ИФВЭ
IHEP

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 96–67
ОТФ

Л.Д. Соловьев

КВАНТОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО РОТАТОРА С МАССАМИ И СПИНАМИ

Протвино 1996

УДК 539.1.01 М–24

Аннотация

Соловьев Л.Д. Квантование релятивистского ротатора с массами и спинами: Препринт ИФВЭ 96–67. – Протвино, 1996. – 33 с., библиогр.: 27.

Для описания спектра адронов, лежащих на главных реджевских траекториях, вводится понятие релятивистского ротатора с массами и спинами. Простейшим примером ротатора является жесткая прямолинейная струна с взаимодействием Намбу-Гото, на концах которой находятся точечные массивные частицы со спином 1/2. Для ротатора общего вида найдены связи между его каноническими переменными, являющиеся следствием симметрии его действия. Показано, что спиновые связи лагранжиана содержатся в полученных гамильтоновых связях. Найден гамильтониан ротатора и проведено его релятивистски-инвариантное квантование. Условие сохранения спиновых связей эквивалентно суперсимметрии действия ротатора. Условие непротиворечивости квантования налагает дальнейшие ограничения на вид действия. В качестве приложения проанализирован бесспиновый ротатор и ротатор с одним спином. В последнем случае после квантования реджевская траектория оказывается вырожденной по орбитальному спину. Обсуждается важность этого вырождения для сравнения с экспериментом и дальнейшее развитие струнной модели конфайнмента.

Abstract

Soloviev L.D. Quantization of the Relativistic Rotator with Masses and Spins.: IHEP Preprint 96–67. – Protvino, 1996. – p. 33, refs.: 27.

The notion of the relativistic rotator with masses and spins is introduced to describe the spectrum of hadrons lying on the leading Regge trajectories. A simple example of the rotator is a rigid straight-line string with the Nambu-Goto interaction to the ends of which massive point particles with spins 1/2 are attached. For the general rotator the constraints between its quanonical variables are obtained as a consequence of the symmetry of the rotator action. These Hamiltonian constraints contain the spin constraints of the rotator Lagrangian. The rotator Hamiltonian is found and the relativistic-invariant quantization of the rotator is carried out. The conservation of the spin constraints is equivalent to the supersymmetry of the rotator action. The consistancy of quantization put further limitations on the action. As an application spinless rotator and rotator with one spin 1/2 are analysed. In the latter case after quantization the Regge trajectory is degenerate with respect to the orbital spin. The importance of this degeneracy for the comparison with experiment and further development of the string model of confinement are discussed.

Введение

Характерным свойством спектра наблюдаемых адронов являются их прямолинейные растущие реджевские траектории. Считается, что это свойство связано с конфайнментом (невылетанием) кварков квантовой хромодинамики. Однако к нему неприменимы расчеты по теории возмущений, и оно рассматривается только в теории на решетке и в моделях.

Среди них струнная модель [1-3], использующая общие представления о конфайнменте и допускающая в прямолинейном приближении релятивистское квантование [4,5], представляемая особенно привлекательной. Прямолинейная струна дает линейно растущую реджевскую траекторию и может рассматриваться как нулевое приближение для описания спектра мезонов.

Следующее приближение, которому посвящена данная работа, должно учитывать ненулевые (токовые) массы и спины кварков.

При этом мы не учитываем колебаний струны и взаимодействий струн друг с другом. Колебания струны ответственны за дочерние реджевские траектории [6,7]. Поэтому мы ограничимся рассмотрением главных траекторий и предположим, что влияние струнных колебаний на главные траектории мало. Учет взаимодействий струн [5] необходим для описания ненулевых ширин адронных состояний.

Разумеется, модель струны в теории адронов является приближенным подходом, и ее высшие приближения не должны превышать точность самого метода. Заметим в этой связи, что стандартное квантование полной струны [8], содержащее аномалию в четырехмерном пространстве-времени, отнюдь не исключает безаномального квантования отдельных конфигураций струны, важных для описания адронов. Интересный же вопрос о квантовании бесконечного числа высших мод может быть вообще снят в нашей задаче необходимостью учета неструнных эффектов. Во всяком случае, это вопрос дальнейших исследований, в том числе экспериментальных. Пока же мы очень мало знаем о дочерних траекториях адронов.

Сделаем еще замечание о формальной связи квантования прямолинейной струны с квантованием полной струны. В последнем случае движение струны разлагается на движения бесконечного числа осцилляторов, которые после квантования дают операторы рождения и уничтожения. Переход к прямолинейной струне означает на классическим уровне зануление всех колебаний, кроме первого. Но это налагает на его координату и импульс дополнительные связи, превращая его из осциллятора в ротатор, квантование которого проводится с помощью операторов углового момента без использования пространства Фока. В итоге мы получаем волновую функцию бесконечного мультиплета состояний, лежащих на растущей реджевской траектории.

Наконец, заметим, что в данной работе, как и в работах [9,10], используются общие граничные условия струны, в то время как при квантовании полной струны и в подходе работы [5] используется ограниченный класс этих условий. Поэтому здесь прямолинейная струна получается в произвольной калибровке, в то время как в работе [5] ее калибровка фиксирована.

Итак, цель работы — построить общую модель для описания влияния масс и спинов кварков на главные реджевские траектории. Эта модель имеет и самостоятельный интерес, как релятивистская квантовая модель протяженного объекта с внутренними спинами.

Полученный ниже квантовый результат в случае бесспиновых кварков совпадает с квазиклассическим квантованием классического расчета в трехмерном пространстве-времени [11]. Квантовый результат для равных масс бесспиновых кварков был получен ранее в работе [12].

Учет спинов безмассовых кварков в гамильтониане и формуле для траекторий адронов делался ранее в работах [13], однако последовательного лагранжева рассмотрения до сих пор не проводилось.

План работы следующий. В разделе 1 дано общее определение ротатора как системы, зависящей от орбитальных и спиновых переменных [14] и обладающей определенной симметрией, которую мы будем называть ротаторной. Преобразования этой симметрии зависят от трех произвольных функций параметра эволюции (времени). Приведены частные примеры ротаторов. В разделе 2 доказаны две теоремы о связях между гамильтоновыми переменными ротатора. Первая устанавливает вид трех его связей, вытекающих из ротаторной симметрии. Вторая теорема демонстрирует, каким образом спиновые связи, введенные в лагранжиан с помощью множителей Лагранжа, содержатся в полученных гамильтоновых связях. Получен гамильтониан ротатора и обсуждается его релятивистски-инвариантное квантование. В разделе 3 эти результаты применяются к бесспиновому ротатору общего вида. В частности, проквантована жесткая прямолинейная струна с произвольными точечными массами на концах. При этом мы используем новый для этой задачи метод инвариантов, который непосредственно ведет к цели и дополняет метод скобок Дирака [15] и метод симплектической формы [5,9,16,17]. Этому методу посвящен раздел 4. В разделе 5 проделан анализ ротатора с одним спином. Выписан его лагранжиан, связи и условие сохранения спиновой связи. Условия сохранения спиновой связи накладывают определенные ограничения на вид взаимодействия. Показано, что эти ограничения эквивалентны требованию суперсимметрии действия ротатора. Классическая динамика односпинового ротатора представляет собой пример классической грассманновой динамики в суперпространстве, значительно более содержательный, чем в случае точечной частицы со спином. На этом примере проанализированы так называемые физические начальные условия, когда четные сохраняющиеся физические величины являются числами.

При квантовании односпиновый ротатор вследствие суперсимметрии, подобно точечной частице [14,18], удовлетворяет двум уравнениям — уравнению Дирака и уравнению, обобщающему уравнение Клейна-Гордона. Требование непротиворечивости квантования накладывает дополнительные ограничения на вид взаимодействия. В результате в квантовом случае траектория Редже оказывается вырожденной: она зависит лишь от полного спина ротатора и не зависит от орбитального спина. Это явление, на наш взгляд, объясняет тот факт, что состояния с нулевым орбитальным спином и ненулевым полным спином (например, ρ- и K^*-мезоны) хорошо описываются струнной моделью.

Раздел 6 заключает работу.

1. Определение ротатора. Примеры

Будем называть ротатором релятивистскую систему, описываемую 4-векторами $r(\tau)$, $q(\tau)$ и спиновыми переменными $\xi_i(\tau)$, $\xi_i^5(\tau)$ и $\lambda_i(\tau)$, $i = 1, ...n$, зависящими от пуанкаре-инвариантного параметра эволюции τ. Вектор r определяет некоторую точку ротатора, q — направление ротатора, а спиновые переменные описывают по Березину-Маринову [14] его спины.

По предположению, ξ_i псевдовектор, а ξ_i^5 и λ_i — псевдоскаляры, причем λ_i является множителем Лагранжа. Спиновые переменные являются грассмановыми, т.е. для фиксированного i антикоммутируют между собой. Спиновые переменные с разными номерами коммутируют между собой.

Основным свойством ротатора, по определению, является его симметрия относительно трех видов преобразований:
1) произвольного изменения длины вектора q,

$$q \to qf(\tau), \tag{1}$$

2) произвольного сдвига конца вектора r вдоль q

$$r \to r + qg(\tau), \tag{2}$$

3) произвольного изменения параметра эволюции τ, что можно записать в виде свойства Лагранжиана

$$\mathcal{L}(\dot{r}h, \dot{q}h, \dot{\xi}h) = h\mathcal{L}(\dot{r}, \dot{q}, \dot{\xi}), \tag{3}$$

где точкой обозначена производная по τ и $h = h(\tau)$. Таким образом, преобразования симметрии ротатора зависят от трех произвольных функций от τ.

Сделаем естественное (техническое) предположение, что лагранжиан ротатора зависит от $\dot{r}$, но не от r (т.е. сохраняется полный импульс ротатора) и что со скоростями $\dot{r}$ и $\dot{q}$ связаны только сами спиновые переменные ξ_i и ξ_i^5, а их производные $\dot{\xi}_i$ и $\dot{\xi}_i^5$ входят в лагранжиан в отдельном слагаемом, не зависящем от орбитальных скоростей $\dot{r}$ и $\dot{q}$.

Приведем несколько примеров ротаторов. Используется метрика $g_{ab} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$.

1. Релятивистская точечная частица [14,18] является частным случаем ротатора при $q = 0$.

2. Прямолинейная струна с лагранжианом Намбу-Гото [19-20]:

$$x(\tau, \sigma) = r(\tau) + f(\tau, \sigma) q(\tau), \tag{4}$$

где $f(\tau, \sigma)$ — произвольная монотонная функция и

$$\mathcal{L}_{\text{стр}} = -a \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{-g} d\tau = -a\sqrt{-q^2} \int_{f_1}^{f_2} \sqrt{\dot{x}_q^2} df. \tag{5}$$

Здесь $f_i = f(\tau, \sigma_i)$, а символ вектора в индексе обозначает ортогональность этому вектору:

$$Z_q^\mu = \Pi^{\mu\nu}(q) Z_\nu, \quad \Pi^{\mu\nu}(q) = g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}. \tag{6}$$

Из экстремума действия параметры концов струны удовлетворяют условию

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{стр}}}{\partial \sigma_i} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{стр}}}{\partial f_i} = 0. \tag{7}$$

Находя отсюда f_i и вычисляя интеграл в (5), получаем лагранжиан прямолинейной струны

$$\mathcal{L}_{\text{стр}} = -a \frac{\pi}{2} b l^2, \tag{8}$$

где

$$b = \left(\dot{q}_q^2 / q^2\right)^{1/2}, \quad l = b^{-1} (\dot{r}_\perp^2)^{1/2}, \tag{9}$$

$$\dot{r}_\perp^\mu = \Pi_2^{\mu\nu} \dot{r}_\nu, \tag{10}$$

$$\Pi_2^{\mu\nu} = \Pi^{\mu\nu}(q, \dot{q}_q) = \Pi^{\mu\alpha}(q) \Pi_\alpha^\nu(\dot{q}_q) = \Pi^{\mu\alpha}(\dot{q}_q) \Pi_\alpha^\nu(q) = g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - \frac{\dot{q}_q^\nu \dot{q}_q^\mu}{\dot{q}_q^2}. \tag{11}$$

Нетрудно убедиться, что лагранжиан (8) обладает ротаторной симметрией. Переменная l представляет собой половину длины струны при фиксированном τ, а b — частоту ее вращения (точнее, $\int b d\tau$ дает фазу вращения).

