



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 96-58

ОТФ

А.С.Вшивцев, А.Г.Кисунько, К.Г.Клименко, Д.В.Перегудов

**ФАЗОВАЯ СТРУКТУРА МОДЕЛИ ГРОССА–НЕВЕ
С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ
И КОНЕЧНОГО ОБЪЕМА**

Протвино 1996

Аннотация

Вшивцев А.С., Кисунько А.Г., Клименко К.Г., Перегудов Д.В. Фазовая структура модели Гросса–Неве с учетом влияния температуры и конечного объема: Препринт ИФВЭ 96-58. – Протвино, 1996. – 21 с., 2 рис., библиогр.: 15.

В работе предложена регулярная процедура (основанная на использовании дзета-функции Римана–Эпштейна) вычисления эффективного потенциала модели Гросса–Неве на двумерной решетке с различными типами граничных условий, моделирующими эффекты конечного объема и температуры. Для разных типов граничных условий найдены эффективный потенциал и фазовая структура модели. Показано, что в двумерии (в отличие от трехмерного случая) фазовая картина не зависит от константы связи (при смешанных граничных условиях). Установлено существование критической длины такой, что если длина пространственного измерения больше критической, то при любой температуре $\sigma_c = 0$ и фазового перехода нет (σ_c — параметр порядка). Если длина пространственного измерения меньше критической, то существует фазовый переход: при низкой температуре $\sigma_c \neq 0$, а при ее повышении σ_c постепенно исчезает.

Abstract

Vshivtsev A.S., Kisun'ko A.G., Klimenko K.G., Peregudov D.V. Phase structure of the Gross–Neveu model at nonzero temperature and finite volume: IHEP Preprint 96-58. – Protvino, 1996. – p. 21, figs. 2, refs.: 15.

Regular procedure for finding effective potentials of different two dimensional models at nonzero temperature and finite volume is proposed. It is founded on the Epstein dzeta-function method and is used to study phase structure of the Gross–Neveu model at periodic as well, as antiperiodic boundary conditions and in the presence of temperature.

Введение

Изучение нелинейных моделей теории поля в пространствах низкой размерности, в частности σ -, CP^{N-1} -, суперсимметричной σ -моделей, а также модели Гросса–Неве, имеет под собой серьезные причины и историю [1],[2],[3]. С одной стороны, использование моделей такого рода (σ -, Гросса–Неве модели в $(2+1)$ -мерном пространстве-времени) возможно при описании планарных антиферромагнетиков, т.е. веществ, в которых наблюдается высокотемпературная сверхпроводимость.

С другой стороны, многие из вышеперечисленных моделей, включая модель Гросса–Неве, перенормируемы и обладают рядом свойств, присущих квантовой хромодинамике (инстантоны, асимптотическая свобода, динамическое нарушение киральной симметрии и др.). Этот аспект данных моделей определяет интерес к ним физиков, интересующихся элементарными частицами и проблемами физики высоких энергий, в частности моделями адронов, поскольку при этом вырабатывается интуиция, которую трудно получить иными методами. Заметим, что основной акцент в исследовании этих простейших теоретико-полевых моделей был сделан на изучении их свойств при изменении размерности пространства-времени, а также решении проблемы перенормируемости [4]. Кроме того проводились исследования по учету конечной температуры и некоторых типов внешних полей [4],[5].

Вместе с тем существует еще один аспект — исследование влияния топологии пространства на свойства моделей такого рода (и этот факт отмечался еще в работах [6], где указывалось на роль топологии при описании явления сверхпроводимости в CuO смесях на основе CP^{N-1} -моделей). При этом рассмотрение даже простейшего двумерного варианта теории с различными граничными условиями оказывается весьма интересным с физической точки зрения, так как мы имеем топологию тора, а различные граничные условия либо соответствуют учету конечного объема системы, либо позволяют ввести температуру.

В предлагаемой работе основной задачей является описание общей процедуры нахождения термодинамического и эффективного потенциалов, необходимых для исследования широкого класса свойств упомянутых выше систем, с учетом различ-

ных простейших топологий пространства. Наш подход основан на вычислении и использовании теоретико-числовых свойств, впервые полученных в данной работе, дзета-функции Римана–Эпштейна, которая позволяет учитывать различные топологии. При этом в работе представлен ряд точных функциональных соотношений для дзета-функции, которые охватывают все типы граничных условий. Заметим, что эти соотношения распространены нами пока только на двумерную решетку и дают обобщение таких хорошо известных в физике твердого тела соотношений, как формулы Маделунга [7]. Вместе с тем область возможного приложения полученных нами результатов не ограничивается этим примером.

Имеется ряд моделей теории поля, которые приводят к задаче вычисления дзета-функции оператора Гельмгольца на пространстве типа $T^n \times R^m$. В настоящей работе мы также уделяем внимание разработке методов вычисления дзета-функции оператора Гельмгольца на пространстве $T^2 \times R^{\lambda-2}$ и применяем эти методы к исследованию двумерной модели Гросса–Неве.

Обычно в теории поля используется тот или иной вариант петлевого разложения. При этом “однопетлевой” член представляет собой логарифм регуляризованного детерминанта оператора квадратичной формы “свободного” лагранжиана. Часто этот оператор является оператором Гельмгольца, поэтому возникает задача вычисления логарифма регуляризованного детерминанта оператора Гельмгольца. Как известно, вычисление и регуляризацию удобно производить, используя дзета-функцию соответствующего оператора.

Помимо уже упомянутой модели Гросса–Неве, можно привести другие примеры, приводящие к задаче вычисления дзета-функции оператора Гельмгольца. Среди них назовем эффект Казимира при конечной температуре [8], топологическое нарушение симметрии и топологическую генерацию массы [9], топологическую генерацию члена Черна–Саймонса в трехмерных калибровочных теориях [10], модели квантовой гравитации в пространствах с топологией тора [11].

1. Эффективный потенциал и дзета-функция

В этом разделе изложим связь эффективного потенциала с дзета-функцией.

Пусть A — оператор с положительно определенными собственными значениями, λ_n — его собственные значения. Эффективным потенциалом будем называть выражение

$$V_A = \sum_n \ln \lambda_n.$$

Конечно, часто такое выражение расходится, поэтому под эффективным потенциалом понимается некоторая его регуляризация. Ее удобно произвести, введя дзета-функцию оператора A :

$$\zeta_A(s) = \sum_n \lambda_n^{-s}.$$

Если λ_n достаточно быстро стремятся к бесконечности с ростом n (например, для оператора Гельмгольца $\lambda_n \sim n^2$), то при достаточно большой $Re\ s$ ряд сходится.

Учитывая формулу $(a^x)' = a^x \ln a$, будем понимать расходящееся выражение для V_A как предел при $s \rightarrow 0$ производной от $\zeta_A(s)$:

$$V_A = -\zeta'_A(0).$$

В квантовой гравитации эта формула служит основой метода регуляризации при помощи дзета-функции. Поскольку при $s = 0$ ряд для дзета-функции заведомо расходится, мы сталкиваемся здесь с примером так называемой аналитической регуляризации. В отличие от регуляризации, скажем, Паули–Вилларса, когда регуляризованное выражение определено при всех значениях регулятора M , а при $M \rightarrow \infty$ расходится, при нашей регуляризации дзета-функция определена только для s с достаточно большой вещественной частью, то есть начинает расходиться задолго до $s = 0$. Поэтому существенную роль играет аналитическое продолжение дзета-функции.

