для вычисления функций Грина.

Поскольку при $d=1\quad\triangle_0(0)=\frac{1}{2\mu}$, то условие самосогласования принимает вид уравнения на перенормированную массу (точнее, в данном случае “перенормированную частоту”) μ^2:

$$\mu^2=m^2+\frac{2\lambda}{\mu}. \tag{21}$$

Здесь $\mu=\sqrt{\mu^2}$. Это уравнение имеет единственное положительное решение при всех положительных m^2 и λ.

Для вычисления энергии основного состояния E мы воспользуемся известной формулой (см., например, обзор [1])

$$\frac{dE}{d\lambda}=G^4(0,0,0,0). \tag{22}$$

В этой формуле G^4 — четырехточечная (двухчастичная) функция $G^4 = \frac{1}{G}\frac{\delta^2 G}{\delta\eta^2}\mid_{\eta=0}$. С помощью полученных выше результатов для функций Грина главного приближения и первого шага, получаем следующую формулу для энергии основного состояния ангармонического осциллятора:

$$\frac{dE}{d\lambda} = \frac{1}{4\mu^2} + \frac{1}{\mu M}(1 - \frac{2\lambda}{\lambda+\mu^3}(1 - \frac{2\lambda}{\mu(M+2\mu)^2})). \tag{23}$$

Здесь $M = \sqrt{4\mu^2 + \frac{4\lambda}{\mu}}$. Интегрируя эту формулу с учетом граничного условия $E(\lambda = 0) = m/2$, можно вычислять энергию основного состояния для всех значений константы связи: $0 \leq \lambda < \infty$. При $\lambda \to 0$ $E = m(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{\lambda}{m^3} + O(\lambda^2))$, т.е. воспроизводится теория возмущений с точностью до второго порядка. При $\lambda \to \infty$ $E = \epsilon_0\lambda^{1/3} + O(\lambda^{-1/3})$, причем $\epsilon_0 = 0.756$. Этот коэффициент отличается от результата численных вычислений $\epsilon_0^{exact} = 0.668$ (см., например, работы [1,2]) на 13%. При $\lambda/m^3 = 0.1$ результат вычислений по формуле (23) отличается от точного численного значения [2] на 0.8%, а при $\lambda/m^3 = 1$ — на 6.3%. Таким образом, формула первого шага (23) аппроксимирует энергию основного состояния во всем интервале значений λ с точностью, которая плавно изменяется от 0 (при $\lambda \to 0$) до 13% (при $\lambda \to \infty$). Существенное улучшение точности может дать применение методов вариационной теории возмущений (см., например, [1]).

При $d \geq 2$ для устранения ультрафиолетовых расходимостей теории поля действие (1) должно быть дополнено соответствующими контрчленами. Рассмотрим сначала сверхперенормируемую теорию ($d = 2$ и $d = 3$). В этом случае достаточно ввести контрчлены перенормировки массы $\frac{\delta m^2}{2}\phi^2$ и перенормировки волновой функции $\frac{\delta z}{2}(\partial_\mu\phi)^2$. При этом уравнение Швингера с контрчленами будет иметь тот же вид (4) с заменой

$$m^2 \to m^2 + \delta m^2, \quad \partial^2 \to (1 + \delta z).\partial^2 \tag{24}$$

В главном приближении контрчлен перенормировки волновой функции вводить не надо, и уравнение главного приближения будет иметь вид

$$4\lambda\frac{\delta^2 G_0}{\delta\eta(yx)\delta\eta(xx)} + (\delta m_0^2 + m^2 - \partial^2)\frac{\delta G_0}{\delta\eta(yx)} - \delta(x-y)G_0 = 0. \tag{25}$$