3. Прямолинейная струна с более общим лагранжианом, который произвольным образом зависит от скалярной кривизны R ее мировой поверхности [9,10,21]

$$\mathcal{L} = -\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} F(R/2) \sqrt{-g} d\sigma, \tag{12}$$

где F — произвольная положительная функция, менее сингулярная, чем $1/\sqrt{-g}$ при $g \to 0$. Для прямолинейной струны (4) этот лагранжиан равен

$$\mathcal{L} = -b\tilde{F}(l), \tag{13}$$

$$\tilde{F}(l) = l^2 \int\limits_0^1 F((lx)^{-2})(x/(1-x))^{1/2} dx, \tag{14}$$

где b и l даются выражениями (9)-(11).

4. Наконец, жесткая прямолинейная струна с точечными частицами на концах:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{стр}} + \sum_{i=1,2} \mathcal{L}_i(\dot{x}_{iq}). \tag{15}$$

где $\mathcal{L}_{\text{стр}}$ — лагранжиан (5), а $\mathcal{L}_i(\dot{x}_{iq})$ — лагранжиан точечной частицы со скоростью конца струны $\dot{x}_i$, причем в ротаторном приближении, когда отсутствуют колебания вдоль струны (жесткая струна), в лагранжиан входят лишь компоненты скорости $\dot{x}_{iq}$, ортогональные направлению струны.

Для бесспиновой массивной частицы

$$\mathcal{L}_i(\dot{x}_{iq}) = -m_i \sqrt{\dot{x}_{iq}^2}. \tag{16}$$

Из условия на концы струны

$$f_i = -\frac{\dot{r}_q \dot{q}_q}{\dot{q}_q^2} + (-1)^i \frac{l_i}{\sqrt{-q^2}}, \tag{17}$$

где

$$l_i = \sqrt{l^2 + \nu_i^2/4} - \nu_i/2, \quad \nu_i = m_i/a, \tag{18}$$

и лагранжиан равен

$$\mathcal{L} = -bG(l), \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned} G(l) &= b^{-1}\left[a\sqrt{-q^2}\int_{f_1}^{f_2} \sqrt{(\dot{r}_q + f\dot{q}_q)^2} df + \sum_i m_i \sqrt{(\dot{r}_q + f_i \dot{q}_q)^2}\right] = \\ &= a\int_{-l_1}^{l_2} \sqrt{l^2 - x^2} dx + \sum_i m_i \sqrt{l^2 - l_i^2} = \\ &= \frac{a}{2}\sum_{i=1,2}\left\{l^2 \arcsin\frac{l_i}{l} + (\nu_i l_i)^{1/2}(l_i + 2\nu_i)\right\}. \end{aligned} \tag{20}$$

Заметим, что полная длина ротатора в этом случае равна $l_1 + l_2$.

5. Наконец, ротатором является жесткая прямолинейная струна с массивными спиновыми частицами на концах. Ее лагранжиан дается формулой (15), где

$$\mathcal{L}_i(\dot{x}_{iq}) = -m_i\sqrt{\dot{x}_{iq}^2} - i\left(\frac{\dot{x}_{iq}\xi_i}{\sqrt{\dot{x}_{iq}^2}} - \xi_i^5\right) b\lambda_i + \frac{i}{2}\left(\xi_i \dot{\xi}_i - \xi_i^5 \dot{\xi}_i^5\right) \tag{21}$$

есть лагранжиан Березина-Маринова [14]. Параметры концов струны теперь имеют вид

$$f_i = h_i + k_i \lambda_i, \tag{22}$$

где h_i — число, а k_i — нечетный элемент алгебры Грассманна. Они определяются из условия экстремума зависящей от f_i части лагранжиана, которая имеет вид $\mathcal{L}_0(f_i) + \sum_i \mathcal{L}_{1i}(f_i)\lambda_i$, где $\mathcal{L}_0$ — числовая, а $\mathcal{L}_{1i}$ — нечетная функции f_i. Из условия экстремума

$$0 = \frac{\partial}{\partial f_i}(\mathcal{L}_0(f_i) + \mathcal{L}_{1i}(f_i)\lambda_i) = \frac{\partial}{\partial h_i}\mathcal{L}_0(h_i) + \frac{\partial^2}{\partial h_i^2}\mathcal{L}_0(h_i)k_i\lambda_i + \frac{\partial}{\partial h_i}\mathcal{L}_{1i}(h_i)\lambda_i, \tag{23}$$

поскольку $\lambda_i^2 = 0$. Отсюда следует, что h_i, т.е. числовая часть f_i, находится из того же условия, что и в бесспиновом случае и совпадает с (17), а

$$k_i = -\frac{\partial \mathcal{L}_{1i}(h_i)}{\partial h_i} \Bigg/ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_0(h_i)}{\partial h_i^2}. \tag{24}$$

Экстремальное значение лагранжиана при этом равно ($\mathcal{L}_2$ — часть лагранжиана, не зависящая от f_i)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_i) &= \mathcal{L}_0(f_i) + \sum_i \mathcal{L}_{1i}(f_i)\lambda_i + \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_0(h_i) + \sum_i \frac{\partial}{\partial h_i}\mathcal{L}_0(h_i)k_i\lambda_i + \\ &+ \sum_i \mathcal{L}_{1i}(h_i)\lambda_i + \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(h_i) \end{aligned} \tag{25}$$

и не зависит от k_i. В итоге, подставляя значения (17) в (15),(5),(21), для лагранжиана рассматриваемого ротатора получаем выражение

$$\mathcal{L} = -b(G(l) + i\sum_{a,j} F_{aj}(l)u_j^a\lambda_j) + \mathcal{L}_\xi, \tag{26}$$

где $G(l)$ — функция (20), $a = 0, 1, 5, \quad j = 1, 2,$

$$F_{0j} = l(\nu_j l_j)^{-1/2}, \quad F_{1j} = (-1)^j(l_j/\nu_j)^{1/2}, \quad F_{5j} = -1, \tag{27}$$

$$u_j^0 = \frac{\dot{r}_\perp \xi_j}{\sqrt{\dot{r}_\perp^2}}, \quad u_j^1 = \frac{\dot{q}_q \xi_j}{\sqrt{-\dot{q}_q^2}}, \quad u_j^5 = \xi_j^5 \tag{28}$$

и $\mathcal{L}_\xi$ — часть лагранжиана, содержащая производные спиновых переменных,

$$\mathcal{L}_\xi = \frac{i}{2}\sum_j(\xi_j\dot{\xi}_j - \xi_j^5\dot{\xi}_j^5). \tag{29}$$

Мы увидим, что этот простейший спиновый ротатор описывает лишь предельные случаи: либо бесспиновую струну, либо точечные спиновые частицы, и покажем, как следует дополнить его лагранжиан, чтобы получить нетривиальный спиновый ротатор. В следующем разделе мы будем рассматривать ротатор общего вида, исходя из его определения, данного в начале этого раздела.

2. Связи, гамильтониан и квантование ротатора

В силу симметрии ротатора 1,2 и 3 (см. формулы (1)-(3)) между его координатами r, q, ξ_i, ξ_i^5 и λ_i и импульсами p и π (сопряженными r и q) существуют три связи. Две из них не зависят от вида лагранжиана ротатора и непосредственно следуют из симметрии относительно преобразований 1 и 2.

В самом деле, при преобразовании 1 скорость $\dot{q}$ переходит в $\dot{q}f + q\dot{f}$. Лагранжиан не должен зависеть от $\dot{f}$, и это возможно лишь в том случае, когда он не зависит от компонент $\dot{q}$, параллельных q, т.е. $L = L(\dot{q}_q)$. При этом $\dot{q}_q \to \dot{q}_q f$. Импульс π, канонически сопряженный q, имеет вид

$$\pi_\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\mu} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_q^\nu}\frac{\partial \dot{q}_q^\nu}{\partial \dot{q}^\mu} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_q^\nu}\Pi_\mu^\nu(q) \tag{30}$$

(см. формулу (6)), откуда следует связь

$$\pi q = 0. \tag{31}$$

Дифференцируя соотношение симметрии $L(\dot{q}_q f, qf) = L(\dot{q}_q, q)$ по f и полагая $f = 1$, получаем полезное соотношение

$$\pi \dot{q}_q = \frac{\partial L}{\partial q} q, \tag{32}$$

в котором дифференцирование по q можно проводить при фиксированных $\dot{r}_\perp$ и $\dot{q}_q$.

Инвариантом преобразования 1 является величина b (9). Она инвариантна относительно преобразования 2, а при преобразовании 3 преобразуется как лагранжиан.

Точно так же убеждаемся, что из-за симметрии 2 скорость $\dot{r}$ может входить в лагранжиан лишь в виде $\dot{r}_\perp (10), (11) : L = L(\dot{r}_\perp)$. Импульс p, канонически сопряженный r,

$$p_\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}^\mu} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_\perp^\nu}\frac{\partial \dot{r}_\perp^\nu}{\partial \dot{r}^\mu} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_\perp^\nu}\Pi_{2\mu}^\nu \tag{33}$$

удовлетворяет связи

$$pq = 0, \tag{34}$$

а также соотношению

$$p\dot{q}_q = 0 \tag{35}$$

(и для несохраняющегося p) в силу свойств проектора Π_2 (11).

Третья связь зависит от вида лагранжиана ротатора. Для ее нахождения рассмотрим инварианты ротаторной симметрии, зависящие от орбитальных скоростей. Ими является скаляр l (9) и ортонормированные векторы $v^a, a = 0, 1, 2$ (v^2 — псевдовектор):

$$v^0 = (\dot{r}_\perp^2)^{-1/2}\dot{r}_\perp, \quad v^1 = (-\dot{q}_q^2)^{-1/2}\dot{q}_q, \quad v^2 = [v_0 v_3 v_1], \tag{36}$$

$$v^3 = (-q^2)^{-1/2} q, \quad v^a v^b = g^{ab}, \quad a, b = 0, 1, 2, 3, \tag{37}$$

где введено обозначение

$$[abc]_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a^\nu b^\rho c^\sigma, \quad \epsilon_{0123} = 1. \tag{38}$$

В бесспиновом случае они не входят в лагранжиан, однако при наличии спинов могут образовывать (псевдо)скаляры

$$u_i^a = v^a \xi_i, \quad a = 0, 1, 2, \quad i = 1, ...n. \tag{38a}$$

Поэтому общий лагранжиан ротатора имеет вид

$$\mathcal{L} = -bF(l, u) + \mathcal{L}_\xi, \tag{39}$$

где F — произвольная вещественная скалярная функция, u — совокупность u_i^a, а $\mathcal{L}_\xi$ не зависит от орбитальных скоростей. Заметим, что в F выписаны лишь аргументы, зависящие от орбитальных скоростей.F может также зависеть от

$$u_i^3 = v^3 \xi_i, \quad u_i^5 = \xi_i^5 \tag{40}$$

и λ_i. Как будет видно из дальнейшего, функция F должна обладать некоторыми свойствами монотонности.