Следует отметить отличие нашего подхода от подходов других авторов, в частности [11],[12]. С самого начала мы обсуждаем только простейшую дзета-функцию, соответствующую оператору Лапласа на двумерном торе, — дзета-функцию Эпштейна

$$Z(a, b; s) = \sum_{\substack{m, n = -\infty \\ (m, n) \neq (0, 0)}}^{+\infty} (a^2 n^2 + b^2 m^2)^{-s},$$

выражая через нее эффективный потенциал оператора Гельмгольца с помощью интегрального преобразования и учитывая различные (периодические и антипериодические) граничные условия комбинированием дзета-функций от разных параметров. Автор работ [11],[12] изначально рассматривает общий случай оператора Гельмгольца с произвольными граничными условиями, что делает формулы громоздкими и практически не позволяет продвинуться в их анализе. Нам удалось существенно продвинуться в вычислении частных значений дзета-функции Эпштейна. Наиболее известным подобным результатом является маделунговская сумма

$$\sum_{(m, n) \neq (0, 0)} (m^2 + n^2)^{-s} = 4\zeta(s)\beta(s),$$

где $\beta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-s}$. (В этой формуле и всюду ниже подразумевается, что $-\infty < m, n < +\infty$.) Поэтому область применения найденных формул для частных значений дзета-функции Эпштейна не ограничивается теорией поля на торе, они могут оказаться полезны в других моделях, в частности, в физике твердого тела.

Дальнейшее изложение строится следующим образом. В разделе 2 подробно вычисляется эффективный потенциал оператора Гельмгольца на цилиндре $S^1 \times R^{\lambda-1}$. Результаты этого вычисления в ряде случаев были ранее получены некоторыми авторами иными способами. Цель раздела 2 — на простом примере изложить приемы, которые непосредственно переносятся на более сложный случай в разделе 3. Там мы рассматриваем оператор Гельмгольца на торе $T^2 \times R^{\lambda-2}$ и показываем, что

вычисление эффективного потенциала в случаях периодических и антипериодических граничных условий сводится к изучению дзета-функции Эпштейна. В разделе 4 производится аналитическое продолжение дзета-функции Эпштейна способом, аналогичным продолжению дзета-функции Римана. Это приводит нас к функциональному уравнению и позволяет сразу вычислить ряд частных значений дзета-функции. Однако у полученной в разделе 4 формулы аналитического продолжения есть недостаток — она явно симметрична по a и b , что затрудняет построение асимптотики $a \ll b$. Поэтому в разделе 5 мы строим другое аналитическое продолжение дзета-функции Эпштейна, которое дает удобную асимптотическую формулу при $a \ll b$. В разделе 6 мы приводим формулы для частных значений дзета-функции Эпштейна при некоторых соотношениях между a и b . Основной идеей является факторизация двукратного ряда, входящего в определение дзета-функции Эпштейна, так что она в основном представляется в виде произведения обычной дзета-функции Римана на так называемые L -функции Дирихле. Формулы подобного рода весьма специфичны, и возможность факторизации двукратного ряда связана с тонкими арифметическими свойствами конкретных чисел. Вполне вероятно, что число таких формул вообще конечно. В разделе 7 приведены функциональные уравнения для L -функций Дирихле. Они позволяют выполнять необходимое аналитическое продолжение этих функций. Наконец, в разделе 8 мы применяем развитые методы к исследованию модели Гросса–Неве на торе. Примененные нами методы позволили провести полный анализ уравнения стационарности и построить фазовый портрет системы при различных типах граничных условий.

2. Оператор Гельмгольца $-\Delta + m^2$ на цилиндре $S^1 \times R^{\lambda-1}$

Рассмотрим “эффективный потенциал” оператора Гельмгольца на цилиндре:

$$\Omega = \int \frac{d^{\lambda-1}k}{(2\pi)^{\lambda-1}} \frac{a}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln[k^2 + a^2(n + \alpha)^2 + m^2]. \quad (1)$$

(Случай $\alpha = 0$ соответствует периодическим, а $\alpha = 1/2$ — антипериодическим граничным условиям.) Первым делом регуляризуем это выражение. Рассмотрим

$$\Omega(s) = \int \frac{d^{\lambda-1}k}{(2\pi)^{\lambda-1}} \frac{a}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{k^2 + a^2(n + \alpha)^2 + m^2}{\mu^2} \right)^{-s}. \quad (2)$$

При $Re\ s > \lambda/2$ интеграл и ряд сходятся. Учитывая формулу $(a^x)' = a^x \ln a$, будем понимать расходящееся выражение (1) как предел при $s \rightarrow 0$ производной от (2):

$$\Omega = -\Omega'(s)|_{s=0}. \quad (3)$$

Для вычисления $\Omega(s)$ прежде всего используем представление Швингера

$$a^{-s}\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-at} dt. \quad (4)$$

Тогда (2) примет вид

$$\Omega(s) = \frac{\mu^{2s}}{\Gamma(s)} \int \frac{d^{\lambda-1}k}{(2\pi)^{\lambda-1}} \frac{a}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-(k^2+a^2(n+\alpha)^2+m^2)t} dt. \quad (5)$$

Теперь меняем местами интегрирование по k и суммирование по n с интегрированием по t , после чего интеграл по импульсам вычисляется, ряд же пересуммируем по Пуассону:

$$\Omega(s) = \frac{m^\lambda}{(4\pi)^{\lambda/2}} \left(\frac{\mu}{m}\right)^{2s} \frac{\Gamma(s-\lambda/2)}{\Gamma(s)} + \frac{\mu^{2s}}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} (4\pi t)^{-\lambda/2} 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2 / ta^2} \cos(2\pi n\alpha) \right) e^{-m^2 t} dt. \quad (6)$$

Для дальнейшего продвижения представим сумму в виде обратного меллиновского образа:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2 / ta^2} \cos(2\pi n\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \Gamma(\nu) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n\alpha)}{n^{2\nu}} \right) \left(\frac{\pi}{a}\right)^{-2\nu} d\nu, \quad (7)$$

где контур C — прямая, параллельная мнимой оси и лежащая справа от особенностей подынтегрального выражения. После подстановки интеграл по t вычисляется, и мы находим

$$\Omega(s) = \frac{m^\lambda}{(4\pi)^{\lambda/2}} \left(\frac{\mu}{m}\right)^{2s} \frac{\Gamma(s-\lambda/2)}{\Gamma(s)} + \frac{m^\lambda}{(4\pi)^{\lambda/2}} \left(\frac{\mu}{m}\right)^{2s} \frac{2}{\Gamma(s)} \frac{1}{2\pi i} \int_C \Gamma(\nu) \Gamma(\nu+s-\lambda/2) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n\alpha)}{n^{2\nu}} \right) \left(\frac{\pi m}{a}\right)^{-2\nu} d\nu. \quad (8)$$

Обозначим производную по s от первого слагаемого в (8) при $s=0$ как Ω_1 . Она вычисляется по-разному, в зависимости от того, является λ четным или нечетным:

$$\Omega_1 = \begin{cases} -\frac{(-1)^n}{n!} \frac{m^{2n}}{(4\pi)^n} \left(\psi(n+1) + \gamma + \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right), & \text{при } \lambda = 2n, \\ -\frac{m^{2n+1}}{(4\pi)^{n+1/2}} \Gamma(-n-1/2), & \text{при } \lambda = 2n+1. \end{cases} \quad (9)$$

Производная по s от второго слагаемого в (8) при $s=0$ равна Ω_2 :

$$\Omega_2 = -\frac{m^\lambda}{(4\pi)^{\lambda/2}} \frac{2}{2\pi i} \int_C \Gamma(\nu) \Gamma(\nu-\lambda/2) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n\alpha)}{n^{2\nu}} \right) \left(\frac{\pi m}{a}\right)^{-2\nu} d\nu. \quad (10)$$

В таком виде эффективный потенциал был представлен в работах [14,15]. Дальнейшее его вычисление производится при помощи теоремы о вычетах. Результат имеет характер разложения по степеням m/a .