Такой же вид будет иметь и левая часть уравнения итерационной схемы (7). Поскольку при $n \geq 1$ контрчлены δm_n^2 и δz_n следует рассматривать как возмущение, то соответствующие члены должны дополнить правую часть уравнения (7). Так, уравнение первого шага будет иметь вид

$$4\lambda\frac{\delta^2 G_1}{\delta\eta(yx)\delta\eta(xx)}+(\delta m_0^2+m^2-\partial^2)\frac{\delta G_1}{\delta\eta(yx)}-\delta(x-y)G_1=$$
$$=2\eta(x1)\frac{\delta G_0}{\delta\eta(y1)}-\delta m_1^2\frac{\delta G_0}{\delta\eta(yx)}+\delta z_1\partial^2\frac{\delta G_0}{\delta\eta(yx)}. \qquad (26)$$

Условие нормировки на физическую перенормированную массу μ^2 дает нам контрчлен перенормировки массы в главном приближении

$$\delta m_0^2=\mu^2-m^2-4\lambda\bigtriangleup_0(0). \qquad (27)$$

Этот контрчлен расходится логарифмически при $d=2$ и линейно при $d=3$.

При первом шаге итераций уравнение (12) для F остается неизменным, и решение его дается теми же формулами (14)–(16). Уравнение для $\bigtriangleup_1$ видоизменяется в соответствии с уравнением (26). Решение его может быть записано в том же виде (17), но теперь для Σ_r получаем

$$\Sigma_r=4\lambda\bigtriangleup_1(0)+\delta m_1^2-2\delta m_0^2-\delta z_1\partial^2+\Sigma, \qquad (28)$$

где Σ по-прежнему дается формулой (19). Условия нормировки

$$\tilde\Sigma_r(-\mu^2)=0,\quad \tilde\Sigma_r'(-\mu^2)=0 \qquad (29)$$

дают нам контрчлены первого шага

$$\delta z_1=-\tilde\Sigma'(-\mu^2),$$
$$\delta m_1^2=2\delta m_0^2-4\lambda\bigtriangleup_1(0)-\tilde\Sigma(-\mu^2)-\mu^2\tilde\Sigma'(-\mu^2). \qquad (30)$$

Перенормированный массовый оператор есть

$$\tilde\Sigma_r(p^2)=\tilde\Sigma(p^2)-\tilde\Sigma(-\mu^2)-(p^2+\mu^2)\tilde\Sigma'(-\mu^2), \qquad (31)$$

где в соответствии с (19)

$$\tilde\Sigma(p^2)=-(4\lambda)^2\int\frac{dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{\mu^2+(p-q)^2}\frac{2\tilde L(q^2)}{1+4\lambda\tilde L(q^2)}. \qquad (32)$$

Контрчлен δz_1 конечен при $d=2,3$, а контрчлен δm_1^2, как и контрчлен главного приближения δm_0^2, расходится логарифмически при $d=2$ и линейно при $d=3$. Простая петля $\tilde L(p^2)$ ведет себя при $p^2\to\infty$ как $\frac{1}{p^2}\log\frac{p^2}{\mu^2}$ при $d=2$ и как $\frac{1}{\sqrt{p^2}}$ при $d=3$. Соответственно интеграл (32) для $\tilde\Sigma(p^2)$ сходится при $d=2$ и расходится логарифмически при $d=3$. Конечно, перенормированный массовый оператор (31) всегда конечен. Роль "лишних" вычитаний в формуле (31) при $d=2,3$, совершенно неясная с точки зрения ультрафиолетовых расходимостей обычной теории возмущений, проясняется, если мы перейдем в формулах (31)–(32) к пределу сильной связи $\lambda \to \infty$. Тогда

$$\tilde{\Sigma}(p^2) = const + \int \frac{dq}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mu^2 + (p-q)^2} \frac{2}{\tilde{L}(q^2)} + O(\frac{1}{\lambda}). \quad (33)$$

Интеграл в формуле (33) расходится *квадратично* при $d = 2, 3$, поэтому становится ясно, что эти "лишние" вычитания сохраняют конечность перенормированной теории в пределе сильной связи.

