ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 96-86
ОТФ

В.О.Соловьев

О РАЗЛИЧИИ МЕЖДУ ДОПУСТИМЫМИ И “ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ” ГАМИЛЬТОНИАНАМИ

Протвино 1996

УДК 539.1.01 М–24

Аннотация

Соловьев В.О. О различии между допустимыми и "дифференцируемыми" гамильтонианами: Препринт ИФВЭ 96-86. – Протвино, 1996. – 9 с., библиогр.: 22.

Показано, что критерий Редже-Тейтельбойма, однозначно фиксирующий поверхностные члены в гамильтониане так, чтобы они были совместимы со свободными граничными условиями, нуждается в пересмотре в случае неканонической пуассоновой структуры. Новый критерий требует компенсации граничного вклада в гамильтоновы уравнения движения. В то же время, подобные вклады в вариацию гамильтониана допускаются. В качестве примеров рассмотрены формализм Аштекара для теории гравитации и гидродинамика идеальной жидкости со свободной границей в переменных Клебша.

Abstract

Soloviev V.O. On the Difference between Admissible and "Differentiable" Hamiltonians: IHEP Preprint 96-86. – Protvino, 1996. – p. 9, refs.: 22.

It is shown that the Regge-Teitelboim criterion for fixing the unique boundary contribution to the Hamiltonian which is compatible with free boundary conditions should be modified if the Poisson structure is noncanonical. The new criterion requires cancellation of boundary contributions to the Hamiltonian equations of motion. In the same time, such contributions to the variation of Hamiltonian are allowed. The Ashtekar formalism for gravity and hydrodynamics of the ideal fluid with a free surface in the Clebsch variables are treated as examples.

В этой работе мы рассматриваем случай свободных граничных условий, т.е. ситуацию, когда вариации полевых переменных и их пространственные производные могут быть отличны от нуля на границе рассматриваемой области пространства. Тогда было бы ошибочным трактовать гамильтонианы (или лагранжианы), отличающиеся на пространственную дивергенцию, как принадлежащие одному классу эквивалентности. Необходимо зафиксировать единственный допустимый гамильтониан (или лагранжиан) из этого класса в соответствии с некоторым правилом.

Важность подобных задач для физики легко понять, например, из истории длительной дискуссии о роли поверхностных интегралов в гамильтониане общей теории относительности [1] – [5]. Точка в этой дискуссии была поставлена работой Редже и Тейтельбойма, [6] где был предложен критерий адекватного выбора дивергенций в гамильтониане. Он получил название требования "дифференцируемости" гамильтониана (см. также работу [7]).

Мы собираемся показать здесь, что этот критерий, справедливый при канонической пуассоновой структуре, должен быть пересмотрен в более общей ситуации, особенно когда граничные вклады появляются в симплектической форме и (или) в скобках Пуассона. В то же время общая математическая основа, стоящая за конкретной формулировкой, данной ей Редже и Тейтельбоймом, остается неизменной и в нашем подходе.

Этой общей основой является критерий "естественных граничных условий" в вариационном исчислении [8], [9]. Основная идея естественных граничных условий состоит в том, что из вариационного принципа можно получить не только уравнения Эйлера-Лагранжа, но и некоторые граничные уравнения. И те и другие следуют из требования, чтобы изучаемый функционал имел стационарную точку. Можно вывести естественные граничные условия, когда произвольные вариации полей на границе дают вклад в вариацию функционала, таким образом, их коэффициенты должны обращаться в ноль, чтобы обеспечить его стационарность.

Различие между допустимыми и "дифференцируемыми" гамильтонианами, обсуждаемое в настоящей работе, возникает тогда, когда в гамильтоновом формализме появляются неканонические переменные. Эта ситуация не является необычной. Например, неканонические скобки Пуассона могут возникнуть как скобки Дирака после проведения процедуры редукции. Ниже будут рассмотрены два примера. Первым из них служит формализм Аштекара в теории гравитации, где неканонические скобки Пуассона появляются после преобразования переменных [10]. Вторым примером является гамильтонов формализм для поверхностных волн в идеальной жидкости, где само положение границы становится динамической переменной. В обоих случаях мы увидим, что связь между лагранжианом и гамильтонианом не так очевидна, как это имеет место в канонических переменных. В результате будет показано, что соответствие между функционалом действия и граничными условиями сохраняется в общем случае, тогда как требование "дифференцируемости" гамильтониана должно быть заменено другим. Новый критерий требует сокращения граничных членов в гамильтоновом векторном поле, или, иначе говоря, в гамильтоновых уравнениях движения. Гамильтоново векторное поле должно строиться согласно правилам так называемого формального вариационного исчисления [11] и его расширения на дивергенции, предложенного в предыдущих публикациях автора [12], [13], [14].