Стоящий здесь ряд в случаях $\alpha=0$ и $\alpha=1/2$ соответственно равен

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\nu} = \zeta(2\nu), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2\nu}} = (2^{1-2\nu} - 1)\zeta(2\nu). \quad (11)$$

В общем случае

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n\alpha)}{n^s} = \frac{(2\pi)^s}{4\Gamma(s) \cos(\pi s/2)} [\zeta(1-s, \alpha) + \zeta(1-s, 1-\alpha)] \quad (12)$$

3. Оператор Гельмгольца $-\Delta + m^2$ на торе $T^2 \times R^{\lambda-2}$

Аналогичным образом может быть получено следующее выражение для “эффективного потенциала” оператора Гельмгольца на торе:

$$\begin{aligned} \Omega(s) &= \int \frac{d^{\lambda-2}k}{(2\pi)^{\lambda-2}} \frac{ab}{(2\pi)^2} \sum_{n,l=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{k^2 + a^2(n^2 + b^2(l + \beta)^2 + m^2)}{\mu^2} \right)^{-s} = \\ &= \frac{m^\lambda}{(4\pi)^{\lambda/2}} \left(\frac{\mu}{m} \right)^{2s} \frac{\Gamma(s - \lambda/2)}{\Gamma(s)} + \frac{m^\lambda}{(4\pi)^{\lambda/2}} \left(\frac{\mu}{m} \right)^{2s} \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{1}{2\pi i} \times \\ &\times \int_C \Gamma(\nu) \Gamma(\nu + s - \lambda/2) \left(\sum_{(l,n) \neq (0,0)} \frac{\cos(2\pi n\alpha) \cos(2\pi l\beta)}{(n^2/a^2 + l^2/b^2)^\nu} \right) (\pi m)^{-2\nu} d\nu. \end{aligned} \quad (13)$$

Производная по s от первого слагаемого в (13) уже обсуждалась после формулы (8), а производная от второго при $s = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= -\frac{m^\lambda}{(4\pi)^{\lambda/2}} \frac{1}{2\pi i} \int_C \Gamma(\nu) \Gamma(\nu - \lambda/2) \times \\ &\times \left(\sum_{(l,n) \neq (0,0)} \frac{\cos(2\pi n\alpha) \cos(2\pi l\beta)}{(n^2/a^2 + l^2/b^2)^\nu} \right) (\pi m)^{-2\nu} d\nu. \end{aligned} \quad (14)$$

В случае $\alpha = 0, \beta = 0$ стоящая в формуле сумма называется дзета-функцией Эпштейна:

$$Z(a, b; s) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} (a^2 m^2 + b^2 n^2)^{-s}. \quad (15)$$

В случаях $\alpha = 1/2, \beta = 0$ и $\alpha = 1/2, \beta = 1/2$ сумма также сводится к Z -функции:

$$\sum_{(l,n) \neq (0,0)} \frac{(-1)^n}{(a^2 n^2 + b^2 l^2)^\nu} = 2Z(2a, b; \nu) - Z(a, b; \nu), \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{(l,n) \neq (0,0)} \frac{(-1)^{l+n}}{(a^2 n^2 + b^2 l^2)^\nu} &= Z(a, b; \nu) - 2[Z(2a, b; \nu) + Z(a, 2b; \nu)] + \\ &+ 4Z(2a, 2b; \nu) = (1 + 2^{2-2\nu})Z(a, b; \nu) - 2[Z(2a, b; \nu) + Z(a, 2b; \nu)] \end{aligned} \quad (15b)$$

Теперь мы сконцентрируемся на трех частных случаях: полностью периодических граничных условиях, полностью антипериодических и смешанных. Как видно, для дальнейших вычислений в формуле (14) необходимо знать аналитические свойства и частные значения дзета-функции Эпштейна.

4. Аналитическое продолжение $Z(a, b; s)$

Основной нашей целью в этом разделе будет аналитическое продолжение дзета-функции Эпштейна $Z(a, b; s)$. Мы воспользуемся приемом, аналогичным тому, который использовал Риман для своей дзета-функции. Это приведет нас, во-первых, к функциональному уравнению для $Z(a, b; s)$, аналогичному римановскому, а во-вторых, к формуле для вычисления $Z(a, b; s)$ при любых $s \neq 1$.

Выполним сначала некоторые приготовления. Введем функцию

$$\omega(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}. \quad (16)$$

Используя пересуммирование Пуассона, убеждаемся, что она имеет свойство

$$\omega(1/x) = x^{1/2} \omega(x). \quad (17)$$

Нам понадобится также функция

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}. \quad (18)$$

Очевидно, что $2\theta(x) + 1 = \omega(x)$.

Будем вычислять $(ab/\pi)^s \Gamma(s) Z(a, b; s)$. С помощью формулы (4) найдем

$$\left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s) Z(a, b; s) = \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \int_0^{\infty} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} e^{-x(a^2 n^2 + b^2 m^2)} x^{s-1} dx. \quad (19)$$

Совершим масштабное преобразование $x = \pi t/ab$. Тогда

$$\left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s) Z(a, b; s) = \int_0^{\infty} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} e^{-\pi t \left(\frac{a}{b} n^2 + \frac{b}{a} m^2\right)} t^{s-1} dt. \quad (20)$$

Если теперь в сумму (20) добавить член с $n = 0, m = 0$, то она распадется на произведение ω -функций:

$$\left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s) Z(a, b; s) = \int_0^{\infty} \left(\omega\left(\frac{ta}{b}\right) \omega\left(\frac{tb}{a}\right) - 1 \right) t^{s-1} dt. \quad (21)$$

Вспоминая свойство (17) ω -функции, найдем следующее соотношение для функции $f(a, b; t) = \omega(ta/b)\omega(tb/a) - 1$:

$$f(a, b; t) = \frac{1}{t} \left[f\left(a, b; \frac{1}{t}\right) + 1 \right] - 1. \quad (22)$$

Разбиваем теперь интеграл по интервалу $[0, \infty)$ на интегралы по отрезку $[0, 1]$ и интервалу $[1, \infty)$ и делаем в первом из них замену $f(a, b; t)$ по приведенной формуле. Получаем

$$\left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s) Z(a, b; s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_0^1 f(a, b; 1/t) t^{s-2} dt + \int_1^{\infty} f(a, b; t) t^{s-1} dt. \quad (23)$$

Теперь в первом интеграле меняем переменную интегрирования $t \rightarrow 1/t$:

$$\left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s)Z(a, b; s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty f(a, b; t)t^{-s} dt + \int_1^\infty f(a, b; t)t^{s-1} dt. \quad (24)$$

Объединяя оба интеграла и выражая результат через θ -функции, окончательно найдем

$$\begin{aligned} \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s)Z(a, b; s) &= \frac{1}{s(s-1)} + \\ &+ \int_1^\infty \left(2\theta\left(\frac{ta}{b}\right) + 2\theta\left(\frac{tb}{a}\right) + 4\theta\left(\frac{ta}{b}\right)\theta\left(\frac{tb}{a}\right) \right) (t^s + t^{1-s}) \frac{dt}{t}. \end{aligned} \quad (25)$$