Из (39) находим импульсы системы. Обозначая частные производные по $l, \dot{r}$ и $\dot{q}$ соответствующими индексами, а производную по u_i^a индексом (ai), имеем

$$p = b(F_l l_{\dot{r}} + F_{(ai)} u^a_{i\dot{r}}), \tag{41}$$

$$\pi = b_{\dot{q}} F + b(F_l l_{\dot{q}} + F_{(ai)} u^a_{i\dot{q}}) \tag{42}$$

(по a, i подразумевается суммирование). Дифференцируя инварианты и используя разложение по полной системе векторов

$$\xi_i = \sum_a u_{ai} v^a, \quad a = 0, 1, 2, 3, \quad u_a = g_{aa} u^a, \tag{43}$$

получаем

$$bl_{\dot{r}} = v^0, \quad bu^0_{i\dot{r}} = -l^{-1} u_i^2 v^2, \quad u^1_{i\dot{r}} = 0, \quad bu^2_{i\dot{r}} = -l^{-1} u_i^0 v^2, \tag{44}$$

$$b_{\dot{q}} = -cv^1, \quad bl_{\dot{q}} = -zv^0 + clv^1, \quad bu^0_{i\dot{q}} = cu_i^1 v^0 + l^{-1} z u_i^2 v^2, \tag{45}$$

$$bu^1_{i\dot{q}} = c(u_i^0 v^0 - u_1^2 v^2), \quad bu^2_{i\dot{q}} = (cu_i^1 + l^{-1} z u_i^0) v^2, \tag{46}$$

где

$$c = (-q^2)^{-1/2}, \quad z = \dot{r}_q \dot{q}_q / \dot{q}_q^2. \tag{47}$$

Подставляя эти формулы в (41, 42) и выражая z с помощью условия ортонормированности v^a, получаем

$$p_{(n)} = F_l v^0, \quad \pi_{(n)} = cKv^1, \tag{48}$$

где

$$K = lF_l - F, \tag{49}$$

$$p_{(n)} = p + l^{-1}(F_{(01)}u_i^2 + F_{(2i)}u_i^0)v^2, \tag{50}$$

$$\pi_{(n)} = \tilde{\Pi}^{\mu}_{\nu}\left\{\pi^{\nu} - c[(F_{(0i)}u_i^1 + F_{(1i)}u_i^0)v^{0\nu} + (-F_{(1i)}u_i^2 + F_{(2i)}u_i^1)v^{2\nu}]\right\}, \tag{51}$$

$$\tilde{\Pi}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{p^{\mu}p^{\nu}_{(n)}}{pp_{(n)}}. \tag{52}$$

Заметим, что

$$pp_{(n)} = p^2_{(n)}. \tag{53}$$

В самом деле, из (50) $p_{(n)} = p + \Delta$ и из (48) $p_{(n)}\Delta = 0$.

Возводя равенства (48) в квадрат, получаем

$$p^2_{(n)} = F_l^2(l,u), \quad q^2\pi^2_{(n)} = K^2(l,u). \tag{54}$$

При этом соотношения (48) можно переписать в виде

$$v^0 = p_{(n)}/\sqrt{p^2_{(n)}}, \quad v^1 = \pi_{(n)}/\sqrt{-\pi^2_{(n)}}. \tag{55}$$

Соотношения (54) и (55) и дают в неявном виде третью связь ротатора. В самом деле, первое равенство (54) позволяет выразить l через p^2, спиновые переменные и векторы v^a. Подставляя это значение l во второе равенство (54), получаем связь между p, π, q, спиновыми переменными и v^a. Чтобы выразить v^a через импульсы, координаты и спины, надо воспользоваться равенствами (55) (и выражением (36) для v^2), в правых частях которых векторы v^a надо снова выразить по тем же формулам (55) и т.д. В случае коммутирующих спиновых переменных мы получили бы бесконечную процедуру. Для грассмановых переменных она обрывается после конечного числа шагов.

Таким образом, мы показали, что ротатор имеет три связи, или три обращающиеся в нуль функции канонических переменных (также называемые связями) (теорема I):

$$\varphi_1 = pq, \quad \varphi_2 = \pi q, \tag{56}$$

$$\varphi_3 = \sqrt{q_p^2\pi_1^2} - K, \tag{57}$$

где

$$q_p^{\mu} = \Pi^{\mu\nu}(p)q_{\nu}, \quad \pi_1^{\mu} = \Pi^{\mu\nu}(q_p)\pi_{(n)}. \tag{58}$$

В таком виде мы будем использовать функции φ_i и вне поверхности связей.

Канонический гамильтониан ротатора равен нулю., В самом деле, дифференцируя соотношение симметрии 3 (3) по h и полагая $h = 1$, получаем

$$-p\dot{r} - \pi\dot{q} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}}\dot{\xi} - \mathcal{L} = 0 \tag{59}$$

(правая производная). Но левая часть этого равенства и есть канонический гамильтониан. Поэтому гамильтониан ротатора равен линейной комбинации связей [15,19,22,23]:

$$H = \sum_{i=1,2,3} c_i\varphi_i. \tag{60}$$

Коэффициенты c_1 и c_2 здесь произвольны. Коэффициент же c_3 для соответствия с лагранжианом должен совпадать с $b : c_3 = b$. Чтобы убедиться в этом, достаточно вычислить $\dot{r}_\perp$ с помощью формулы (64) и сравнить с (41).

Действие ротатора, выраженное через гамильтониан, имеет вид

$$A = \int d\tau \left(-p\dot{r} - \pi\dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} \dot{\xi} - H \right). \tag{61}$$

Динамика системы в гамильтоновом подходе (с выражением (29) для $\mathcal{L}_\xi$) определяется скобками Пуассона

$$\{r^\mu, p^\nu\} = -g^{\mu\nu}, \quad \{q^\mu, \pi^\nu\} = -g^{\mu\nu}, \tag{62}$$

$$\{\xi_i^\mu, \xi_i^\nu\} = -ig^{\mu\nu}, \quad \{\xi_i^5, \xi_i^5\} = i \tag{63}$$

(остальные скобки равны нулю), уравнением

$$\dot{Z} = \partial Z/\partial\tau + \{Z, H\}, \tag{64}$$

где Z — любая из динамических переменных, и связями (56),(57), которые полагаются равными нулю после того, как вычислены скобки в (64). Начальные данные ротатора удовлетворяют связям.

Из симметрии ротатора следует, что связи (56),(57) являются связями первого рода [24] и сохраняются. Скобки (63) совпадают со скобками Дирака, получаемыми после исключения связей между ξ_i, ξ_i^5 и сопряженными им импульсами [25,26,22].

Так как лагранжиан (39) не зависит от r, то по теореме Нетер сохраняется импульс p. Сохраняется угловой момент количества движения

$$M^{\mu\nu} = r^{[\mu}p^{\nu]} + q^{[\mu}\pi^{\nu]} + \frac{\partial \mathcal{L}_\xi}{\partial \dot{\xi} j[\mu} \xi_j^{\nu]}. \tag{65}$$

Для лагранжиана (29)

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\xi}{\partial \dot{\xi} j[\mu} \xi_j^{\nu]} = i\xi_j^\mu \xi_j^\nu. \tag{66}$$

Ротатор со спинами обладает дополнительными спиновыми нечетными связями, которые вводятся в лагранжиан с помощью множителей Лагранжа λ_i. Эти связи, разумеется, вытекают и из гамильтониана ротатора (60). Их сохранение следует не из рассмотренной выше симметрии ротатора, а из дополнительной спиновой симметрии (суперсимметрии), которой должна обладать всякая система со спинами 1/2.

Установим вид связи φ_3 для случая, когда лагранжиан содержит спиновую связь, т.е. функция F в лагранжиане имеет вид

$$F(l, u) = F_0(l, u) + F_1(l, u)\lambda, \tag{67}$$

где F_0 не содержит λ. Перепишем формулы (50), (51) в виде

$$p_{(n)} = p_0 + p_1\lambda, \quad \pi_{(n)} = \pi_0 + \pi_1\lambda, \tag{68}$$

где через $p_1\lambda$ и $\pi_i\lambda$ обозначены явные вклады от $F_1\lambda$. Из (50) видно, что p_1 пропорционален v^2. Так как в силу (48) $p_{(n)}$ пропорционален v^0, то p_1 ортогонален $p_{(n)}$ и

$$p_{(n)}^2 = p_0^2 + 2p_0p_1\lambda = p_0^2 + 2(p_{(n)} - p_1\lambda)p_1\lambda = p_0^2 \tag{69}$$

($\lambda^2 = 0$). Для $\pi_{(n)}$ результат аналогичен, хотя рассуждения несколько сложнее. В самом деле, $\pi_{(n)}$ (51) определяется проектором $\tilde{\Pi}$, поэтому члены в π_1, соответствующие $g^{\mu\nu}$ в проекторе, лежат в плоскости v^0, v^2 точно так же, как и члены, пропорциональные p^μ, поскольку в силу (50) и (48) p лежит в этой плоскости. Но в силу (48) $\pi_{(n)}$ пропорцонален v^1, т.е. π_1 ортогонален $\pi_{(n)}$, откуда

$$\pi_{(n)}^2 = \pi_0^2. \tag{70}$$

Первое из равенств (54), позволяющее выразить l, принимает вид

$$F_{0l}(l,u) + F_{1l}(l,u)\lambda = \sqrt{p_0^2}, \tag{71}$$

откуда

$$l = l_0 + l_1\lambda, \tag{72}$$

где

$$F_{0l}(l_0,u) = \sqrt{p_0^2}, \tag{73}$$

$$F_{0ll}(l_0,u)l_1 + F_{1l}(l_0,u) = 0. \tag{74}$$

Функция $K(l,u)$ (49) равна

$$\begin{aligned} K(l,u) = K_0(l,u) + K_1(l,u)\lambda &= K_0(l_0,u) + K_{0l}(l_0,u)l_1\lambda + K_1(l_0,u)\lambda = \\ = K_0(l_0,u) + l_0F_{0ll}(l_0,u)l_1\lambda &+ K_1(l_0,u)\lambda = K_0(l_0,u) - l_0F_{1l}(l_0,u)\lambda + \\ +(l_0F_1(l_0,u) - F_1(l_0,u))\lambda &= K_0(l_0,u) - F_1(l_0,u)\lambda, \end{aligned} \tag{75}$$

где $K_i = lF_{il} - F_i$, $i = 0, 1$. Итак, связь φ_3 (57) имеет вид

$$\varphi_3 = \sqrt{q_p^2\pi_{(n)q_p}^2} - K(l,u) = \sqrt{q_p^2\pi_{0q_p}^2} - K_0(l_0,u) + F_1(l_0,u)\lambda, \tag{76}$$

или

$$\varphi_3 = \varphi_{30}(q,\pi,p,u) + F_1(l_0,u)\lambda. \tag{77}$$

При фиксированных u функция связи φ_3 для лагранжиана (39), (67) получается из функции связи для первого члена в (67) просто добавлением второго члена (67) при значении l_0, определяемом из уравнения для первого члена (73).

Формула (77), показывающая, каким образом из связи φ_3 получаются спиновые связи, составляет содержание теоремы II для ротатора. Условие сохранения спиновых связей ротатора

$$\varphi_{3+i} = \frac{\partial\varphi_3}{\partial\lambda_i}, \tag{78}$$

т.е. равенство нулю их скобки Пуассона с φ_3, налагает определенные ограничения на вид лагранжиана ротатора (спиновая суперсимметрия).

При их выполнении для канонического квантования ротатора нужно заменить координаты (в том числе спиновые) и импульсы на операторы, коммутирующие или антикоммутирующие в соответствии с заменой

$$\{,\} \to \mp i[,]_{\mp}, \tag{79}$$

где верхние знаки соответствуют четным и четному и нечетному элементам, а нижние — нечетным, а операторные связи наложить на волновые функции физических состояний.

Операторы спиновых координат при этом удовлетворяют алгебре Клиффорда и для каждого спина имеют вид [14]

$$\hat{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^5\gamma^\mu, \quad \hat{\xi}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^5, \tag{80}$$

где γ^μ, γ^5 — матрицы Дирака:

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2g^{\mu\nu}, \;\; \gamma^5 = ij^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \gamma_5^2 = 1. \tag{81}$$

Для нескольких спинов они представляются прямыми произведениями на единичные матрицы [13]. Так, для двух спинов

$$\hat{\xi}_1^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^5\gamma^\mu \otimes I, \quad \hat{\xi}_1^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^5 \otimes I, \tag{82}$$

$$\hat{\xi}_2^\mu = I \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^5\gamma^\mu, \quad \hat{\xi}_2^5 = I \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^5. \tag{83}$$

Напомним, что $(A\otimes B)(A'\otimes B') = (AA')\otimes(BB')$, так что операторы разных спинов коммутируют между собой.

Непротиворечивость спиновых связей и гамильтониана в классическом случае гарантируется суперсимметрией гамильтониана. Для квантового ротатора со спинами этого недостаточно: необходимы дальнейшие ограничения на вид взаимодействия. Мы вернемся к этому вопросу в разделе 5.

Можно до квантования наложить калибровочные условия и перейти к частично независимым переменным, исключив часть связей. При этом нужно найти скобки Пуассона для новых переменных. Обычно для этого используется метод Дирака [15,19,22,23] или метод симплектической формы [5,16,17,9]. Существует еще один метод — метод инвариантов, который в применении к ротатору рассмотрен в разделе 5.