Ниже всюду мы будем использовать характеристическую функцию для соответствующей компактной пространственной области Ω, построенную с помощью θ-функции Хевисайда и гладкой функции $P(x)$ со следующими свойствами:

$$P(x) = \begin{cases} > 0 & \text{если } x \in \Omega; \\ = 0 & \text{если } x \in \partial\Omega; \\ < 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1}$$

Это позволяет записывать любой интеграл по области Ω формально в виде интеграла по всему бесконечному пространству R^3 и свободно интегрировать по частям. Мы будем опускать d^3x в этих интегралах.

В качестве первого примера рассмотрим канонический формализм Аштекара для гравитации [15]. Хорошо известно, что этот формализм может быть построен в результате преобразований полевых переменных, начиная с тетрад во временно́й калибровке, когда единичная нормаль к пространственно-подобной гиперповерхности принимается в качестве одного из векторов тетрады [16]. Исходная пара канонических переменных (E_{ia}, π^{ia}) может быть сначала заменена другой парой $(\tilde{E}^{ia}, K_{ia})$:

$$\{\tilde{E}^{ia}(x), K_j^b(y)\} = \frac{1}{2}\delta_j^i \delta^{ab}\delta(x,y), \tag{2}$$

где

$$\tilde{E}^{ia} = E E^{ia}, \quad K_i^a = K_{ij}E^{ja} + E^{-1}E_{ib}J^{ab}, \tag{3}$$

и $E_i^a E_a^j = \delta_i^j$, $E_i^a E_b^i = \delta_b^a$, $E = \det|E_{ia}|$, K_{ij} является второй фундаментальной формой пространственно-подобной гиперповерхности, а генератор вращений триады (т.е. тройки остальных векторов тетрады) есть

$$J^{ab} = \frac{1}{2}(K_i^a \tilde{E}^{bi} - K_i^b \tilde{E}^{ai}). \tag{4}$$

Затем используется второе преобразование, которое вводит переменную связности Аштекара A_i^a вместо K_{ia}

$$A_i^a = iK_i^a + \Gamma_i^a, \qquad \Gamma_i^a = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\tilde{E}_{jc}\tilde{E}^{jb}{}_{|i}, \tag{5}$$

где вертикальной линией обозначена стандартная риманова ковариантная производная и

$$\{\tilde{E}^{ia}(x), A_j^b(y)\} = \frac{i}{2}\delta_j^i\delta^{ab}\delta(x,y). \tag{6}$$

Это преобразование приводит к другой записи генератора внутренних вращений, который мы выбираем в качестве примера допустимого гамильтониана

$$H(\hat{\lambda}^a) = 2\int \theta(P)\hat{\lambda}^a\mathcal{D}_i\tilde{E}^{ia} \equiv 2i\int \theta(P)\hat{\lambda}^a\epsilon^{abc}J^{bc}. \tag{7}$$

Ковариантная производная $\mathcal{D}_i$ определяется следующим соотношением:

$$\mathcal{D}_i\xi^{ka} = \xi^{ka}{}_{|i} + \epsilon^{abc}A_i^b\xi^{kc}. \tag{8}$$

В отличие от его прежнего вида, заданного формулой (4), в переменных Аштекара плотность генератора зависит от пространственных производных величины $\tilde{E}^{ia}$, и поэтому его вариация

$$\delta H = \int\left(\frac{\delta H}{\delta\tilde{E}^{ia}}\delta\tilde{E}^{ia} + \frac{\delta H}{\delta A_i^a}\delta A_i^a\right) \tag{9}$$

содержит граничный вклад

$$\frac{\delta H}{\delta\tilde{E}^{ia}} = -\theta_{,i}2\hat{\lambda}^a - \theta 2\mathcal{D}_i\hat{\lambda}^a, \tag{10}$$

$$\frac{\delta H}{\delta A_i^a} = -\theta 2\epsilon^{abc}\hat{\lambda}^b\tilde{E}^{ic}. \tag{11}$$