Интегралы в правой части сходятся при любом s , таким образом, мы получили аналитическое продолжение функции $Z(a, b; s)$. Видно, что единственной особой точкой $Z(a, b; s)$ является $s = 1$, в которой она имеет полюс первого порядка. Заметим, что правая часть симметрична относительно замены $s \rightarrow 1 - s$, поэтому имеет место функциональное уравнение

$$\left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s)Z(a, b; s) = \left(\frac{ab}{\pi}\right)^{1-s} \Gamma(1-s)Z(a, b; 1-s). \quad (26)$$

Приведем в заключение несколько сразу очевидных частных значений:

$$Z(a, b; 0) = -1, \quad \text{Res}_{s=1} Z(a, b; s) = \frac{\pi}{ab}, \quad Z(a, b; -k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (27)$$

5. Формула аналитического продолжения для асимптотики $a \ll b$

В предыдущем разделе мы получили формулу аналитического продолжения для Z -функции. Для вычисления частных значений она не очень удобна, так как, во-первых, содержит интегралы с θ -функциями, а во-вторых, явно симметрична по a и b . Не надеясь получить точное аналитическое выражение по a и b , мы должны стремиться найти хотя бы разложение при $a \ll b$. Поэтому вернемся назад и получим еще одно аналитическое продолжение для Z -функции, которое окажется несимметричным по a и b и будет давать быстро сходящийся ряд для Z при $a \ll b$.

Мы начнем с формулы (20) предыдущего раздела, в которой суммирование по m разделим на две части, выделив член с $m = 0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s)Z(a, b; s) &= \int_0^\infty 2 \sum_{n=1}^\infty \exp\left(-\pi t \frac{a}{b} n^2\right) dt + \\ &+ \int_0^\infty 2 \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\pi t \left(\frac{a}{b} n^2 + \frac{b}{a} m^2\right)\right) t^{s-1} dt. \end{aligned} \quad (28)$$

Интеграл от первой суммы сразу вычисляется

$$\begin{aligned} \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s)Z(a, b; s) &= 2 \left(\frac{a}{b}\right)^{-s} [\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)] + \\ &+ \int_0^\infty 2 \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\pi t\left(\frac{a}{b}n^2 + \frac{b}{a}m^2\right)\right) t^{s-1} dt. \end{aligned} \quad (29)$$

Ряд по n пересуммируем по Пуассону:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s)Z(a, b; s) &= 2 \left(\frac{a}{b}\right)^{-s} [\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)] + \\ &+ \int_0^\infty 2\sqrt{\frac{b}{at}} \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\pi b}{ta}n^2 - \pi t\frac{b}{a}m^2\right) t^{s-1} dt. \end{aligned} \quad (30)$$

Теперь уже в сумме по n выделяем слагаемое с $n = 0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s)Z(a, b; s) &= 2 \left(\frac{a}{b}\right)^{-s} [\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)] + \\ &+ 2 \left(\frac{a}{b}\right)^{s-1} [\pi^{-s+1/2}\Gamma(s-1/2)\zeta(2s-1)] + \\ &+ 4\sqrt{\frac{b}{a}} \int_0^\infty \sum_{m,n=1}^\infty \exp\left(-\frac{\pi b}{ta}n^2 - \pi t\frac{b}{a}m^2\right) t^{s-3/2} dt. \end{aligned} \quad (31)$$

Оставшийся интеграл сводится к функции Макдональда

$$\begin{aligned} \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s)Z(a, b; s) &= 2 \left(\frac{a}{b}\right)^{-s} [\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)] + \\ &+ 2 \left(\frac{a}{b}\right)^{s-1} [\pi^{-s+1/2}\Gamma(s-1/2)\zeta(2s-1)] + \\ &+ 8\sqrt{\frac{b}{a}} \sum_{m,n=1}^\infty \left(\frac{n}{m}\right)^{s-1/2} K_{s-1/2}\left(2\pi mn\frac{b}{a}\right). \end{aligned} \quad (32)$$

Ряд сходится (и достаточно быстро) при любых s , так что мы имеем аналитическое продолжение Z -функции. Используя функциональное уравнение для ζ -функции, можно переписать эту формулу в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s)Z(a, b; s) &= 2 \left(\frac{a}{b}\right)^{-s} [\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)] + \\ &+ 2 \left(\frac{a}{b}\right)^{s-1} [\pi^{s-1}\Gamma(1-s)\zeta(2-2s)] + \end{aligned}$$

$$+ 8\sqrt{\frac{b}{a}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{s-1/2} K_{s-1/2}\left(2\pi mn\frac{b}{a}\right). \quad (33)$$

Теперь очевидно, что правая часть симметрична относительно замены $s \rightarrow 1 - s$, поэтому мы опять получаем функциональное уравнение (26).

Очевидно, что в случае $a \ll b$ первые два члена справа дают степенную и (возможно) логарифмическую асимптотику по a/b , сумма же дает вклад, пропорциональный $\exp(-2\pi b/a)$.

Для $s = 0$ двойная сумма в (33) сумма может быть сведена к однократной, поэтому

$$Z'(a, b; 0) = \frac{\pi b}{3a} + \ln \frac{a^2}{4\pi^2} + I(b/a), \quad (34)$$

где функция I может быть записана в двух формах:

$$I(x) = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - e^{-2\pi nx}) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \exp(2\pi nx) - 1}. \quad (35)$$

Другой вариант однократной суммы получается, если представить сумму функций Макдональда в виде

$$\begin{aligned} & 8\sqrt{\frac{b}{a}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{s-1/2} K_{s-1/2}\left(2\pi mn\frac{b}{a}\right) = \\ & = 8\sqrt{\frac{b}{a}} \sum_{l=1}^{\infty} l^{-s+1/2} K_{s-1/2}\left(2\pi l\frac{b}{a}\right) \left(\sum_{d|l} d^{2s-1}\right). \end{aligned}$$

(Символ $d|l$ означает, что d является делителем числа l и только по таким значениям d ведется суммирование в этой формуле.) Внутренняя сумма конечна и для небольших l вычисляется вручную, например:

$$I(x) = 4 \left(e^{-2\pi x} + \frac{3}{2}e^{-4\pi x} + \frac{4}{3}e^{-6\pi x} + \dots \right).$$

Заметим еще, что, поскольку дзета-функция Эпштейна симметрична по a и b , функция $I(x)$ также обладает некоторым свойством симметрии:

$$I(x) = \frac{\pi}{3x} - \frac{\pi x}{3} + 2 \ln x + I(1/x).$$

6. Частные значения дзета-функции Эпштейна

Из интегрального представления для эффективного потенциала оператора Гельмгольца на торе $T^2 \times R^{\lambda-2}$ следует, что мы должны изучить аналитические и теоретико-числовые свойства следующей функции:

$$Z(a, b; \mu, \nu; s) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} (a^2 n^2 + b^2 m^2)^{-s} \cos(2\pi \mu n) \cos(2\pi \nu m),$$

через которую выражается эффективный потенциал (со спектром вида $k^2 + (a^2(n + \mu)^2 + b^2(m + \nu)^2)$). Заметим, что случаи $\mu = 0, \nu = 1/2$; $\mu = 1/2, \nu = 0$; $\mu = 1/2, \nu = 1/2$ могут быть сведены к изучению случаев $\mu = \nu = 0$ с изменением масштаба величин a и b . С учетом сказанного мы исследуем свойства функции вида

$$Z(a, b; s) = Z(a, b; 0, 0; s) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} (a^2 n^2 + b^2 m^2)^{-s}.$$

Величины a и b можно связать с периодами двумерной решетки, на которой определена функция $Z(a, b; s)$. В теории известны некоторые частные соотношения для функции $Z(a, b; s)$, например, при $a = b$ это — так называемые маделунговские суммы. В настоящем разделе мы поставим задачу о возможном перечислении периодов a и b , при которых существуют соотношения аналитического типа. Нахождение соотношений такого рода может оказаться полезным для физики кристаллов, а также возможно позволит получить ряд простых результатов для эффективного потенциала в некоторых реперных точках, с которыми возможно сравнивать асимптотические результаты.