При $d = 4$ помимо перенормировки массы и волновой функции необходима также перенормировка константы связи, поэтому вместе с заменой (24) в уравнении Швингера (4) нужно произвести также замену $\lambda \to \lambda + \delta\lambda$. Уравнение главного приближения будет иметь вид

$$4(\lambda + \delta\lambda_0) \frac{\delta^2 G_0}{\delta\eta(yx)\delta\eta(xx)} + (\delta m_0^2 + m^2 - \partial^2) \frac{\delta G_0}{\delta\eta(yx)} - \delta(x-y) G_0 = 0. \quad (34)$$

Введение контрчлена $\delta\lambda$ приводит к тому, что условие нормировки на перенормированную массу μ^2 в главном приближении становится соотношением между контрчленами δm_0^2 и $\delta\lambda_0$:

$$\delta m_0^2 + 4(\lambda + \delta\lambda_0) \triangle_0 (0) = \mu^2 - m^2. \quad (35)$$

Как мы увидим, контрчлен $\delta\lambda_0$ (а, следовательно, и δm_0^2) фиксируется на *следующем* шаге итерационной схемы.

Уравнение первого шага будет иметь вид уравнения (26) с заменой $\lambda \to \lambda + \delta\lambda_0$ в левой части и с добавочным членом $-4\delta\lambda_1 \cdot \delta^2 G_0/\delta\eta(yx)\delta\eta(xx)$ в правой части уравнения. Уравнение для F будет отличаться от уравнения (12) лишь заменой $\lambda \to \lambda + \delta\lambda_0$, поэтому то же самое относится и к формулам (14)-(16), описывающим его решение. При $d = 4$ однопетлевой интеграл $\tilde{L}(p^2)$ логарифмически расходится, поэтому необходима перенормировка константы связи. Введем двухчастичную амплитуду — ампутированную связную часть четыреххвостки:

$$A = \triangle_0^{-1} \triangle_0^{-1} F^{con} \triangle_0^{-1} \triangle_0^{-1}. \quad (36)$$

Здесь умножение на $\triangle_0^{-1}$ понимается в операторном смысле, а F^{con} — связная часть F. Легко видеть, что амплитуда в импульсном пространстве зависит лишь от одной переменной $p = p_x + p_y$ и имеет вид

$$\tilde{A}(p^2) = -\frac{8(\lambda + \delta\lambda_0)}{1 + 4(\lambda + \delta\lambda_0)\tilde{L}(p^2)}. \quad (37)$$

Определим перенормированную константу связи λ_r как значение амплитуды в точке нормировки M^2:

$$\tilde{A}(M^2) = -8\lambda_r = -\frac{8(\lambda + \delta\lambda_0)}{1 + 4(\lambda + \delta\lambda_0)\tilde{L}(M^2)}. \quad (38)$$

Из соотношения (38) мы получаем контрчлен перенормировки константы связи

$$\delta\lambda_0 = -\lambda + \frac{\lambda_r}{1 - 4\lambda_r \tilde{L}(M^2)} \tag{39}$$

и перенормированную амплитуду

$$\tilde{A}(p^2) = -\frac{8\lambda_r}{1 + 4\lambda_r \tilde{L}_r(p^2; M^2)}, \tag{40}$$

где $\tilde{L}_r(p^2; M^2) = \tilde{L}(p^2) - \tilde{L}(M^2)$ — перенормированная петля, имеющая конечный предел при снятии регуляризации.