При свободных граничных условиях этот функционал не является "дифференцируемым" в терминологии Редже-Тейтельбойма. Мы сейчас покажем, что тем не менее он допустим, так как приводит к регулярным гамильтоновым уравнениям. Объясняется это тем, что переменные Аштекара являются каноническими лишь с точностью до граничного члена [10]:

$$\left\{A_i^a(x), A_j^b(y)\right\} = \theta_{,k}C^k_{[(ia)(jb)]}\delta(x,y), \tag{12}$$

где квадратные скобки обозначают антисимметризацию $i \leftrightarrow j$, $a \leftrightarrow b$ и

$$C^k_{(ia)(jb)} = \frac{i}{2E}(\epsilon^{acb}\delta_j^k E_{ic} - \epsilon^{acd}E_{ib}E_{jc}E^{kd}). \tag{13}$$

Благодаря этой неканоничности гамильтоновы уравнения записываются в виде

$$\dot{\tilde{E}}^{ia}(x) = \int \{\tilde{E}^{ia}(x), A_j^b(y)\} \frac{\delta H}{\delta A_j^b(y)}, \tag{14}$$

$$\dot{A}_i^a(x) = \int \{A_i^a(x), \tilde{E}^{jb}(y)\} \frac{\delta H}{\delta \tilde{E}^{jb}(y)} + \int \{A_i^a(x), A_j^b(y)\} \frac{\delta H}{\delta A_j^b(y)}, \tag{15}$$

или в явном виде, полученном с использованием рецептов из работ [12]-[14], (здесь это просто соотношение $\theta(P) \cdot \theta'(P) = \theta'(P)$), они принимают вид

$$\dot{\tilde{E}}^{ia} = i\epsilon^{abc} \hat{\lambda}^c \tilde{E}^{ib}, \tag{16}$$

$$\dot{A}_i^a = i\mathcal{D}_i \hat{\lambda}^a, \tag{17}$$

где $\theta(P)$-факторы опущены при записи. Отсюда видно, что сингулярные на границе члены во втором уравнении взаимно уничтожаются, несмотря на их присутствие в полной вариационной производной (10). Это означает, что наш гамильтониан является допустимым при любых граничных условиях.

Неудивительно поэтому, что алгебра скобок Пуассона для этих генераторов замыкается независимо от граничных условий

$$\{H(\hat{\xi}^a), H(\hat{\eta}^b)\} = H\left(i\epsilon^{cab} \hat{\xi}^a \hat{\eta}^b\right). \tag{18}$$

В лагранжевом подходе очевидно, что поскольку действие

$$S = 2 \int_{t_1}^{t_2} dt \int \theta(P) \left(K_i^a \dot{\tilde{E}}^{ia} - i\hat{\lambda}^a \varepsilon^{abc} J^{bc}\right), \tag{19}$$

вовсе не содержит пространственных производных, любые граничные условия являются естественными. Замена переменных, предложенная Аштекаром, представляет это действие в виде

$$S = -2i \int_{t_1}^{t_2} dt \int \theta(P) \left((A_i^a - \Gamma_i^a)\dot{\tilde{E}}^{ia} - i\hat{\lambda}^a \mathcal{D}_i \tilde{E}^{ia}\right), \tag{20}$$

из которого указанное свойство уже не очевидно. Найдем, однако, вариацию

$$\begin{aligned} \delta S &= -2i \int_{t_1}^{t_2} dt \int \theta(P) \Bigg(\delta \tilde{E}^{ia} \left[-\dot{A}_i^a + i\mathcal{D}_i \tilde{E}^{ia}\right] + \delta A_i^a \left[\dot{\tilde{E}}^{ia} + i\varepsilon^{abc} \lambda^b \tilde{E}^{ic}\right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t}\left((A_i^a - \Gamma_i^a)\delta \tilde{E}^{ia}\right) + \left((\dot{\Gamma}_i^a \delta \tilde{E}^{ia} - \dot{\tilde{E}}^{ia} \delta \Gamma_i^a) - \partial_i (i\hat{\lambda}^a \delta \tilde{E}^{ia})\right)\Bigg). \end{aligned} \tag{21}$$