Следует указать, что более простое выражение для функции $Z(a, b; s)$ с натуральными a^2, b^2 может быть получено лишь в том случае, когда ее представление в виде

$$Z(a, b; s) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} (a^2 n^2 + b^2 m^2)^{-s} = \sum_{n_1 \in N} r_f(n_1) n_1^{-s}$$

(где $r_f(n_1) \equiv r_{a^2, b^2}(n_1) \equiv r(n_1, a^2, b^2)$ — количество представлений натурального числа n_1 квадратичной формой $f = a^2 x^2 + b^2 y^2$ при целых значениях x, y) при условии факторизации $r_f(n_1)$ позволяет провести одно из суммирований (по n или по m), приводящее к произведению известных теоретико-числовых функций дзета-функции, L -функций Дирихле и элементарных. Таким образом, задача, к которой мы пришли — исследование бинарной диагональной квадратичной формы вида $f(n, m) = an^2 + bm^2$, а точнее — нахождение всех таких форм с натуральными a, b , у которых возможна факторизация функции $r_f(n)$. Поскольку в литературе отсутствуют утверждения относительно свойств конкретных форм, мы приведем их и рассмотрим ряд конкретных примеров, полезных для приложений.

Решение задачи можно сформулировать следующим образом.

Теорема. Пусть задана форма $f(n, m) = an^2 + bm^2$, где a и b — взаимно простые натуральные числа, b нечетно, $d = -4ab$ — дискриминант формы, $\Delta = ab$ — ее степень. Предположим, что Δ принимает одно из шестидесяти пяти удобных чисел Эйлера, то есть $\{\Delta = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 21, 22, 24, 25, 28, 30, 33, 37, 40, 42, 45, 48, 57, 58, 60, 70, 72, 78, 85, 93, 102, 105, 112, 120, 133, 165, 168, 177, 190, 210, 232, 240, 253, 273, 280, 312, 330, 345, 357, 385, 408, 462, 520, 760, 840, 1320, 1365, 1848\}$.

Тогда при $\Delta \neq 1$ число $r_f(n_1) = r(n_1, a, b)$ вычисляется по следующей формуле:

$$r(n_1, a, b) = 2^{-v} \chi_2 \left(\prod_{p|\Delta} \chi_p \right) \left(\sum_{d|u} \left(\frac{-\Delta}{d} \right) \right). \quad (36)$$

Здесь t — число простых делителей Δ , p — нечетное простое число,

$$v = \begin{cases} t, & \text{если } \Delta \equiv 1 \pmod{4} \text{ или } \Delta \equiv 0 \pmod{8}, \\ t-1, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$u = \prod_{p|n_1, p \nmid 2\Delta} p^\beta,$$

где $p^\beta \parallel n_1$, то есть p^β — наибольшая степень p , являющаяся делителем n_1 , а u — часть числа n_1 , взаимно простая с 2Δ . Кроме того в этом выражении символ $p \nmid 2\Delta$ означает, что p не является делителем числа 2Δ . Пусть $n_1 = 2^\alpha \left(\prod_{p|\Delta} p^\beta \right) k$, $\Delta = 2^\gamma \left(\prod_p p^l \right)$. Символ $\left(\frac{-\Delta}{d} \right)$, где d — нечетное число, означает обобщенный символ Якоби [13].

Итак, в формуле (36) определены все величины, кроме χ_p и χ_2 , вычисление которых мы дадим ниже.

Вычисление $\chi_p = \chi_p(n_1, a, b)$, где $p|\Delta$, то есть $l > 0$ и $p^l \parallel \Delta$

Пусть $p^l \parallel a^*$, a_* и p — взаимно простые числа, где a^* , a_* — надлежащая перестановка чисел a, b .

I. Рассмотрим случай $\beta < l$. Тогда:

- 1) если β — четное, то $\chi_p = \left(1 + \left(\frac{p^{-l} n_1 a_*}{p} \right) \right) p^{\beta/2}$;
- 2) если β — нечетное, то $\chi_p = 0$.

II. $\beta \geq l$. Тогда:

- 1) если β — четное, l — нечетное, то

$$\chi_p = \left[1 - \left(\frac{-p^{-l} \Delta}{p} \right) \frac{1}{p} \right] \left\{ 1 + \left[1 + \left(\frac{-p^{-l} \Delta}{p} \right) \right] \frac{\beta - l}{2} \right\} p^{l/2};$$

- 2) если β — нечетное, l — четное, то

$$\chi_p = \left[1 - \left(\frac{-p^{-l} \Delta}{p} \right) \frac{1}{p} \right] \left[1 + \left(\frac{-p^{-l} \Delta}{p} \right) \right] \frac{\beta - l + 1}{2} p^{l/2};$$

- 3) если l — нечетное, то

$$\chi_p = \left[1 + \left(\frac{p^{-l} \Delta}{p} \right)^{\beta+1} \frac{p^{-(l+\beta)} n_1 a_*}{p} \right] p^{(l-1)/2}.$$

Вычисление $\chi_2 = \chi_2(n_1, a, b)$

Поскольку b — нечетное, то $a = 2^\gamma c$, где c — нечетно и $\gamma \geq 0$, $n_1 = 2^\alpha m$, m — нечетно и $\alpha \geq 0$.

I. γ — четное, α — четное.

1. Пусть $\alpha \geq \gamma$:

1а) если $c \equiv b \pmod{4}$, то в этом случае

$$\chi_2 = \left[1 + (-1)^{\frac{m-c}{2}}\right] 2^{\gamma/2},$$

1б) если $c \equiv -b \pmod{4}$, то в этом случае

при $\alpha = \gamma$, $\chi_2 = 2^{\gamma/2}$;

при $\alpha > \gamma$

$$\chi_2 = \left[2 - (-1)^{\frac{c+b}{4}}\right] 2^{\gamma/a} + \left[1 + (-1)^{\frac{c+b}{4}}\right] (\alpha - \gamma - 2) 2^{\gamma/2-1}.$$

2. Пусть $\alpha = \gamma - 2$, тогда

$$\chi_2 = \left[1 + (-1)^{\frac{m-b}{2}}\right] 2^{\alpha/2}.$$

3. Пусть $\alpha \leq \gamma - 4$.

3а) если $m \equiv b \pmod{8}$, то в этом случае

$$\chi_2 = 2^{\alpha/2+2};$$

3б) если $m \not\equiv b \pmod{8}$, то $\chi_2 = 0$.

II. γ — четное, α — нечетное.

1. Если $0 < \alpha \leq \gamma - 1$, то $\chi_2 = 0$.