Обычно исключают связи φ_1 и φ_2 [5,19,9]. При этом в качестве одной из независимых переменных выбирается спин системы. Это гарантирует релятивистскую инвариантность и отсутствие аномалий при квантовании. Операторное уравнение для связи φ_3 при этом можно записать в виде

$$(\hat{\varphi}_3 + a_0)\psi = 0, \tag{84}$$

где a_0 — константа порядка постоянной Планка. Использование этой возможности при квантовании вводит в теорию феноменологическую константу, которая может улучшить согласие реджевских траекторий с экспериментом в области небольших спинов, где струнное приближение является менее оправданным.

3. Бесспиновый ротатор

Лагранжиан (39) и связь φ_3 (57) в этом случае имеют вид

$$\mathcal{L} = -bF(l), \tag{85}$$

$$\varphi_3 = \sqrt{q_p^2\pi_1^2} - K(l(\sqrt{p^2})), \tag{86}$$

$$K(l) = lF_l(l) - F(l), \tag{87}$$

где l как функция $\sqrt{p^2}$ дается равенством

$$F_l(l) = \sqrt{p^2}. \tag{88}$$

Отсюда видно, что $F_l(l)$ должна быть монотонной функцией. Тогда $K(l)$ тоже монотонная функция, причем их производные одного знака ($l > 0$). Из (48) и (50) видно, что для того, чтобы $p^0 > 0$ и $\dot{r}_\perp^0 > 0$, функция F_l должна быть положительной.

Выберем калибровочные условия

$$p\pi = 0, \;\; q^2 = -1, \tag{89}$$

исключающие связи $\varphi_{1,2}$, и введем независимые переменные q^a и L^a, $a = 1, 2, 3, z^\mu$ и p^μ, такие, что

$$(q^a)^2 = 1, \quad q^aL^a = 0, \tag{90}$$

$$q^\mu = q^a e_a^\mu, \quad \pi^\mu = \epsilon_{abc}L^b q^c e_a^\mu, \quad L^{\mu\nu} = e_a^\mu e_b^\nu \epsilon_{abc}L^c \tag{91}$$

($L^{\mu\nu} = \Pi^\mu_\alpha(p)\Pi^\nu_\beta(p)M^{\alpha\beta}$ — тензор спина, $L_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}n^{0\nu}L^{\rho\sigma}/2 = L^a e_{\mu a}$ — псевдовектор спина (см. формулу (110))) и

$$z^\mu = r^\mu + \frac{1}{2}\epsilon_{abc}e_{a\nu}\frac{\partial e_b^\nu}{\partial p_\mu}L^c, \tag{92}$$

где $e_\alpha(p)$, $\alpha = 0, a$ — тетрада ортонормированных векторов, $e_\alpha e_\beta = g_{\alpha\beta}$ и $e_0 = p/\sqrt{p^2}$. Для нахождения скобок Пуассона введенных переменных можно воспользоваться любым из трех методов — скобок Дирака [15,19,22,23], симплектической формы [5,16,17,9] или методом инвариантов, рассмотренным в разделе 4. В результате получаем гамильтониан и (ненулевые) скобки Пуассона

$$H = b(\sqrt{(L^a)^2} - K(l(\sqrt{p^2})), \tag{93}$$

$$\{p^\mu, z^\nu\} = g^{\mu\nu}, \tag{94}$$

$$\{L^a, L^b\} = \epsilon_{abc} L^c, \quad \{L^a, q^b\} = \epsilon_{abc} q^c. \tag{95}$$

Решая динамические уравнения для z^μ и q^a, получаем для исходных переменных

$$r^\mu = r_0^\mu + ((\partial K/\partial m)/m) V p^\mu, \tag{96}$$

$$q^\mu = q_0^\mu \cos V - \frac{1}{L} L^{\mu\nu} q_{0\nu} \sin V, \tag{97}$$

где r_0^μ и q_0^μ – постоянные, $q_0 p = 0$, $q_0^2 = -1$, $m = \sqrt{p^2}$, $V = \int b d\tau$ и $L = \sqrt{L^{\mu\nu} L_{\mu\nu}/2}$. Центр ротатора равномерно движется с лабораторной скоростью $\vec{p}/p^0$, а сам ротатор равномерно вращается вокруг него в плоскости, перпендекулярной импульсу и псевдовектору спина, с лабораторной угловой частотой $m(p^0 \partial K/\partial m)^{-1}$.

Квантование системы приводит к уравнению для волновой функции

$$(\sqrt{(\hat{L}^a)^2} - K(l(\sqrt{\hat{p}^2})) + a_0)\psi = 0. \tag{98}$$

В представлении, где $\hat{p}^\mu$ и $\hat{q}^a$ диагональны, его решение имеет вид

$$\psi_{\vec{k},L,L^3}(p, q^a) = c\delta(\vec{p} - \vec{k})\delta(p^0 \mp \sqrt{\vec{k}^2 + m_L^2}) Y_{L^3}^L(q^a), \tag{99}$$

где $Y_{L^3}^L(q^a)$ — собственные функции внутреннего момента, $L = 0, 1, 2, ...$ и

$$\sqrt{L(L+1)} - K(l(m_L)) + a_0 = 0 \tag{100}$$

есть реджевская траектория, связывающая спин и массу ротатора.

Для жесткой струны с массами на концах, рассмотренной в разделе 2, $F(l) = G(l)$ (20),

$$F_l(l) = \mu \sum_{i=1,2} (\arctan \epsilon_i + \epsilon_i^{-1}), \tag{101}$$

$$K(l) = \frac{1}{2a} \sum_{i=1,2} (\mu^2 \arctan \epsilon_i + \epsilon_i^3 m_i^2), \tag{102}$$

где

$$\mu = la, \quad \mu_i = l_i a, \quad \epsilon_i = (l_i/\nu_i)^{1/2} = (\mu_i/m_i)^{1/2}, \tag{103}$$

$$\mu_i = \sqrt{\mu^2 + m_i^2/4} - m_i/2. \tag{104}$$

Как показано в [11], соотношения (100)-(102) для $L > 0$ хорошо согласуются с экспериментом и позволяют определить массы кварков m_i.

При этом хорошее согласие для ρ-мезона, имеющего нулевой орбитальный момент кварков, представляется загадочным: модель, казалось бы, не может рассчитывать на его описание. Однако загадка, на наш взгляд, объясняется, если допустить, что для ротатора со спинами, каким является ρ-мезон, имеет место вырождение по орбитальному спину, и траектория зависит от полного спина. В разделе 5 мы увидим, что для ротатора с одним спином такое вырождение с необходимостью имеет место.

4. Метод инвариантов

Для систем со связями, к числу которых мы здесь относим калибровочные условия, будем называть инвариантами такие функции координат и импульсов, заданные на всем фазовом пространстве, которые, во-первых, на поверхности связей совпадают с координатами и импульсами и, во-вторых, скобки Пуассона которых со связями на поверхности связей равны нулю.

Ясно, что в силу симметрии системы, приводящей к связям, инварианты являются теми физическими величинами, которые полностью описывают ее движение. При этом достаточно рассмотреть лишь независимые инварианты.

Зная инварианты, легко найти скобки Пуассона независимых переменных системы. Таким образом, метод инвариантов решает ту же задачу, что и метод скобок Дирака или симплектической формы. Он может показаться несколько искусственным, зато непосредственно ведет к цели и дополняет вышеупомянутые общие методы.

Рассмотрим этот метод на примере бесспинового ротатора. Введем калибровочные условия

$$\chi_{1,2} = 0, \tag{105}$$

исключающие связи $\varphi_{1,2}$, и будем называть поверхность

$$\varphi_i = 0, \quad \chi_i = 0, \quad i = 1, 2 \tag{106}$$

поверхностью связей. Из сохранения (105) должно следовать $c_{1,2} = 0$ в (60) и детерминант, составленный из скобок Пуассона $\varphi_{1,2}, \chi_{1,2}$ друг с другом, должен быть отличен от нуля на поверхности связей.

Рассмотрим, например,

$$\chi_1 = p\pi, \quad \chi_2 = \frac{1}{2}(q^2 + 1). \tag{107}$$

Будем обозначать инварианты, соответствующие координатам и импульсам r, p, q, π, теми же символами с чертой.

В качестве $\bar{r}$ следует взять функцию

$$\bar{r} = r + \frac{1}{p^2}((p\pi)q - (pq)\pi), \tag{108}$$

а $\bar{p}$ совпадает с p:

$$\bar{p} = p. \tag{109}$$

Заметим, что для прямолинейной струны (с массами или без масс) при $pq = 0$ $\bar{r}$ совпадает с центром струны. Для нахождения остальных инвариантов рассмотрим ортонормированные векторы

$$n^0 = \frac{p}{\sqrt{p^2}}, \quad n^1 = \frac{\pi_1}{\sqrt{-\pi_1^2}}, \quad n^2 = [n^0 n^3 n^1], \quad n^3 = \frac{q_p}{\sqrt{-q_p^2}}, \tag{110}$$

$$n^a n^b = g_{ab}, \quad a, b = 0, 12, 3, \tag{111}$$

$(\pi_1 = \pi_{pq_p})$ и псевдовектор орбитального спина

$$L = [pq\pi]/\sqrt{p^2} = \sqrt{q_p^2 \pi_1^2} n^2. \tag{112}$$

Нетрудно проверить, что их скобки Пуассона с $\varphi_{1,2}$ и $\chi_{1,2}$ тождественно равны нулю. Отсюда получаем

$$\bar{q} = n^3, \quad \bar{\pi} = \sqrt{-L^2} n^1. \tag{113}$$

Скобки Пуассона инвариантов без труда вычисляются из их определения. Переходя в результате на поверхность связей, для ненулевых скобок получаем

$$\{\bar{r}_\mu, \bar{r}_\nu\} = (q_\mu \pi_\nu - q_\nu \pi_\mu)/p^2, \quad \{\bar{r}_\mu, p_\nu\} = -q_{\mu\nu}, \tag{114}$$

$$\{\bar{r}_\mu, \bar{q}_\nu\} = q_\mu \pi_\nu / p^2, \quad \{\bar{r}_\mu, L_\nu\} = L_\mu p_\nu / p^2, \tag{115}$$

$$\{\bar{q}_\mu, L_\nu\} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} n^{0\alpha} q^\beta, \quad \{L_\mu, L_\nu\} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} n^{0\alpha} L^\beta. \tag{116}$$

При этом $\bar{\pi} = [n^0 L n^3]$.

Для того, чтобы скобки Пуассона внешних и внутренних переменных были раздельными и чтобы иметь величину со скобками Пуассона координаты, воспользуемся тетрадой ортонормированных векторов $e^\mu_\alpha, \ \alpha = 0, a, \ a = 1, 2, 3$

$$e_0 = n^0, \quad e_\alpha e_\beta = g_{\alpha\beta}, \quad e^\mu_\alpha g_{\alpha\beta} e^\nu_\beta = g^{\mu\nu}, \tag{117}$$

$$p_\nu \partial e^\mu_\alpha / \partial p_\nu = 0, \quad \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} e^\mu_0 e^\nu_a e^\rho_b e^\sigma_c = \epsilon_{abc} \tag{118}$$

(последние равенства имеют место в системе центра инерции и в системе, где $e^\mu_\alpha = g^\mu_\alpha$, соответственно, а поэтому и в любой системе). Отсюда, в частности, следует, что

$$e^\mu_a e^\nu_a = -\Pi^{\mu\nu}(p). \tag{119}$$

Векторы тетрады являются инвариантами относительно рассматриваемых связей. С их помощью введем независимые внутренние инварианты

$$q^a = -e_a \bar{q}, \quad L^a = -e_a L \tag{120}$$

$(\pi^a = -e_a \bar{\pi}, \ \ L^a = \epsilon_{abc} q^b \pi^c)$ и инвариант

$$\begin{aligned} y^\mu &= \frac{1}{2} \epsilon_{abc} e_{a\nu} \frac{\partial e^\nu_b}{\partial p_\mu} L^c = -\frac{\partial q^a}{\partial p_\mu} \pi^a + \frac{1}{p^2} \pi^\mu_{pq_p}(pq) = \\ &= -\frac{\partial e_a q}{\partial p_\mu} e_a \pi + \frac{1}{p^2} \pi^\mu (pq) + ..., \end{aligned} \tag{121}$$

где точками обозначены квадратичные по связям члены, несущественные при вычислении скобок, с помощью которого определяется координата

$$z^\mu = \bar{r}^\mu + y^\mu. \tag{122}$$

Величины z^μ, p^μ, q^a и L^a являются искомыми независимыми инвариантами. Их скобки Пуассона вычисляются непосредственно и приведены в (94),(95).