Тогда член с полной производной по времени дает нулевой вклад, поскольку на границах временного интервала вариации координат обращаются в ноль, члены в квадратных скобках дают уравнения движения, а остальные члены не дают вклада, поскольку

$$(\dot{\Gamma}_i^a \delta\tilde{E}^{ia} - \dot{\tilde{E}}^{ia}\delta\Gamma_i^a) - \partial_i(i\hat{\lambda}^a\delta\tilde{E}^{ia}) = 0 \mod \left(\dot{\tilde{E}}^{ia} + i\varepsilon^{abc}\lambda^b\tilde{E}^{ic} = 0\right), \tag{22}$$

для любых функций $\delta\tilde{E}^{ia}$, что проверяется прямым вычислением.

В качестве второго примера рассмотрим гамильтоново описание идеальной жидкости со свободной поверхностью. В эйлеровых переменных действие может быть записано [17] с помощью потенциалов Клебша

$$\mathbf{v} = \nabla\phi + \frac{\eta}{\rho}\nabla s + \frac{\beta}{\rho}\nabla\alpha, \tag{23}$$

следующим образом:

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int \theta(P) \left[\rho\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \Phi(\mathbf{x}) - \varepsilon(\rho, s)\right) - \rho\frac{D\phi}{Dt} - \eta\frac{Ds}{Dt} - \beta\frac{D\alpha}{Dt} - \tau K\right]. \tag{24}$$

где ρ — плотность массы жидкости; s — энтропия на единицу массы; $\varepsilon = \varepsilon(\rho, s)$ — плотность внутренней энергии, τ — коэффициент поверхностного натяжения,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla, \qquad K = -\nabla\cdot\left(\frac{\nabla P}{|\nabla P|}\right). \tag{25}$$

На границе последняя формула дает ее внешнюю кривизну, тогда как ∇P пропорционален вектору нормали, предложение использовать эти формулы исходит от Абарбанеля и др. [18].

Соответствующая симплектическая форма

$$-\int \left[\theta(P)(\delta\rho\wedge\delta\phi + \delta\eta\wedge\delta s + \delta\beta\wedge\delta\alpha) + \theta'(P)\delta P\wedge(\rho\delta\phi + \eta\delta s + \beta\delta\alpha)\right]. \tag{26}$$

является вырожденной. Для перехода к гамильтонову формализму можно воспользоваться процедурой Дирака [19] или подходом Фаддеева-Джакива [20], но в действительности, оба пути ведут к тому же результату, что и простейший трюк. Если ввести каноническую переменную π, сопряженную к P

$$S \to S + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int (\pi\dot{P} - \lambda\pi), \tag{27}$$

и таким образом дополнить симплектическую форму стандартным членом

$$\int \delta\pi\wedge\delta P, \tag{28}$$

то в модифицированном виде симплектическая форма становится невырожденной и может быть обращена, что позволяет получить выражение для пуассонова бивектора

$$
\begin{aligned}
\Psi &= \int\Bigg[\theta(P)\left(\frac{\delta}{\delta\rho}\wedge\frac{\delta}{\delta\phi}+\frac{\delta}{\delta\eta}\wedge\frac{\delta}{\delta s}+\frac{\delta}{\delta\beta}\wedge\frac{\delta}{\delta\alpha}\right)+\\
&+ \frac{\delta}{\delta P}\wedge\frac{\delta}{\delta\pi}+\theta'(P)\frac{\delta}{\delta\pi}\wedge\left(\rho\frac{\delta}{\delta\rho}+\eta\frac{\delta}{\delta\eta}+\beta\frac{\delta}{\delta\beta}\right)\Bigg],
\end{aligned}
\tag{29}
$$

который явным образом содержит граничную δ-функцию.

Гамильтониан имеет следующий вид:

$$
\mathrm{H}=\int\left[\theta(P)\left(\frac{\rho\mathbf{v}^2}{2}+\rho\Phi+\rho\varepsilon(\rho,s)+\tau K\right)+\lambda\pi\right],
\tag{30}
$$

и его вариация также содержит сингулярные граничные вклады, например,

$$
\frac{\delta\mathrm{H}}{\delta P} = \theta'(P)\left(\frac{\rho\mathbf{v}^2}{2}+\rho\Phi+\rho\varepsilon+\tau K\right),
\tag{31}
$$

$$
\frac{\delta\mathrm{H}}{\delta\phi} = -\theta'(P)\rho\mathbf{v}\cdot\nabla P-\theta(P)\nabla(\rho\mathbf{v}),
\tag{32}
$$

и так далее.