2. В случае $\alpha \geq \gamma + 1$ имеем:

2а) если $c \equiv -b \pmod{4}$, то

$$\chi_2 = \left[1 + (-1)^{\frac{c-b}{4} + \frac{m-c}{2}}\right] 2^{\gamma/2};$$

2б) если $c \equiv b \pmod{4}$, то

$$\chi_2 = \left[1 + (-1)^{\frac{c-b}{4}}\right] (\alpha - \gamma - 1) 2^{\gamma/2-1}.$$

III. γ — нечетное, α — четное.

1. При $\alpha \geq \gamma - 1$ имеем:

1а) если $m \equiv b \pmod{4}$, то

$$\chi_2 = \left[1 + (-1)^{\frac{m-b}{4}}\right] 2^{\frac{\gamma-1}{2}};$$

1б) если $m \equiv -b \pmod{4}$, то

$$\chi_2 = \left[1 + (-1)^{\frac{m+b}{4} + \frac{m-c}{2}}\right] 2^{\frac{\gamma-1}{2}}.$$

2. Пусть $\alpha \leq \gamma - 3$. Тогда:

2а) если $m \equiv b \pmod{8}$, то $\chi_2 = 2^{\alpha/2+2}$;

2б) если $m \not\equiv b \pmod{8}$, то $\chi_2 = 0$.

IV. γ — нечетное, α — нечетное.

1. Если $\alpha \leq \gamma - 2$, то $\chi_2 = 0$.

2. Если $\lambda \geq \gamma$, тогда

2а) при $m \equiv c \pmod{4}$ имеем $\chi_2 = \left[1 + (-1)^{\frac{m-c}{4}}\right] 2^{\frac{\gamma-1}{2}}$;

2б) при $m \equiv -c \pmod{4}$ имеем $\chi_2 = \left[1 + (-1)^{\frac{m+c}{4} + \frac{m-b}{2}}\right] 2^{\frac{\gamma-1}{2}}$.

При $\Delta = 1$ (случай Якоби) формулу для $r(n_1, a, b)$ (36) необходимо умножить на 2.

Формулировка теоремы завершена и с ее помощью нетрудно показать, что:

$$\begin{aligned} Z(1, 1; s) &= 4\zeta(s)L(s, \chi_{-4}), \\ Z(1, 2; s) &= 2\zeta(s)L(s, \chi_{-4})(1 - 2^{-s} + 2^{1-2s}), \\ Z(1, \sqrt{3}; s) &= 2\zeta(s)L(s, \chi_{-3})(1 + 2^{1-2s}), \\ Z(1, \sqrt{2}; s) &= 2\zeta(s)L(s, \chi_{-8}), \\ Z(1, \sqrt{7}; s) &= 2\zeta(s)L(s, \chi_{-7})(1 - 2^{-s} + 2^{1-2s}), \\ Z(1, \sqrt{5}; s) &= \zeta(s)L(s, \chi_{-20}) + L(s, \chi_{-4})L(s, \chi_5), \end{aligned} \quad (37)$$

где $L(s, \chi)$ — L -функции Дирихле, определение и свойства которых, а также некоторые детали вывода приведенных выше соотношений, представлены в следующем разделе.

7. Аналитическое продолжение L -функций Дирихле

Рядом Дирихле (обыкновенным) называется сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Произведение двух рядов Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$ есть снова ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}$, причем

$$c_n = \sum_{d|n} a_d b_{n/d}.$$

Характером Дирихле называется функция $\chi(n) = \chi(n; q)$, $n \in \mathbb{Z}$, $q > 1$, такая, что

$$\chi(n) \text{ не равна тождественно нулю: } \chi(n+q) = \chi(n), \chi(mn) = \chi(m)\chi(n).$$

L -функцией Дирихле называется ряд Дирихле

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

где $\chi(n)$ — характер Дирихле.

Основной результат о введенной в предыдущем разделе функции $r_{1,1}(n)$ — теорема Якоби — гласит: количество представлений натурального числа n в виде

суммы двух квадратов равно учетверенной разности между числом нечетных делителей n вида $4k + 1$ и числом нечетных делителей n вида $4k + 3$. Если ввести функцию

$$\kappa(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четное,} \\ 1, & \text{если } n=4k+1, \\ -1, & \text{если } n=4k+3 \end{cases}$$

(нетрудно убедиться, что она является характером Дирихле), то можно записать

$$r_{1,1}(n) = 4 \sum_{d|n} \kappa(d).$$

Поскольку умножение числа на степень двойки не приводит к появлению новых нечетных делителей, то $r_{1,1}(2^k l) = r_{1,1}(l)$. Подстановка $r_{1,1}$ в ряд для дзета-функции дает

$$Z(1, 1; s) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} \kappa(d) \right) n^{-s} = 4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \kappa(n) n^{-s} \right) = 4\zeta(s)L(s, \chi_{-4}),$$

где $L(s, \chi_{-4}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-s}$ — одна из L -функций Дирихле.

Из приведенного примера видно, что основной проблемой является получение для $r_{a^2, b^2}(n)$ формулы, которая позволила бы расцепить двойной ряд, при этом все возможные случаи перечислены в предыдущем разделе.

L -функции Дирихле связаны с обобщенной дзета-функцией

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} = \sum_{m=1}^q \chi(m) \sum_{n=0}^{\infty} (nq + m)^{-s} = q^{-s} \sum_{m=1}^q \chi(m) \zeta(s, m/q).$$

Как уже говорилось, для вычисления эффективного потенциала нужно знать аналитические свойства дзета-функции Эпштейна, в частности, важную роль играет ее аналитическое продолжение. Выше мы получили ряд формул, которые сводят вычисление дзета-функции к вычислению L -функций Дирихле. Приведем (без доказательства) функциональные уравнения для L -функций Дирихле, которые позволяют осуществлять аналитическое продолжение этих функций.

В силу свойств характеров Дирихле $\chi^2(-1) = \chi(1) = 1$. Характер Дирихле называется четным (нечетным), если $\chi(-1) = 1$ ($\chi(-1) = -1$). Характер $\chi(n)$ называется примитивным характером $(\text{mod } q)$, если q — наименьший период функции $\chi(n)$. Выражение

$$\tau(\chi) = \sum_{m=1}^q \chi(m) \exp(2\pi i m/q)$$

называется суммой Гаусса.

Пусть $\chi(n)$ — четный примитивный характер, $\bar{\chi}(n)$ — комплексно сопряженный характер. Тогда

$$\pi^{-(1-s)/2} q^{(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) L(1-s, \bar{\chi}) = \frac{q^{1/2}}{\tau(\chi)} \pi^{-s/2} q^{s/2} \Gamma(s/2) L(s, \chi).$$

Для нечетного характера равенство выглядит по-другому:

$$\pi^{-(2-s)/2} q^{(2-s)/2} \Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right) L(1-s, \bar{\chi}) = \frac{iq^{1/2}}{\tau(\chi)} \pi^{-(s+1)/2} q^{(s+1)/2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(s, \chi).$$

Как видно, для вещественных характеров приведенные соотношения действительно дают функциональные уравнения для L -функций Дирихле. Оказывается, что вещественные примитивные характеры можно отождествить с символами Кронекера $\left(\frac{d}{n}\right)$, где d есть произведение взаимно простых множителей вида $-4, 8, -8, (-1)^{(p-1)/2} p$ (где $p > 2$), причем положительным d соответствуют четные характеры, а отрицательным d — нечетные.