Сделаем замечание об инвариантах для других калибровок. Помимо ортонормированных векторов n^1 и n^3 можно построить два других ортонормированных вектора

$$\tilde{n}^1 = \sqrt{\pi_p} \Big/ \sqrt{-\pi_p^2}, \quad \tilde{n}^3 = \sqrt{q_1} \Big/ \sqrt{-q_1^2}, \quad q_1 = q_{p\pi_p}. \tag{123}$$

Они лежат в той же плоскости, что и $n^{1,3}$ (ортогональной импульсу и спину) и повернуты относительно $n^{1,3}$ на угол α, где

$$\cos\alpha = -n^1\tilde{n}^1 = -n^3\tilde{n}^3 = (\pi_1^2/\pi_p^2)^{1/2} = (q_1^2/q_p^2)^{1/2}, \quad \sin\alpha = -\pi_p q_p / \sqrt{q_p^2 \pi_p^2}. \tag{124}$$

Эти векторы и L имеют нулевые скобки с π^2. Поэтому для калибровки

$$\chi_2 = \frac{1}{2}(\pi^2 + 1) \tag{125}$$

имеем

$$\bar{q} = \sqrt{-L^2}\tilde{n}^3, \quad \bar{\pi} = \tilde{n}^1 \tag{126}$$

($\bar{r}$ и $\bar{p}$ неизменны). Для калибровки

$$\chi_2 = aq^2 - b\pi^2 \tag{127}$$

($a > 0, b > 0$ — числа) векторы n^1 и n^3 следует повернуть на угол $-\alpha/2$:

$$n^{3'} = n^3 \cos\alpha/2 - n' \sin\alpha/2 = n^3 + \frac{\pi q}{2\sqrt{q^2\pi^2}} n^1 + ..., \tag{128}$$

$$n^{1'} = n^3 \sin\alpha/2 + n^1 \cos\alpha/2 = -\frac{\pi q}{2\sqrt{q^2\pi^2}} n^3 + n^1 + ..., \tag{129}$$

где точками обозначены квадратичные по связям члены. При этом

$$\bar{q} = (-bL^2/a)^{1/4} n^{3'}, \quad \bar{\pi} = (-aL^2/b)^{1/4} n^{1'}, \tag{130}$$

а $\bar{r}$ и $\bar{p}$ неизменны. В частности, при $a = b = 1$ получаем инварианты для калибровки, которая возникает при редукции общей струны к прямолинейной при частных граничных условиях [5].

5. Ротатор с одним спином

Найдем общий вид лагранжиана для ротатора с одним спином. Рассмотрим

$$u^a = v^a \xi, \;\; a = 0, 1, 2, 3, \;\; u^5 = \xi^5, \tag{131}$$

где векторы v^a определены в (36, 37). Тогда u^2 скаляр, а u^a, $a = 0, 1, 3, 5$ — псевдоскаляры. Так как лагранжиан должен быть скаляром и четным элементом, то линейные по u^a члены могут входить в него только в виде $u^a\lambda$, $a \neq 2$ (напомним, что λ — псевдоскаляр). Продолжая подобные рассуждения для членов старших степеней по u^a (из-за их грассманнова характера эта степень не может быть больше пятой), убеждаемся, что общий вид лагранжиана односпинового ротатора (39) определяется функцией

$$F(l,u) = F^0(l) + iF_a(l)u^a\lambda + \frac{i}{2}F_{ab}(l)u^{ab} + \frac{1}{3!}F_{abc}(l)u^{abc}\lambda + \frac{1}{4!}F_{abcd}u^{abcd}, \tag{132}$$

где

$$u^{ab\ldots} = u^a u^b \ldots, \tag{133}$$

и индексы суммирования $a, \ldots d$ пробегают значения $0, 1, 3, 5$ (кроме 2), попарно неравные друг другу. Коэффициенты $F_{ab\ldots}$ полностью антисимметричны по своим индексам. Все коэффициенты F вещественные.

Найдем связь φ_3 для этого лагранжиана. Записывая равенство (50) (для $n = 1$) в виде

$$p_{(1)} = p + p_1 \tag{134}$$

видим, что так как $F_{(2)} = 0, p_1$ пропорционален $u^2 v^2$, т.е.

$$p^2 = (p_{(1)} - p_1)^2 = p_{(1)}^2, \tag{135}$$

поскольку $p_{(1)}$ пропорционален v^0 и $(u^2)^2 = 0$.

Далее, равенство (51) имеет вид

$$\pi_{(1)} = \pi_p - p\frac{p_1\pi}{p^2} - c[(F_{(0)}u^1 + F_{(1)}u^0)p_1 - F_{(1)}u^2 v^2], \tag{136}$$

откуда

$$\pi_{(1)}^2 = \pi_p^2, \tag{137}$$

поскольку разность $\pi_{(1)} - \pi_p$ ортогональна $\pi_{(1)}(\pi_{(1)} \sim v^1,\ \ \pi_{(1)} - \pi_p \sim p, v^2 \sim v^0, v^2)$ и пропорциональна u^2. Заметим, что

$$p_1\pi = 0. \tag{138}$$

Это видно из формул (51): при $F_{(2)} = 0$ вектор v^2 входит π только с коэффициентом u^2.

Таким образом, связь φ_3 (57) имеет вид

$$\varphi_3 = \sqrt{q_p^2\pi_1^2} - K(l,u), \tag{139}$$

$$F_l(l,u) = m, \ \ m = \sqrt{p^2}, \tag{140}$$

где

$$\pi_1^\mu = \pi_{pq_p}^\mu = \Pi_\alpha^\mu(p)\Pi_\nu^\alpha(q_p)\pi^\nu. \tag{141}$$

Уравнение (40) определяет l как функцию m и u^a. В силу тех же соображений, которые привели к формуле (132) для $F(l,u), l(m,u)$ как функция u^a имеет тот же вид, что и F:

$$l(m,u)=l^0(m)+il_a(m)u^a\lambda+\frac{i}{2}l_{ab}(m)u^{ab}+\frac{1}{3!}l_{abc}u^{abc}\lambda+\frac{1}{4!}l_{abcd}u^{abcd}. \tag{142}$$

Перепишем уравнение (140), подставляя в него выражение (132), продифференцированное по l при фиксированных u^a, разлагая его коэффициенты по $l^1=l-l^0$ и удерживая ненулевые члены:

$$\begin{aligned}F_l^0(l^0) &+ F_{ll}^0(l^0)l^1+\frac{1}{2}F_{l^3}^0(l^0)(l^1)^2+\\ +i(F_{al}(l^0) &+ F_{all}(l^0)l^1)u^a\lambda+\frac{i}{2}(F_{abl}(l^0)+F_{abll}(l^0)l^1)u^{ab}+\\ &+ \frac{1}{3!}F_{abcl}(l^0)u^{abc}\lambda+\frac{1}{4!}F_{abcdl}(l^0)u^{abcd}=m.\end{aligned} \tag{143}$$

Отсюда определяются все коэффициенты l^0, l_a и т.д.:

$$F_l^0(l^0)=m, \tag{144}$$

$$F_{ll}^0(l^0)l_a=-F_{al}(l^0), \tag{145}$$

$$F_{ll}^0(l^0)l_{ab}=-F_{abl}(l^0) \tag{146}$$

и т.д. Для однозначного определения l^0 как функции m из уравнения (144) функция $F_l^0(l)$ должна быть монотонной. Явный вид остальных коэффициентов нам не понадобится, так как они выпадают из разложения $K=lm-F$, которое в силу (143) имеет вид

$$\begin{aligned}K=l^0m-[F^0(l^0)+\frac{1}{2}F_{ll}^0(l^0)(l^1)^2+i(F_a(l^0)+F_{al}(l^0)l^1)u^a\lambda+\\ +\frac{i}{2}(F_{ab}(l^0)+F_{abl}(l^0)l^1)u^{ab}+\frac{1}{3!}F_{abc}(l^0)u^{abc}\lambda+\frac{1}{4!}F_{abcd}(l^0)u^{abcd}].\end{aligned} \tag{147}$$

Используя формулы (144)-(146) и подставляя это выражение в (139), получаем

$$\varphi_3=\sqrt{q_p^2\pi_1^2}-K^0(l^0)+iF_a(l^0)u^a\lambda+\frac{i}{2}F_{ab}(l^0)u^{ab}+\frac{1}{3!}V_{abc}(l^0)u^{abc}\lambda+\frac{1}{4!}V_{abcd}(l^0)u^{abcd}, \tag{148}$$

где

$$K^0(l^0)=l^0m-F^0(l^0)=l^0F_l^0(l^0)-F^0(l^0), \tag{149}$$

$$V_{abc}(l^0)=F_{abc}(l^0)+F_{\underline{ab}l}(l^0)F_{\underline{c}l}(l^0)(F_{ll}^0(l^0))^{-1}, \tag{150}$$

$$V_{abcd}(l^0)=F_{abcd}(l^0)+F_{\underline{ab}l}(l^0)F_{\underline{cd}l}(l^0)(F_{ll}^0(l^0))^{-1} \tag{151}$$

и подчеркнутые индексы означают, что по ним проведена антисимметризация:

$$F_{\underline{ab}}F_{\underline{c}}=F_{ab}F_c-F_{cb}F_a-F_{ac}F_b, \tag{152}$$

$$F_{\underline{ab}}F_{\underline{cd}} = F_{ab}F_{cd} - F_{cb}F_{ad} - F_{db}F_{ca}. \qquad (153)$$

(Заметим, что выражение $F_{\underline{ab}}l_{\underline{cd}}$ при $F_{ab} \neq l_{ab}$ содержит шесть членов.)

Формула (148) удовлетворяет теореме II раздела 2, в силу которой члены с λ добавляют к $\varphi_3(\lambda = 0)$ выражение $iF_a(l)u^a\lambda + \frac{1}{3!}F_{abc}(l)u^{abc}\lambda$, где l соответствует $\lambda = 0$, но зависит от u^a. Разложение l дает формулу (148).

Осталось выразить u^a для $a = 0, 1$ через импульсы и координаты. Из (55) и (134) имеем

$$u^0 = v^0\xi = \frac{p_{(1)}\xi}{\sqrt{p_{(1)}^2}} = \frac{(p+p_1)\xi}{\sqrt{p^2}} = \frac{p\xi}{\sqrt{p^2}}, \qquad (154)$$

$$u^1 = v^1\xi = \frac{\pi_{(1)}\xi}{\sqrt{-\pi_{(1)}^2}} = \frac{(\pi_p + \Delta)\xi}{\sqrt{-\pi_p^2}} = \frac{\pi_p\xi}{\sqrt{\pi_p^2}}. \qquad (155)$$

Здесь $\Delta = \pi_{(1)} - \pi_p$ определяется формулами (136) и (138) и равенством $\Delta\xi \sim u^2v^2\xi = (u^2)^2 = 0$. Вне поверхности связей мы будем использовать ортонормированные векторы $n^a, a = 0, 1, 2, 3$ (110). Введем также спиновые псевдоскаляры

$$C^a = n^a\xi, \;\; a = 0, 1, 3, \;\; C^5 = u^5 = \xi^5, \qquad (156)$$

$$C^{ab\dots} = C^aC^b\dots \qquad (157)$$

Функция связи φ_3 односпинового ротатора при этом имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi_3 = \sqrt{q_p^2\pi_1^2} \;\; &- \;\; K^0(l) + iF_a(l)C^a\lambda + \frac{i}{2}F_{ab}(l)C^{ab} + \\ &+ \;\; \frac{1}{3!}V_{abc}(l)C^{abc}\lambda + \frac{1}{4!}V_{abcd}(l)C^{abcd},\end{aligned} \qquad (158)$$

$$K^0(l) = lF_l^0(l) - F^0(l), \quad F_l^0(l) = m, \qquad (159)$$

где зависящие от $l(m)$ коэффициентные функции определяются лагранжианом (132) и формулами (150), (151) и индексы суммирования пробегают значения $0, 1, 3, 5$.