Найдем теперь гамильтоново векторное поле согласно стандартной формуле, где внутреннее умножение должно пониматься в смысле определения, данного в работе [13], [14],

$$
\begin{aligned}
-\mathsf{d}\mathrm{H}\lrcorner\Psi &= \left[-\theta'(P)\rho(\lambda+\mathbf{v}\cdot\nabla P)-\theta(P)\nabla(\rho\mathbf{v})\right]\frac{\delta}{\delta\rho}+\\
&+ \left[-\theta'(P)\eta(\lambda+\mathbf{v}\cdot\nabla P)-\theta(P)(\nabla(\eta\mathbf{v})-\rho T)\right]\frac{\delta}{\delta\eta}+\\
&+ \left[-\theta'(P)\beta(\lambda+\mathbf{v}\cdot\nabla P)-\theta(P)\nabla(\beta\mathbf{v})\right]\frac{\delta}{\delta\beta}+\\
&+ \theta'(P)(p-\tau K)\frac{\delta}{\delta\pi}+\\
&+ \theta(P)\left[\frac{v^2}{2}-\mathbf{v}\cdot\nabla\phi-\Phi-\varepsilon-\frac{p}{\rho}\right]\frac{\delta}{\delta\phi}-\theta(P)\left[\mathbf{v}\cdot\nabla s\right]\frac{\delta}{\delta s}-\\
&- \theta(P)\mathbf{v}\cdot\nabla\alpha\frac{\delta}{\delta\alpha}+\theta(P)\lambda\frac{\delta}{\delta P},
\end{aligned}
\tag{33}
$$

здесь $p=\rho^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}$ — давление и $T=\frac{\partial\varepsilon}{\partial s}$ — температура.

Тогда требование того, что гамильтоново векторное поле не должно содержать граничных членов, эквивалентно стандартным для этой задачи граничным условиям [21]

$$
\theta'(P)(\dot{P}+\mathbf{v}\cdot\nabla P) = 0,
\tag{34}
$$

$$
\theta'(P)(p-\tau K) = 0,
\tag{35}
$$

если мы примем во внимание уравнение движения

$$\dot{P} = \lambda. \tag{36}$$

Полезно сравнить данный подход с анализом, проведенным на основе других переменных [18].

Если бы мы попытались использовать здесь критерий Редже и Тейтельбойма, то пришли бы к неверным граничным условиям, например, одно из них имело бы вид

$$\mathbf{v} \cdot \nabla P = 0, \tag{37}$$

т.е., это было бы условие неподвижности границы.

В лагранжевом подходе к обсуждаемой проблеме изучается вариация действия (24). Помимо членов, дающих стандартные уравнения движения, эта вариация также содержит граничные члены

$$\delta' S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \Big(-\frac{\partial}{\partial t} \big(\theta\rho\delta\phi + \theta\eta\delta s + \theta\beta\delta\alpha \big) +$$

$$+\theta' \left(\dot{P} + \mathbf{v} \cdot \nabla P \right) (\rho\delta\phi + \eta\delta s + \beta\delta\alpha) + \theta'(p - \tau K)\delta P \Big). \tag{38}$$

Полная производная по времени позволяет найти симплектическую форму (26), но не дает вклада в вариационный принцип, так как вариации полей равны нулю на временно́й границе. Оставшиеся члены существенны на пространственной границе, где вариации полей являются произвольными, как раз эти члены и позволяют найти естественные граничные условия, совпадающие с (34), (35).

Мы показали, что в общем случае, когда гамильтоновы переменные не обязательно являются каноническими и их скобки Пуассона могут содержать граничные члены, критерий “дифференцируемости” гамильтониана, предложенный Редже и Тейтельбоймом, должен быть заменен новым критерием. Гамильтониан может считаться допустимым, если гамильтоново векторное поле, построенное согласно обобщенным определениям, данным в работах [13], [14], не содержит никаких граничных вкладов. Этим решается задача поиска нового критерия, поставленная в работе [10]. В общей форме идея такого решения может быть прослежена также в работе Мейсона [22]. Более подробное обсуждение будет дано в другом месте.