Осуществив таким образом перенормировку двухчастичной амплитуды, мы можем, решив уравнение для $\triangle_1$, провести перенормировку массового оператора в соответствии с общим принципом нормировки на физическую массу (29), как это было проделано для $d = 2$ и $d = 3$. Но в четырехмерном случае мы наталкиваемся на существенное препятствие. Из формулы (39) видно, что при снятии регуляризации $\delta\lambda_0 \to -\lambda$, т.е. коэффициент $\lambda + \delta\lambda_0$ в уравнении главного приближения (34) (а, следовательно, и в уравнениях всех последующих итераций) обращается в нуль, и теория тривиализуется. Можно возразить, что на самом деле выражение

$$(\lambda + \delta\lambda_0) \cdot \frac{\delta^2 G}{\delta\eta(yx)\delta\eta(xx)} \tag{41}$$

есть неопределенность типа $0 \cdot \infty$, и перенормировка есть, по сути, "раскрытие" этой неопределенности. Однако это не спасает ситуацию, поскольку перенормированная амплитуда (40) имеет нефизическую особенность в глубокоевклидовой области (это не что иное, как известный полюс Ландау), и единственной непротиворечивой возможностью является выбор $\lambda_r \to 0$ при снятии регуляризации, т.е. опять же тривиализация теории. Такая тривиализация практически с неизбежностью возникает при исследовании теории ϕ_4^4 в непертурбативной области (см., например, обзор [3]) и является, по существу, строго доказанным результатом. Отметим, что в отличие от теории возмущений по константе связи, которая совершенно "не чувствует" тривиальности теории, предлагаемый метод приводит к тривиализации уже на первом шаге, подобно методу $1/N$-разложения.

Рассмотренный выше метод вычисления функций Грина, который можно назвать теорией возмущений по источнику, существенно опирается на билокальность источника. Поскольку билокальный источник (3) связан только с $2n$-точечными функциями, то этот метод в данном виде непригоден для описания теории со спонтанным нарушением симметрии, когда $< 0 \mid \phi \mid 0 > \neq 0$. Для описания спонтанного нарушения симметрии необходимо подключить простой источник $j(x)$, т.е. добавить в показатель экспоненты в формуле (2) член вида

$$j\phi \equiv \int dx j(x)\phi(x). \tag{42}$$

Рассмотрим теорию с простым источником (42) при $\eta = 0$. Уравнение Швингера для производящего функционала $G(j)$ имеет вид

$$4\lambda \frac{\delta^3 G}{\delta j^3(x)} + (m^2 - \partial^2) \frac{\delta G}{\delta j(x)} = j(x) G. \tag{43}$$

Применим к уравнению (43) ту же идею об аппроксимации уравнением с "постоянными" коэффициентами, т.е. рассмотрим в качестве главного приближения уравнение

$$4\lambda \frac{\delta^3 G_0}{\delta j^3(x)} + (m^2 - \partial^2) \frac{\delta G_0}{\delta j(x)} = 0. \tag{44}$$

Тогда итерационная схема будет описываться уравнениями

$$4\lambda \frac{\delta^3 G_n}{\delta j^3(x)} + (m^2 - \partial^2) \frac{\delta G_n}{\delta j(x)} = j(x) G_{n-1}. \tag{45}$$

Уравнение главного приближения (44) имеет решение

$$G_0 = \exp\{\int dx v(x) j(x)\}. \tag{46}$$

Очевидно, что в трансляционно-инвариантной теории v не зависит от x, поэтому уравнение для v будет иметь вид

$$4\lambda v^3 + m^2 v = 0. \tag{47}$$

При $m^2 \geq 0,\ \lambda > 0$ уравнение имеет единственное вещественное решение $v = 0$, соответствующее главному приближению $G_0 = 1$. Итерационная схема (45), основанная на таком главном приближении, совпадает с теорией возмущений по константе связи — главное приближение слишком простенькое и не ухватывает непертурбативных эффектов.

При $m^2 < 0$, кроме этого решения, существуют также вещественные решения

$$v = \pm\sqrt{-\frac{m^2}{4\lambda}}, \tag{48}$$

соответствующие спонтанному нарушению дискретной симметрии (P-четности) теории ϕ^4. Вычисление энергии основного состояния по формулам типа (22) показывает, что состояние со спонтанным нарушением симметрии является более выгодным энергетически, т.е. соответствует физическому вакууму теории при $m^2 < 0$. Таким образом главный непертурбативный эффект — спонтанное нарушение симметрии — описывается этим методом.