Первый член в правой части (158) представляет собой величину орбитального спина ротатора. Заменим его величиной полного спина, переопределяя коэффициент F_{ab}. Из (65),(66) полный спин ротатора равен

$$J_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p^\nu M^{\rho\sigma}/2m = [n^0q\pi]_\mu + i[n^0\xi\xi]_\mu/2 = L_\mu + S_\mu, \qquad (160)$$

$$\sqrt{-J^2} = \sqrt{q_p^2\pi_1^2} + iC^{31}. \qquad (161)$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\varphi_3 = \sqrt{-J^2} - K^0 + \frac{i}{2}V_{ab}C^{ab} + \frac{1}{4!}V^{abcd}C^{abcd} + \\ +(iF_aC^a + \frac{1}{3!}V_{abc}C^{abc})\lambda,\end{aligned} \qquad (162)$$

$$V_{ab} = F_{ab} + \epsilon_{0ab5}, \qquad (163)$$

где ϵ_{abcd} — полностью антисимметричное выражение, индексы которого пробегают значения $0, 1, 3, 5$ и $\epsilon_{0135} = 1$.

Нетрудно найти, используя (62), (63), скобки Пуассона

$$\{J_\mu, p_\nu\} = 0, \quad \{J_\mu, C^a\} = 0, \quad a = 0, 1, 2, 3, 5, \tag{164}$$

$$\{C^a, C^b\} = -ig_{ab}, \quad a, b = 0, 1, 3, 5, \tag{165}$$

где матрица $g_{ab} = g^{ab}$ диагональна и

$$-g_{00} = g_{11} = g_{33} = g_{55} = -1. \tag{166}$$

Эти формулы позволяют найти условие сохранения спиновой связи ротатора

$$\varphi_4 = iF_aC^a + \frac{1}{6}V_{abc}C^{abc}. \tag{167}$$

Поскольку

$$\{C^a, \varphi_{1,2}\} = 0, \tag{168}$$

то для сохранения φ_4 необходимо и достаточно, чтобы

$$\{\varphi_4, \varphi_3\} = 0, \tag{169}$$

Отсюда получаем пять условий сохранения:

$$F^aF_a = 0, \tag{170}$$

$$F^aV_{ab} = 0, \quad F^aV_{abc} = 0, \tag{171}$$

$$V^a_{\cdot\underline{bc}}V_{a\underline{de}} = 0, \quad F^aV_{abcd} + V^a_{\cdot\underline{bc}}V_{a\underline{d}} = 0, \tag{172}$$

где

$$F^a = g^{ab}F_b. \tag{173}$$

Из условий (171) следует, что

$$V_{ab} = \epsilon_{abcd}F^cX^d, \quad V_{abc} = \epsilon_{abcd}F^dY, \tag{174}$$

где X^d и Y произвольные вещественные функции m. При этом четвертое условие выполняется, и второй член в пятом условии равен нулю, откуда следует, что

$$V_{abcd} = 0. \tag{175}$$

Таким образом, связь φ_3 односпинового ротатора в общем случае имеет вид

$$\varphi_3 = \sqrt{-J^2} - K^0 + \frac{i}{2}\epsilon_{abcd}F^cX^dC^{ab} + (iF_aC^a + \frac{1}{6}\epsilon_{abcd}F^dYC^{abc})\lambda, \tag{176}$$

$$F^aF_a = 0, \tag{177}$$

где индексы a, b, c, d пробегают значения $0, 1, 3, 5$ и K^0, F^a, X^d и Y — заданные функции m.

Заметим, что условия сохранения спиновой связи эквивалентны условию инвариантности φ_3 относительно преобразований суперсимметрии

$$\delta p = 0, \quad \delta J = 0, \quad \delta\lambda = 0, \tag{178}$$

$$\delta C^a = \alpha F^a, \tag{179}$$

где α — грассманнов параметр преобразования.

Перейдем к решению классических уравнений движения. Воспользуемся калибровкой (107) предыдущего раздела. К инвариантам (108),(109), (113) бесспинового случая добавляются инварианты ξ^μ, ξ^5, а также J^μ, S^μ и C^a, $a = 0, 1, 2, 3, 5$. Кроме того, для упрощений обозначений положим произвольный множитель c_3 в гамильтониане (60) равным 1, так что гамильтониан совпадает с φ_3. Разложим все векторы и псевдовекторы, кроме r и p, по векторам тетрады (117), например

$$\xi^\mu = e^\mu_\alpha \xi^\alpha, \quad \alpha = 0, a, \quad a = 1, 2, 3, \tag{180}$$

и будем использовать для ξ^a обычные обозначения трехмерных векторов: $\{\xi^a\} = \vec{\xi}$. При этом для полного спина (160) имеем

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = [\vec{q}, \vec{\pi}] + i[\vec{\xi}, \vec{\xi}]/2. \tag{181}$$

Симплектическая форма

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{ab} dy^a \wedge dy^b, \tag{182}$$

где ω_{ab} — обратная матрица по отношению к матрице скобок Пуассона $\omega^{ab} = \{y^a, y^b, \}$, в нашем случае (62), (63) имеет вид

$$\omega = dr^\nu \wedge dp_\nu + dq^\nu \wedge d\pi_\nu + \frac{i}{2} d\xi^\nu \wedge d\xi_\nu - \frac{i}{2} d\xi^5 \wedge d\xi_5 \tag{183}$$

(в нашем случае, очевидно, $\omega_{ab} = -\omega^{ab}$). Подставляя сюда тетрадные разложения по независимым на поверхности связей переменным, получаем

$$\omega = dz^\nu \wedge dp_\nu + d\vec{\pi} \wedge d\vec{q} + \frac{i}{2} d\xi^0 \wedge d\xi^0 - \frac{i}{2} d\vec{\xi} \wedge d\vec{\xi} - \frac{i}{2} d\xi^5 \wedge d\xi^5, \tag{184}$$

где

$$z^\nu = r^\nu + \frac{1}{2}\epsilon_{abc} e^\mu_a \frac{\partial e_{b\mu}}{\partial p_\nu} J^c - \frac{i}{p^2}(p\xi)\xi^\nu. \tag{185}$$

Для записи z^ν в виде инварианта надо в (185) r^ν заменить на $\bar{r}^\nu$ (108). Скобки Пуассона независимых переменных $z^\nu, p^\mu, \vec{q}, \vec{L}$ и ξ^α вытекают из (184) или из формул для инвариантов. Ненулевые скобки имеют вид (94), (95) и

$$\{\xi^A, \xi^B\} = -ig_{AB}, \tag{186}$$

где $A = \alpha, 5$ и $g_{55} = -1$. Справедливы также скобки (164), (165), а также

$$\{J^a, A^b\} = \epsilon_{abc}A^c, \ \ \{L^a, S^b\} = 0, \tag{187}$$

где $A = J, L, S, q, \pi$ или ξ. Инвариант координаты (185) теперь зависит от полного спина и ξ, однако по-прежнему $zp = rp$.

Перейдем к решению классических уравнений движения. Перепишем гамильтониан в виде

$$H = \sqrt{-J^2} - K^0 + \frac{i}{2}(CCFX) + (i(FC) - \frac{Y}{6}(FCCC))\lambda, \tag{188}$$

где введены обозначения

$$(FC) = F_aC^a, \quad (FX) = F_aX^a, \quad [CFX]_a = \epsilon_{abcd}C^bF^cX^d, (CCFX) = (C[CFX]), \tag{189}$$

и набор величин $F_a, a = 0, 1, 3, 5$ (мы будем называть такие наборы векторами), удовлетворяет условию

$$F^2 = (FF) = 0. \tag{190}$$

Начальные данные, а потому и решения динамических уравнений удовлетворяют связям

$$i(FC) - \frac{1}{6}Y(FCCC) = 0, \tag{191}$$

$$\sqrt{-J^2} - K^0 + \frac{i}{2}(CCFX) = 0. \tag{192}$$

Здесь и в дальнейшем полезны следующие тождества. Если

$$(CF) = 0, \ \ (AF) = 0, \ \ (BF) = 0, \tag{193}$$

то векторы $[CCC], [CCA]$ и $[CAB]$ параллельны F:

$$[CCC] = F([CCC]_a/F_a), \tag{194}$$

$$[CCA] = F([CCA]_a/F_a), \tag{195}$$

$$[CAB] = F([CAB]_a/F_a), \tag{196}$$

где справа a — любое фиксированное, для которого $F_a \neq 0$. Соотношения (191),(192) при этом принимают вид

$$(FC) = 0, \tag{197}$$

$$\frac{i}{2F^a}[FCC]^a = \frac{1}{(FX)}(\sqrt{-J^2} - K^0), \ \ (FX) \neq 0. \tag{198}$$

Первое из них линейно и не зависит от Y. Левую часть второго можно переписать в виде

$$\frac{i}{2F^a}[FCC]^a = \frac{i}{F_5}(F_0C^3C^1 + F_1C^3C^0 + F_3C^0C^1), \tag{199}$$

где $iC^3C^1 = \sqrt{-J^2} - \sqrt{-L^2} = -(LS)/\sqrt{-J^2}$, а остальные члены пропорциональны другим сверткам спинового тензора $iC^3C^0 = q_\mu S^{\mu\nu}p_\nu/m$, $iC^0C^1 = p_\mu S^{\mu\nu}\pi_\nu/(m\sqrt{-J^2})$.

В классической грассманновой механике представляется разумным рассматривать такие начальные условия, при которых сохраняющиеся четные величины принимают лишь числовые значения. Будем называть их физическими. Физические условия для ротатора означают

$$\frac{1}{F^a}[FCC]^a = 0, \quad (FX) \neq 0. \tag{200}$$

Можно показать, что в этом случае

$$C^aC^bC^c = 0, \quad a, b, c, = 0, 1, 3, 5. \tag{201}$$

При этом соотношение (198) приводит к вырожденной реджевской траектории

$$\sqrt{-J^2} - K^0 = 0. \tag{202}$$

Мы увидим, что в квантовой механике реализуется именно этот случай.

Если взаимодействие таково, что $(FX) = 0$, то соотношение (198) сводится к (202) без каких-либо ограничений на начальные условия.

Уравнение движения для вектора $C(\tau)$ и его решение с начальным условием (197) имеет вид ($C(0) = \overset{\circ}{C}$):

$$\dot{C} = [CFX] + (F - \frac{i}{2}Y[FCC])\lambda, \tag{203}$$

$$C(\tau) = \overset{\circ}{C} + (F - \frac{i}{2}Y[F\overset{\circ}{C}\overset{\circ}{C}])\lambda\tau + [\overset{\circ}{C}FX]\frac{\sin\omega\tau}{\omega} + [[\overset{\circ}{C}FX]FX]\frac{1-\cos\omega\tau}{\omega^2}, \tag{204}$$

$$\omega^2 = (FX)^2 - F^2X^2. \tag{205}$$

Вектор C равномерно вращается с угловой частотой ω в плоскости, ортогональной F и X, и равномерно растет в направлении F (см. формулу (195)). Мы видим, что роль нелинейного члена с Y сводится лишь к тому, что он изменяет скорость роста в этом направлении. Для физических начальных данных это изменение отсутствует.

Решение (204) соответствует лагранжианам, для которых $\omega \neq 0$. Нетрудно найти решение и для $\omega = 0$. Для $\omega = 0, F^2 = 0$ (при этом $(FX) = 0$ и $X^2 \leq 0$)

$$C(\tau) = \overset{\circ}{C} + ([\overset{\circ}{C}FX] + (F - \frac{i}{2}Y[F\overset{\circ}{C}\overset{\circ}{C}])\lambda)\tau. \tag{206}$$

При $(FX) = 0$ в силу (196) вектор $[\overset{\circ}{C}FX]$ параллелен F, так что рост C происходит по-прежнему в направлении F, однако скорость этого роста теперь зависит и от X.