8. Модель Гросса–Неве на торе T^2

Здесь мы вычислим эффективный потенциал модели Гросса–Неве изложенным выше методом на пространстве T^2 с граничными условиями разных типов и исследуем с его помощью фазовую структуру этой модели (ранее эта задача решалась только для случая антипериодических по обеим координатам граничных условий совершенно другим методом [14]). Лагранжиан Гросса–Неве имеет вид

$$L = \sum_k \left[\bar{\psi}_k i \hat{\partial} \psi_k + \sigma \bar{\psi}_k \psi_k \right] - N \sigma^2 / 2f,$$

а однопетлевой эффективный потенциал равен

$$V(\sigma_c) / N = \sigma_c^2 / 2f - \Omega,$$

где

$$\Omega = \frac{ab}{(2\pi)^2} \sum_{p,q} \ln \left(1 + \frac{\sigma_c^2}{a^2 p^2 + b^2 q^2} \right).$$

Суммирование по q и p зависит от граничных условий. При периодических условиях суммирование идет по целым числам, при антипериодических — по полуцелым. Видно, что Ω соответствует нашим прежним обозначениям с точностью до замены $m \rightarrow \sigma_c$ и вычитания значения потенциала при $\sigma_c = 0$. Мы избежим проблем с нулевой модой, если будем рассматривать антипериодические условия по крайней мере по одной координате. Потенциал Ω представляется в виде суммы двух слагаемых, Ω_1 и Ω_2 . Для Ω_1 формула (9) дает

$$\Omega_1 = \frac{\sigma_c^2}{4\pi} \left(1 + \ln \frac{\mu^2}{\sigma_c^2} \right). \quad (38)$$

Будем нормировать Ω_1 условием

$$\left. \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial \sigma_c^2} \right|_{\sigma_c = \sigma_0} = 0.$$

(Это означает, что производная от однопетлевого потенциала при $a = 0$, $b = 0$ равна производной от древесной его части.) Тогда

$$\Omega_1 = \frac{\sigma_c^2}{4\pi} \left(3 + \ln \frac{\sigma_0^2}{\sigma_c^2} \right). \quad (38)$$

Часть Ω_2 потенциала зависит от граничных условий. Рассмотрим два случая: 1) антиперидические условия по координате $(\text{mod } 2\pi/a)$ и перидические условия по координате $(\text{mod } 2\pi/b)$; 2) антиперидические условия по обеим координатам. Как было показано выше, нужно сначала вычислить потенциал с перидическими условиями по обеим координатам (см. формулу (14)):

$$\Phi(a, b; \sigma_c) = -\frac{\sigma_c^2}{4\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_C \Gamma(\nu) \Gamma(\nu - 1) Z(1/a, 1/b; \nu) (\pi^2 \sigma_c^2)^{-\nu} d\nu. \quad (39)$$

Заметим, что произведение $\Gamma(\nu) Z(1/a, 1/b; \nu)$ имеет, согласно (25), только два полюса: $s = 0$ и $s = 1$. Поэтому подынтегральное выражение имеет полюсы второго порядка в точках $s = 0$ и $s = 1$ и полюсы первого порядка в точках $s = -k$, $k = 1, 2, \dots$. Поэтому из (39) имеем

$$\begin{aligned} \Phi(a, b; \sigma_c) = & -\frac{ab}{4\pi^2} \left[\frac{\pi b}{3a} + \ln \frac{a^2}{4\pi^2 \sigma_c^2} + I(b/a) \right] - \\ & -\frac{\sigma_c^2}{4\pi} \left[1 - 2\gamma - \frac{\pi b}{3a} - \ln \frac{\sigma_c^2}{4b^2} - I(b/a) \right] + O(\sigma_c^4), \end{aligned} \quad (40)$$

где функция $I(x)$ дана в (35). Нужные нам потенциалы вычисляются теперь по формулам

$$\Omega_2^{AP}(a, b; \sigma_c) = 2\Phi(a/2, b; \sigma_c) - \Phi(a, b; \sigma_c) - 2\Phi(a/2, b; 0) - \Phi(a, b; 0),$$

$$\Omega_2^{AA}(a, b; \sigma_c) = 2\Omega_2^{AP}(a, b/2; \sigma_c) - \Omega_2^{AP}(a, b; \sigma_c).$$

(Индексы AP и AA означают перидичность (P) и антиперидичность (A) по координате.) Теперь с помощью (40) нетрудно получить

$$\Omega_2^{AP} = -\frac{\sigma_c^2}{4\pi} \left[1 - 2\gamma - \frac{\pi b}{a} - \ln \frac{\sigma_c^2}{4b^2} - 2I(2b/a) + I(b/a) \right] + O(\sigma_c^4),$$

$$\Omega_2^{AA} = -\frac{\sigma_c^2}{4\pi} \left[1 - 2\gamma - \ln \frac{4\sigma_c^2}{b^2} - 5I(b/a) + 2I(2b/a) + 2I(b/2a) \right] + O(\sigma_c^4)$$

Имея явное выражение для Ω -потенциалов, мы можем исследовать спонтанное нарушение симметрии в модели. Выпишем полностью эффективный потенциал V^{AP} :

$$\frac{1}{N} V^{AP}(\sigma_c) = \frac{\sigma_c^2}{2f} + \frac{\sigma_c^2}{4\pi} \left[-2 - 2\gamma - \ln \frac{\sigma_0^2}{4b^2} - 2I(2b/a) + I(b/a) \right] + O(\sigma_c^4).$$

Условия стационарности гласят:

$$\frac{1}{N} \frac{\partial V^{AP}}{\partial \sigma_c} = \frac{\sigma_c}{f} + \frac{\sigma_c}{2\pi} \left[-2 - 2\gamma - \frac{\pi b}{a} - \ln \frac{\sigma_0}{4b^2} - 2I(2b/a) + I(b/a) \right] + O(\sigma_c^3) = 0.$$

По крайней мере в пределе $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 0$ точка $\sigma_c = 0$ не является минимумом потенциала, поэтому будем считать, что и при некоторых ненулевых a , b это так. Мы можем тогда сократить на σ_c в уравнении

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{2\pi} \left[-2 - 2\gamma - \frac{\pi b}{a} - \ln \frac{\sigma_0}{4b^2} - 2I(2b/a) + I(b/a) \right] + O(\sigma_c^2) = 0. \quad (41)$$

Точка глобального минимума эффективного потенциала при достаточно малых значениях a, b является нетривиальным решением этого уравнения. При критических значениях a, b это решение обращается в нуль. Поэтому, полагая в (41) $\sigma_c = 0$, мы получаем в плоскости переменных a, b уравнение кривой, на которой происходят фазовые превращения второго рода:

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{2\pi} \left[-2 - 2\gamma - \frac{\pi b}{a} - \ln \frac{\sigma_0}{4b^2} - 2I(2b/a) + I(b/a) \right] = 0. \quad (42)$$

Его можно упростить, введя перенормированные параметры

$$\tilde{a} = \frac{2a}{\sqrt{\sigma_0}} \exp\left(\frac{\pi}{f} - 1 - \gamma\right), \quad \tilde{b} = \frac{2b}{\sqrt{\sigma_0}} \exp\left(\frac{\pi}{f} - 1 - \gamma\right).$$

Тогда

$$\frac{\pi \tilde{b}}{\tilde{a}} - 2 \ln \tilde{b} + 2I(2\tilde{b}/\tilde{a}) - I(\tilde{b}/\tilde{a}) = 0.$$

Введем параметр $x = \tilde{b}/\tilde{a}$, тогда уравнение фазовой кривой записывается в параметрическом виде:

$$\tilde{b} = \exp\left(\frac{\pi x}{2} + I(2x) - I(x)/2\right), \quad \tilde{a} = \tilde{b}/x.$$