Уравнение первого шага с контрчленами будет иметь вид

$$\begin{aligned} 4\lambda \frac{\delta^3 G_1}{\delta j^3(x)} + (m^2 - \partial^2) \frac{\delta G_1}{\delta j(x)} = \\ = j(x) G_0 - 4\delta\lambda_1 \frac{\delta^3 G_0}{\delta j^3(x)} - \delta m_1^2 \frac{\delta G_0}{\delta j(x)} + \delta z_1 \partial^2 \frac{\delta G_0}{\delta j(x)} = \\ = (j(x) - 4\delta\lambda_1 v^3 - v\delta m_1^2) G_0. \end{aligned} \tag{49}$$

Отметим, что контрчлен перенормировки волновой функции δz_1 "выпадает из игры" на первом шаге — он зафиксируется при перенормировке второго шага. Решение уравнения (49) следует искать в виде $G_1 = P_1(j)G_0$, где $P_1(j) = \frac{1}{2}\triangle_1 j^2 + \Phi_1 j$. Уравнение для $\triangle_1$ с учетом формул главного приближения (46)–(48) будет иметь решение

$$\triangle_1 = \frac{1}{\mu^2 - \partial^2}, \tag{50}$$

где $\mu^2 = -2m^2 > 0$, т.е. перестройка вакуума приводит к соответствующей перестройке одночастичного спектра. Вся картина в точности соответствует описанию на языке эффективного потенциала, однако понятие эффективного потенциала нигде не используется. Дальнейшие итерации приведут к перенормированной теории возмущений над физическим несимметричным вакуумом. Примечательной особенностью этой схемы является то, что в отличие от формализма эффективного действия здесь нет нужды вводить нарушающие симметрию контрчлены даже на промежуточных этапах вычислений — для устранения ультрафиолетовых расходимостей достаточно не нарушающих симметрию контрчленов $\delta m^2, \delta\lambda$ и δz.

В заключение отметим, что хотя при $m^2 > 0$ значения v в формуле (48) мнимы, тем не менее существуют соответствующие им вещественные решения уравнения (44), например

$$G_0 = \cos\{w \int j(x)dx\}, \tag{51}$$

где $w^2 = m^2/4\lambda$. На первом шаге итераций такое главное приближение приводит к тахионам, и поэтому физически неприемлемо. Возможно, подобные решения могут оказаться полезными при исследовании проблемы спонтанного нарушения симметрии в теории ϕ_2^4 с $m^2 > 0$ (см., например, [4]), что требует, однако, соответствующей модификации схемы вычислений.

Автор признателен А.И.Алексееву, Б.А.Арбузову и И.Л.Соловцову за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 95-02-03704).

Список литературы

[1] Сисакян А.Н., Соловцов И.Л. // ЭЧАЯ. 1994. Т.25. С.1127.

[2] Hioe F.T., MacMillen D. and Montroll E.W. // Phys. Reports. 1978. V.43. P.305.

[3] Callaway D.J.E. // Phys. Reports. 1988. V.167. P.241.

[4] Ефимов Г.В., Неделько С.Н. // ЭЧАЯ. 1994. Т.25. С.779.

Рукопись поступила 19 апреля 1996 г.

В.Е.Рочев
Об одном непертурбативном методе вычисления функций Грина.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы LaTeX.
Редактор Н.В.Ежела.

Подписано к печати	24.04.96.		Формат $60 \times 84/8$.
Офсетная печать.	Печ.л. 0,8.	Уч.-изд.л. 1,2.	Тираж 240. Заказ 647.
Индекс 3649.	ЛР №020498 17.04.97.		

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 96–34, И Ф В Э, 1996