Перейдем к рассмотрению переменных $n^a, a = 1, 2, 3$ и L (110)-(112). Нам понадобятся их скобки Пуассона друг с другом, которые, в силу инвариантного характера этих величин, можно вычислять с помощью (62) из их определения. Ненулевые скобки равны

$$\{n^1_\mu, n^3_\nu\} = -a n^2_\mu n^2_\nu, \;\; a = (-L^2)^{-1/2}, \tag{207}$$

$$\{n^2_\mu, n^2_\nu\} = a(n^3_\mu n^1_\nu - n^3_\nu n^1_\mu), \tag{208}$$

$$\{n^2_\mu, n^1_\nu\} = -a n^3_\mu n^2_\nu, \;\; \{n^2_\mu, n^3_\nu\} = a n^1_\mu n^2_\nu, \tag{209}$$

$$\{A_\mu, L_\nu\} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} n^{0\alpha} A^\beta, \quad A = n^a (a = 1, 2, 3), L. \tag{210}$$

Для дальнейшего важна величина

$$a_\mu = \frac{n^2_\mu C^2}{\sqrt{-L^2}}. \tag{211}$$

С помощью (209), (210) и (63) можно показать, что

$$\{a_\mu, C^b\} = 0, \;\; b = 0, 1, 3, 5, \tag{212}$$

$$\{a_\mu, \sqrt{-J^2}\} = \frac{1}{\sqrt{-J^2}}[n^0 J a]_\mu. \tag{213}$$

Из гамильтониана (188) при этом следует, что продольная по отношению J часть a, (aJ), сохраняется. Покажем, что поперечная часть a равна нулю. Имеем

$$a_\mu = \frac{1}{\sqrt{-L^2}}(J_\mu - S_\mu)\frac{C^2}{\sqrt{-L^2}}. \tag{214}$$

Разлагая ξ по векторам n^a, представим спиновый спин (160) в виде

$$S = i(n^3 C^1 C^2 - n^2 C^1 C^3 + n^1 C^2 C^3). \tag{215}$$

Подставляя это выражение и

$$\sqrt{-L^2} = \sqrt{-J^2} + i C^1 C^3 \tag{216}$$

в (214), получаем

$$a^\mu = \gamma N^\mu, \quad N^\mu = \frac{J^\mu}{\sqrt{-J^2}}, \quad \gamma = -aN = \frac{C^2}{\sqrt{-L^2}}. \tag{217}$$

Таким образом, a^μ и γ являются константами движения. Отсюда, в частности, следует, что

$$C^2 = \gamma(\sqrt{-J^2} + i C^1 C^3), \tag{218}$$

т.е., поскольку C^1 и C^3 найдены, то зависимость $C^2(\tau)$ от τ известна.

Заметим, что из (211) и (217) следует, что

$$\gamma N = \gamma n^2, \quad \gamma N n^1 = \gamma N n^3 = 0, \quad \gamma N n^2 = -\gamma. \tag{219}$$

Теперь мы можем найти n^a. Из (188), (64) и уравнения для $\dot{C}^3$ (203) получаем

$$\dot{n}^1 = [n^0 N n^1] + ia\dot{C}^3, \tag{220}$$

где a дается формулами (217). Решение этого уравнения имеет вид

$$n^1(\tau) = \overset{\circ}{n}{}^1_N \cos\tau + [n^0 N \overset{\circ}{n}{}^1] \sin\tau - N((\overset{\circ}{n}{}^1 N) - i\gamma(C^3(\tau) - \overset{\circ}{C}{}^3)), \tag{221}$$

где N — единичный вектор в направлении полного спина (217) и $n_N = n + N(nN)$. Мы видим, что поперечная к N компонента n^1 вращается с единичной частотой, а продольная пропорциональна $C^3(\tau)$, т.е. линейно растет с τ и колеблется с частотой ω.

Уравнение и решение для n^3 получается из (220), (221) заменой $1 \rightleftarrows 3$ и $i \to -i$. Зная n^1 и n^3, находим

$$\begin{aligned} n^2 &= [n^0 n^3 n^1] = \overset{\circ}{n}{}^2_N \cos\tau + [n^0 N \overset{\circ}{n}{}^2] \sin\tau - N(\overset{\circ}{n}{}^2 N) + \\ &+ n^3 i\gamma(C^1 - \overset{\circ}{C}{}^1) - n^1\gamma(C^3 - \overset{\circ}{C}{}^3). \end{aligned} \tag{222}$$

Это выражение удовлетворяет уравнению движения

$$\dot{n}^2 = [n^0 N n^2] + n^3 i\gamma \dot{C}^1 - n^1 i\gamma \dot{C}^3. \tag{223}$$

Благодаря равенствам (219) и $\gamma^2 = 0$, в (222) и (223) можно заменить

$$n^3 \to \overset{\circ}{n}{}^3 \cos\tau + \overset{\circ}{n}{}^1 \sin\tau, \quad n^1 \to \overset{\circ}{n}{}^1 \cos\tau - \overset{\circ}{n}{}^3 \sin\tau. \tag{224}$$

Наконец, орбитальный момент равен

$$L = (\sqrt{-\overset{\circ}{L}{}^2} + i(C^1C^3 - \overset{\circ}{C}{}^1 \overset{\circ}{C}{}^3))n^2. \tag{225}$$

Он удовлетворяет уравнению

$$\dot{L} = [n^0 N L] - i(n^2C^3 - n^3C^2)\dot{C}^1 - i(n^1C^2 - n^2C^1)\dot{C}^3. \tag{226}$$

Зная C^a и n^a, мы знаем $\xi^\mu = \sum_{a=0}^3 g_{aa} C^a n^a$ и $\xi^5 = C^5$.

Осталось рассмотреть внешнюю координату z^μ. Гамильтониан (188) приводит к уравнению движения

$$\dot{z}(\tau) = n^0[K^{0'} - \frac{i}{2}(CC[FX]') - i(F'C)\lambda], \tag{227}$$

где штрихом обозначена производная по m и $n^0 = p/m$. При получении этого уравнения мы воспользовались равенствами $\{z_\mu, C^a\} = 0, \quad a = 0, 1, 3, 5,$ и равенством (194), поскольку в силу (190)

$$(F'F) = 0. \tag{228}$$

Не зависящий от τ член $(CCFX')$ для физических начальных данных (200) равен нулю.

Подставим в (227) найденное решение для C (204) и проинтегрируем. Введем обозначения

$$(\overset{\circ}{C}\, F') = a, \ \ (\overset{\circ}{C}\, FF'X) = b \tag{229}$$

и воспользуемся равенствами (230)

$$[F\, \overset{\circ}{C}\overset{\circ}{C}]f = 0, \quad f = a, b, \tag{230}$$

$$(\overset{\circ}{C}\, X)ab = (FX)\frac{1}{2}(\overset{\circ}{C}\overset{\circ}{C}\, F'X)a = -(FX)^2F'^2\frac{1}{3!}([CCC])_a/F_a), \tag{231}$$

$$(\overset{\circ}{C}\overset{\circ}{C}\, F'X)b = 0. \tag{232}$$

Получаем

$$z(\tau) = \overset{\circ}{z} + n^0K^{0'}(\tau - k(\tau)), \tag{233}$$

$$\begin{aligned} k(\tau) \ &= \ \frac{i}{K^{0'}}\Bigg\{\frac{1}{2}(\overset{\circ}{C}\overset{\circ}{C}\, [FX]')\tau + (FX)(\overset{\circ}{C}\, X)\left(a\frac{1-cos\omega\tau}{\omega^2} + b\frac{1}{\omega^2}(\tau - \frac{\sin\omega\tau}{\omega})\right) + \\ &+ \ \ (a\cos\omega\tau + b\frac{\sin\omega\tau}{\omega})\lambda\tau\Bigg\}. \end{aligned} \tag{234}$$

Отсюда прежде всего видим, что компоненты z, ортогональные импульсу, сохраняются.

Введем лабораторное время

$$t = z^0 - \overset{\circ}{z}{}^0 = \frac{p^0}{m}K^{0'}(\tau - k(\tau)). \tag{235}$$

Отсюда и из (233)

$$\vec{z} = \overset{\circ}{\vec{z}} + \frac{\vec{p}}{p^0}t, \tag{236}$$

т.е. ротатор равномерно движется в лаборатории вдоль импульса.

Лабораторное время не является монотонной функцией τ. Для обычных переменных это означало бы невозможность однозначно выразить τ через t. В данном же случае, обозначив

$$T = \omega_0 t, \ \ \omega_0 = \frac{m}{p^0K^{0'}}, \tag{237}$$

из (235) имеем

$$\begin{aligned} \tau \ \ &= T + k(\tau) = T + k(T + k(\tau)) = \\ &= \ T + k(T) + \dot{k}(T)k(\tau) + \frac{1}{2}\ddot{k}(T)k^2(\tau) + ... = \\ &= \ T + k(T) + \dot{k}(T)k(T), \end{aligned} \tag{238}$$

поскольку все остальные члены обращаются в нуль, так как содержат либо λ^2, либо четыре множителя C^a, из которых ввиду (197) только три независимы. Из (234), (231) и (232)

$$\frac{1}{2}k^2(T) = \Lambda f(T), \tag{239}$$

$$\Lambda = \frac{1}{3!}\frac{[\overset{\circ}{C}\overset{\circ}{C}\overset{\circ}{C}]_a}{F_a}\lambda\frac{(FX)F'^2}{(K^{0'})^2}, \tag{240}$$

$$f(T) = T\frac{\sin\omega T}{\omega}, \tag{241}$$

$$\dot{k}(T)k(T) = \Lambda\dot{f}(T). \tag{242}$$

С помощью этих формул можно найти зависимость всех динамических переменных от лабораторного времени. Так, подставляя (238), (239) и (242) в (221), получаем для поперечной к полному спину части n^1

$$\begin{aligned} n^1_N &= n\cos T + m\sin T + k(T)(-n\sin T + m\cos T) + \\ &+ \Lambda(-n(\dot{f}\sin T + f\cos T) + m(\dot{f}\cos T - f\sin T)), \end{aligned} \tag{243}$$

где

$$n = \overset{\circ}{n}{}^1_N, \quad m = [n^0 N\ \overset{\circ}{n}{}^1]. \tag{244}$$

Мы видели, что как функция τ этот вектор совершал простое вращение в плоскости. Однако τ — это супервремя. Как функция лабораторного времени n^1_N совершает движение в суперпространстве. Его числовая часть вращается в плоскости, ортогональной полному спину, с частотой ω_0 (237).

Его компоненты в суперпространстве, соответствующие k, вращаясь со сдвигом на четверть волны с той же частотой, растут или осциллируют по величине с частотой $\omega\omega_0$, а компонента, соответствующая Λ (она отсутствует для физических начальных данных), совершает значительно более сложное движение, как это видно из (243).

Перейдем к квантованию ротатора. В классической теории мы пользовались различными, в том числе зависимыми, переменными. Теперь прежде всего необходимо фиксировать набор независимых (в рассматриваемой калибровке) переменных. Выберем в качестве независимых

$$z^\mu, p^\nu, \vec{q}, \vec{L}, \xi^\alpha, \xi^5, \tag{245}$$

скобки Пуассона которых даются формулами (94), (95) и (186). Переходя к операторам в соответствии с заменой (79), получаем (для ненулевых коммутаторов)

$$[\hat{z}^\mu, \hat{p}^\nu] = -ig^{\mu\nu}, \quad [\hat{L}^a, \hat{q}^b] = i\epsilon_{abc}\hat{q}^c, \quad [\hat{L}^a, \hat{L}^b] = i\epsilon_{abc}\hat{L}^c, \tag{246}$$

$$\hat{\vec{q}}^2 = 1, \quad \hat{\vec{q}}\hat{\vec{L}} = 0, \tag{247}$$

а переменные ξ удовлетворяют алгебре Клиффорда и даются формулами (80), (81). При этом спиновый и полный спин

$$\hat{\vec{S}} = \frac{i}{2}[\hat{\vec{\xi}}, \hat{\vec{\xi}}] = \frac{1}{4i}[\vec{\gamma}, \vec{\gamma}], \tag{248}$$

$$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}} \tag{249}$$

удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям.