Мы надеемся, что гамильтонов подход к задачам теории поля со свободными граничными условиями окажется полезен при рассмотрении различных физических проблем, особенно тех, где лагранжев подход встречается с затруднениями.

Благодарности

Эта работа была закончена во время визита автора в международный центр теоретической физики в Триесте. Автор благодарен проф. С. Ранджбару-Даеми за приглашение и гостеприимность. Поддержка со стороны МЦТФ признается с благодарностью. Приятно поблагодарить проф. А. Желтухина за обсуждение данной работы.

Список литературы

[1] Arnowitt R., Deser S. and Misner Ch.W. — In: Gravitation, an Introduction to Current Research. / Ed. L.Witten (New York, 1963). (Имеется перевод: Эйнштейновский сборник 1967. М.: Наука, 1967).

[2] Dirac P.A.M. // Phys. Rev. Lett. 1959, v. 2, p. 368; Phys. Rev. 1959, v. 114, p. 924.

[3] Higgs P.W. // Phys. Rev. Lett. 1959, v. 3, p. 66.

[4] Schwinger J. Phys. Rev. 1963, v. 130, p. 1253. (Имеется перевод: Гравитация и топология. Актуальные проблемы. Сборник статей под ред. Д.Д.Иваненко. М.: Мир, 1966).

[5] DeWitt B.S. // Phys. Rev. 1967, v. 160, p. 1113.

[6] Regge T. and Teitelboim C. // Ann. Phys. 1974, v. 88, p. 286.

[7] Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.

[8] Courant R. and Hilbert D. Methods of Mathematical Physics, vol. 1, (Wiley, N.Y., 1989) pp. 208-211; (Имеется перевод: Д.Гильберт, Р.Курант. Методы математической физики, том 1. М., 1951).

[9] Lanczos C. The Variational Principles of Mechanics, (Univ. Toronto Press, 1964) pp. 68-73. (Имеется перевод: К.Ланцош. Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965).

[10] Soloviev V.O. // Phys. Lett. 1992, v. B292, p. 30.

[11] Гельфанд И.М., Дикий Л.А.// УМН 1975, 30, 67.

[12] Soloviev V.O. // J. Math. Phys. 1993, v. 34, p. 5747.

[13] Soloviev V.O. Boundary Values as Hamiltonian Variables II. Graded Structures. Preprint IHEP 94-145, Protvino, 1994. q-alg/9501017 (submitted to J. Math. Phys.).

[14] Soloviev V.O. // Nucl. Phys. 1995, v. BP49, p. 35.

[15] Ashtekar A. // Phys. Rev. Lett. 1986, v. 57, p. 2244; Phys. Rev. 1987, v. D36, p. 1587; Ashtekar A., Mazur P., Torre C.G. // Phys. Rev. 1987, v. D36, p. 2955.

[16] Henneaux M., Nelson J.E., Schomblond C. // Phys. Rev. 1989, v. D39, p. 434.

[17] Seliger R.L. and Whitham G.B. // Proc. Roy. Soc. 1968, v. A305, p. 1. (Имеется перевод: Механика. Сборник переводов. 1969, №5 (117) с. 99).

[18] Abarbanel H.D.I., Brown R. and Yang Y.M. // Phys. Fluids 1988, v. 31, p. 2802.

[19] Dirac P. Lectures on Quantum Mechanics (Yeshiva Univ., N.Y., 1964). (Имеется перевод: П.А.М.Дирак. Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968).

[20] Faddeev L. and Jackiw R. // Phys. Rev. Lett. 1988, v. 60, p. 1692.

[21] Lamb H. Hydrodynamics, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1932) p. 456. (Имеется перевод: Г. Ламб. Гидродинамика. ГИТТЛ, М.-Л., 1947).

[22] Mason L. // Class. Quant. Grav. 1989, v. 6, p. L7.

Рукопись поступила 30 октября 1996 г.

В.О.Соловьев В.О.
О различии между допустимыми и “дифференцируемыми” гамильтонианами.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы LaTeX.
Редактор Н.В.Ежела. Технический редактор Н.В.Орлова.

Подписано к печати 5. 11. 96. Формат $60 \times 84/8$. Офсетная печать.
Печ.л. 1.12. Уч.-изд.л. 0.86. Тираж 250. Заказ 732. Индекс 3649.
ЛР №020498 17.04.97.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 96-86, И Ф В Э, 1996