Поскольку $I(x)$ достаточно быстро убывает при $x \rightarrow \infty$, такое представление хорошо работает для x в интервале, скажем, $x > 1$. На интервале $0 < x < 1$ воспользуемся свойством симметрии функции $I(x)$, тогда

$$\tilde{b} = 4x \exp(I(1/2x) - I(1/x)/2), \quad \tilde{a} = \tilde{b}/x.$$

Качественный вид фазовой кривой представлен на рис. 1. Будем считать a обратной длиной пространственного измерения, по которому наложены антиперIODические условия, а b – температурой. Основным результатом состоит в том, что

имеется критическая длина (в безразмерных переменных $\tilde{a} = 4$). Если длина пространственного измерения больше критической, при любой температуре $\sigma_c = 0$, и фазового перехода нет. Если длина пространственного измерения меньше критической, то существует фазовый переход: при низкой температуре $\sigma_c \neq 0$, а при ее повышении σ_c постепенно исчезает. В отличие от трехмерного случая картина совершенно не зависит от значения константы связи. При изменении константы связи рис. 1 только масштабируется, тогда как в трехмерном случае меняется форма фазовой кривой: при малых значениях константы связи фазовый переход существует при любой длине пространственного измерения, а при больших — существует критическая длина, как в нашем случае.

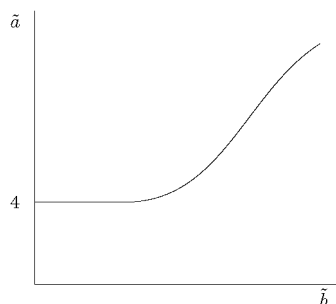


Рис. 1. Фазовая диаграмма в случае антипериодических условий по одной координате ($\text{mod } 2\pi/a$) и периодических условий по другой координате ($\text{mod } 2\pi/b$).

Аналогично рассматривается случай полностью антипериодических граничных условий. Уравнение фазовой кривой имеет вид

$$\ln(\tilde{b}/4) - \frac{5}{2}I(\tilde{b}/\tilde{a}) + I(2\tilde{b}/\tilde{a}) + I(\tilde{b}/2\tilde{a}) = 0.$$

В параметрической форме оно имеет вид

$$\tilde{b} = 4 \exp\left(\frac{5}{2}I(x) - I(2x) - I(x/2)\right), \quad \tilde{a} = \tilde{b}/x.$$

В этом случае фазовая кривая симметрична относительно замены a на b , поэтому достаточно построить ее для $x > 1$. Качественная картина представлена на рис. 2. Отличие от трехмерного случая опять состоит в том, что при изменении константы связи рис. 2 только масштабируется, тогда как в трехмерном случае при некотором значении константы связи фазовая кривая исчезает вовсе, и система при любых значениях параметров находится в фазе с $\sigma_c \neq 0$.

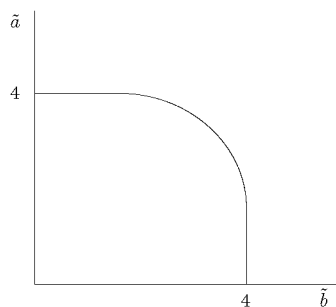


Рис. 2. Фазовая диаграмма в случае антипериодических условий по обеим координатам.

Заключение

В работе построена регулярная процедура описания свойств эффективных потенциалов теорий на двумерных решетках. Способ описания основывается на использовании свойств дзета-функции Римана–Эпштейна и ее аналитическом продолжении, а также обобщении точных функциональных соотношений типа маделунговских. Использование теоретико-числовых свойств дзета-функции позволило единым образом учесть различные типы граничных условий, которые можно поставить в соответствие либо конечному объему системы, либо такому важному физическому параметру, как температура. Отметим также, что в физике твердого тела, например, для электрона проводимости в магнитном поле используется спектр вида [15]

$$\epsilon = A_1 \cos k_x a_x + A_2 \cos k_y a_y,$$

то есть двоякопериодическая решетка. Таким образом, рассмотрение двоякопериодической структуры, проведенное в настоящей работе, возможно будет перенести и на другие задачи, используя развитый выше аппарат. На основе предложенной процедуры проведено исследование фазовой структуры модели Гросса–Неве в двумерии на торе. Проведенный анализ модели показывает, что в случае нетривиальной топологии тора происходит спонтанное нарушение симметрии в системе. Также отличительной чертой двумерия с нетривиальной топологией от трехмерия состоит в том, что фазовая картина не зависит от константы связи при смешанных граничных условиях.

Таким образом, наше рассмотрение показывает, что наличие нетривиальной топологии, которое может быть обусловлено различной физической природой — температурой, конечными размерами системы, периодической зависимостью спектра от импульса [15] и другими эффектами, может привести к изменению физически наблюдаемых — генерации массы в модели Гросса–Неве. Все это указывает на необходимость детального изучения “простых” моделей, на которые обращалось внимание в классических работах [1,2,3] и интерес к которым не иссяк и в настоящее время.

Список литературы

- [1] Gross D.J., Neveu A. // *Phys.Rev.*, 1974, **D10**, 3235.
- [2] Поляков А.М. *Калибровочные поля и струны*. — М., изд-во ИТФ им. Л.Д.Ландау, 1995.
- [3] Криве И.В., Рожавский А.С. // *УФН*, 1987, **152**, 33.
- [4] Rosenstein B., Warr B.J., Park S.H. // *Phys.Rep.*, 1991, **205**, 59.
- [5] Криве И.В., Нафтулин С.А. // *ЯФ*, 1990, **52**, 855; Klimenko K.G. // *Z.Phys.*, 1992, **C54**, 323.

- [6] Dzialoshinsky I., Polyakov A.M., Wiegmann P. // Phys. Lett., 1988, **127A**, 112; A. M. Polyakov A.M. // Mod. Phys. Lett., 1988, **A3**, 325; Wiegmann P. // Phys. Rev. Lett., 1988, **60**, 821.
- [7] Маделунг Э. *Математический аппарат физики*. — М., Наука, 1968.
- [8] Мостепаненко В.М., Трунов Н.Н. *Эффект Казимира и его приложения*. — М., 1990.
- [9] Buchbinder I.L., Odintsov S.D., Shapiro I.L. *Effective Action in Quantum Gravity*. — IOP Publishing, Bristol, 1992.
- [10] Burgess M. // Phys. Rev., 1991, **D44**, 2552.
- [11] Elizalde E. // J. Phys. A (Math. Gen.), 1994, **27**, 3775.
- [12] Elizalde E. // J.Math.Phys., 1990, **31**, 170.
- [13] Виноградов И.М. *Основы теории чисел*. — М., Наука, 1965.
- [14] Wotzasek C. // J.Phys.A (Math.Gen.), 1990, **23**, 1627; Ravndal F., Wotzasek C. // Phys.Lett., 1990, **B249**, 266.
- [15] Bloch F. // Ztschr.Phys., 1928, **52**, 555.

Рукопись поступила 17 июля 1996 г.

А.С.Вшивцев и др.

Фазовая структура модели Гросса–Неве с учетом влияния температуры и конечного объема.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы \LaTeX .

Редактор М.Л.Фоломешкина.

Технический редактор Н.В.Орлова.

Подписано к печати 23.07.96 Формат $60 \times 84/8$. Офсетная печать.

Печ.л. 2.62. Уч.-изд.л. 2.01. Тираж 200. Заказ 736. Индекс 3649.

ЛР №020498 17.04.97.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