Связи φ_3 и φ_4 становятся операторами, обращающими в нуль волновые функции физических состояний. В них входит оператор $\hat{C}^1 = -\hat{\vec{n}}^1\hat{\vec{\xi}}$, где оператор $\hat{\vec{n}}^1$ соответствует зависимой величине и требует квантового определения. Однако, как бы мы ни выбирали порядок операторов в его определении, невозможно получить соотношение $[\hat{C}^1, \hat{C}^3]_+ = 0$. Но для того, чтобы квантовое уравнение спиновой связи (уравнение Дирака)

$$\hat{\varphi}_4\psi = 0 \tag{250}$$

(формулы (167), (174)) при $F^2 = 0$ было непротиворечивым (т.е. чтобы обращался в нуль его детерминант) необходимо, чтобы входящие в него операторы удовлетворяли соотношению

$$[\hat{C}^a, \hat{C}^b]_+ = -g^{ab}. \tag{251}$$

Для этого должно быть

$$F_1 = 0, Y = 0, \quad \text{или} \quad F_3 = 0, Y = 0. \tag{252}$$

Для того, чтобы квантовое уравнение симметрийной связи ротатора

$$\hat{\varphi}_3\psi = 0 \tag{253}$$

(формула (176)) не противоречило уравнению (250), необходимо, чтобы оператор $\hat{\varphi}_3$ коммутировал с $\hat{\varphi}_4$. Для первого из условий (252) это означает

$$F^{\underline{3}}X^{\underline{5}} = F^{\underline{0}}X^{\underline{5}} = F^{\underline{0}}X^{\underline{3}} = 0. \tag{254}$$

При этом

$$\frac{1}{2}(\hat{C}\hat{C}FX) = \frac{X^1}{F^5}(\hat{C}^0F^3 - \hat{C}^3F^0)\hat{\varphi}_4, \tag{255}$$

т.е. на физических состояниях этот оператор обращается в нуль. То же самое имеет место и для второго из условий (252). Таким образом, для квантового осциллятора имеем уравнения

$$(F\hat{C})\psi = 0, \tag{256}$$

$$(\sqrt{\hat{\vec{J}}^2} - K^0)\psi = 0, \tag{257}$$

$$F^2 = 0, F_1 = 0 \quad (\text{или} \quad F_3 = 0). \tag{258}$$

Разумеется, при переходе к квантовым операторам можно ввести константы порядка постоянной Планка, как это сделано в формуле (84). В представлении, где $\hat{p}$ и $\hat{\vec{q}}$ диагональны, решение уравнений (256), (257) имеет вид

$$\psi_{\vec{k}JJ^3LS^3}(p,\vec{q}) = N\delta(\vec{p}-\vec{k})\delta(p^0 \pm \sqrt{\vec{k}^2+m_J^2})\cdot$$
$$\cdot\begin{pmatrix} (F_0-F_5)\psi_\pm(\vec{q}) \\ F_3(\vec{q}\vec{\sigma})\psi_\pm(\vec{q}) \end{pmatrix}, \tag{259}$$

где $L = L_\pm = J \pm 1/2, L = 0,1,2,..., J > 0, J^3 = -J,...J, S^3 = \pm 1/2$ и $\psi_\pm$ удовлетворяют уравнениям

$$\hat{\vec{J}}^2\psi_\pm = J(J+1)\psi_\pm,\quad \hat{\vec{L}}^2\psi_\pm = L(L_\pm+1)\psi_\pm, \tag{260}$$

$$\hat{A}^3\psi_\pm = A^3\psi_\pm,\quad \text{где}\quad A = J,L,S,\quad J^3 = L^3+S^3, \tag{261}$$

$$\vec{J} = \vec{J}+\vec{S},\quad \vec{L} = -i[\vec{q},\frac{\partial}{\partial\vec{q}}],\quad \vec{q}^2 = 1,\quad \vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}. \tag{262}$$

Как обычно, редуцированный на сферу $x = \cos\varphi\cos\theta,\quad y = \sin\varphi\sin\theta,\quad z = \cos\theta$ градиент $\partial/\partial\vec{q}$ имеет компоненты

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{263}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial}{\partial z} = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}. \tag{264}$$

При этом [27]

$$(\vec{q}\vec{\sigma})\psi_\pm = -\psi_\mp. \tag{265}$$

Масса и полный спин связаны соотношением

$$\sqrt{J(J+1)} = K^0(l(m_J)),\quad J = \frac{1}{2},\frac{3}{2},... \tag{266}$$

Решение в случае $F_3 = 0$ полностью аналогично. Выбирая представление, где диагонален $\hat{\vec{n}}^1$, получаем формулы (259)-(264) с заменой $F_3 \to F_1,\ \ \vec{q} - \vec{n}^1$.

Проиллюстрируем сказанное на одной из возможных реализаций $\hat{\vec{n}}^1$:

$$\hat{\vec{n}}^1 = [\hat{\vec{L}}\hat{\vec{q}}]L^{-1},\quad L = (\hat{\vec{L}}^2)^{1/2}. \tag{267}$$

При этом, вычисляя

$$(\vec{\sigma}\hat{\vec{q}})(\vec{\sigma}\hat{\vec{n}}^1) = i(2+(\vec{L}\vec{\sigma}))L^{-1} = i(\vec{J}^2-\vec{L}^2+5/4)L^{-1}, \tag{268}$$

и используя (263), нетрудно показать, что

$$(\hat{\vec{n}}^1\vec{\sigma})\psi_+ = i\frac{J-1/2}{\sqrt{(J+1/2)(J+3/2)}}\psi_- \tag{269}$$

$$(\hat{\vec{n}}^1\vec{\sigma})\psi_- = -i\frac{J+3/2}{\sqrt{J^2-1/4}}\psi_+. \tag{270}$$

Будем искать решение уравнения Дирака

$$(F\hat{C})\psi = 0 \tag{271}$$

в виде

$$\psi = \begin{pmatrix} A_+\psi_+ + A_-\psi_- \\ B_+\psi_+ + B_-\psi_- \end{pmatrix} \tag{272}$$

где $\psi_\pm$ — двумерные спиноры, удовлетворяющие (260)-(263), (267), (268). Получаем две пары однородных уравнений для A_+, B_- и A_-, B_+, определитель каждой из которых равен

$$F_1\left[\left(\frac{[(J+3/2)(J-1/2)]^{1/2}}{J+1/2}-1\right)F_1 - i\left(\frac{J+3/2}{\sqrt{J^2-1/4}}-\frac{J-1/2}{\sqrt{(J+1/2)(J+3/2)}}\right)F_3\right]. \tag{273}$$

Он равен 0 лишь при $F_1 = 0$. Дело в квантовых добавках $\pm 1/2, 3/2$ к полному моменту: если бы ими можно было пренебречь, определитель был бы нулем при всех F_1. При других реализациях $\hat{\vec{n}}^1$ квантовые добавки в (271) видоизменяются, но никогда не обращаются в нуль.

В заключение этого раздела заметим, что лагранжиан простого односпинового ротатора, приведенный в разделе 1, соответствующий жесткой прямолинейной струне с массивными частицами на концах, одна из которых имеет спин 1/2 [15,16,21], должен быть видоизменен для сохранения спиновой связи. Простейшее изменение состоит в добавлении к нему члена $-biu^3u^1$ (см.(9), (28), (40)). Интересно рассмотреть возможность происхождения этого члена из лагранжиана струны, которая для этого должна быть фермионной. Не исключено, что для описания струны со спинами на концах нужно привлекать как прикрепленные (к концам), так и распределенные (вдоль струны) спины.

Заключение

Итак, в суперпространстве построена классическая гамильтонова динамика ротатора со спинами, основанная на ротаторной симметрии (т.е. явной лоренцевской симметрии протяженного ротатора) и спиновой суперсимметрии (т.е. сохранении спиновой связи). При квантовании совместность соотношений симметрии накладывает ограничения на вид взаимодействия. При этом реджевская траектория квантового односпинового ротатора оказывается вырожденной по орбитальному спину. В классической теории это вырождение имеет место при естественном ограничении на начальные значения грассмановых переменных (физические начальные условия грассмановой механики).

Подобное вырождение для двуспинового ротатора объяснило бы хорошее согласие с экспериментом модели прямолинейной жесткой струны с точечными массивными бесспиновыми частицами на концах. Ротатор с двумя спинами предполагается рассмотреть в последующей публикации.

Автор благодарен А.В.Разумову за полезные дисскусии и участникам семинара ОТФ ИФВЭ и международных семинаров ОИЯИ в Алуште и ИФВЭ в Протвино за обсуждение результатов этой работы.

Список литературы

[1] Artru X. // Phys.Rep. 1983, vol.97C, No.2,3, p.147-171.

[2] Пронько Г.П., Разумов А.В., Соловьев Л.Д. // ЭЧАЯ, 1983, т.14, No.3, с.558.

[3] Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Модель релятивистской струны в физике адронов. — М.: Энергоатомиздат, 1987.

[4] Пронько Г.П., Разумов А.В. // ТМФ. 1983. Т.56, с.192.

[5] Бородулин В.И., Зорин О.Л., Пронько Г.П., Разумов А.В., Соловьев Л.Д. // ТМФ. 1985, Т.65, с.119.

[6] Pron'ko G.P. // Rev.Math.Phys. 1990, vol.2, No.3, p.355.

[7] Никитин И.Н. – Preprint IHEP 92-74, Protvino 1992; // ЯФ, 1993, т.56, No.9, с.230; ТМФ (в печати).

[8] Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн, т.1. — М.: Мир, 1990.

[9] Соловьев Л.Д. // ТМФ, 1996, т.106, No.2, с.209.

[10] Soloviev L.D. – In: "Quanta Relativity Gravitation", Proceedings of the XVIII Workshop on High Energy Physics and Field Theory (Protvino, 1995). — Protvino, 1996, p. 328.

[11] Barbashov B.M. – Preprint JINR E2-94-444, Dubna 1994; in: Proc. of the Conference "Strong Interactions at Long Distances", Ed.L.Jenkovsky, Hadronic Press, 1995, p.257.

[12] Батунин А.В., Зорин О.Л. – Препринт ИФВЭ 89-87, Серпухов, 1989.

[13] Berdnikov E.B., Nanobashvili G.G., Pron'ko G.P. // Int.J.Mod.Phys. A1993, vol.8, No.14, p.2447; N15, p.2551.

[14] Berezin F.A., Marinov M.S. // Ann. of Phys. 1977, vol.104, p.336.

[15] Дирак П. Лекции по квантовой механике. — М.: Мир, 1968.

[16] Razumov A.V. Preprint IHEP 84-86, Serpukhov, 1984.

[17] Plyushchay M.S., Razumov A.V. // Int. J.Mod.Phys. A1996, vol.11, No.8, p.1427.

[18] Brink L., Deser S., Zumino B., Di Vecchia P., Howe P. // PL, 1976, vol.64B, No.4, p.435.

[19] Разумов А.В., Соловьев Л.Д. – Препринты ИФВЭ 86-212; 86-213, 86-214, Серпухов, 1986.

[20] Пронько Г.П., Разумов А.В., Соловьев Л.Д. – Препринт ИФВЭ 85-74, Серпухов, 1985.

[21] Soloviev L.D. – Preprint IHEP 95-49, Protvino, 1995.

[22] Гитман Д.М., Тютин И.В. Каноническое квантование полей со связямию – М.: Наука, 1986.

[23] Sundermeyer K., Constrained Dynamics. Lecture Notes in Physics, 169, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1982.

[24] Pyatov P.N., Razumov A.V. // Int.J.Mod.Phys., 1989, vol.A4, No.13, p.3211.
Nirov Kh.S., Pyatov P.N., Razumov A.V. // Int.J.Mod.Phys. 1992, vol.A7, N22, p.5549.

[25] Casalbuoni R. // Nuovo Cim., 1976, vol. 33A, No.3, p.389.

[26] Martin J.L. // Proc. Roy.Soc.1959, vol.A251, p.536.

[27] Ахиезер А.И., Берестецкий Б.Б. Квантовая электродинамика. – М.: Наука, 1969, с.122.

Рукопись поступила 2 сентября 1996 г.

Л.Д. Соловьев.
Квантование релятивистского ротатора с массами и спинами.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы LaTeX.
Редактор Н.В.Ежела. Оригинал-макет подготовлен И.Филимоновой.

Подписано к печати 4.09.96. Формат $60 \times 84/8$.
Офсетная печать. Печ.л. 4,1. Уч.-изд.л. 3,06. Тираж 270. Заказ 734.
Индекс 3649. ЛР №020498 17.04.97.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 96–67, И Ф В Э, 1996