



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 96-89  
ОНФ

В.С. Дацко<sup>1</sup>, Н.А. Дацко

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛИУВИЛЛЯ В ОПТИЧЕСКИХ РАСЧЁТАХ

---

<sup>1</sup> Email: [datsko@mx.ihep.su](mailto:datsko@mx.ihep.su)

Протвино 1996

**Аннотация**

Дацко В.С., Дацко Н.А. Использование теоремы Лиувилля в оптических расчётах: Препринт ИФВЭ 96–89. – Протвино, 1996. – 17 с., 8 рис., библиогр.: 30.

Приводится вывод теоремы Лиувилля о сохранении фазового объёма произвольной системы, подчиняющейся уравнениям Гамильтона. Описано получение инварианта Лагранжа–Гельмгольца. Показана возможность корректных расчётов непараксиальной оптики. Для работы с непараксиальными пучками предложен матричный формализм, представляющий произвольную систему.

**Abstract**

Datsko V.S., Datsko N.A. The Use of Liouville Theorem in Optics Calculations. : IHEP Preprint 96–89. – Protvino, 1996. – p. 17, figs. 8, refs.: 30.

The Liouville's theorem on phase space conservation of arbitrary system that obeys Hamiltonian equations has been deduced. The Lagrange–Helmholtz invariant formulation is described. A possibility to perform correct calculations for nonparaxiality optic is shown. The matrix formalism is proposed to operate with nonparaxiality beam that represents an arbitrary system.

## Введение

В оптике распространено мнение (например, [1,2,3,4,5]), что требуемое теоремой Лиувилля сохранение фазового объёма пучков света накладывает ограничения на работу оптических конструкций. С другой стороны весьма жёсткие ограничения на свойства оптических систем ([6]) традиционно применяющиеся в оптике, обычно не связываются с теоремой Лиувилля. Представляется интересным найти такую связь и применить её в вычислительной оптике.

### 1. Формулировка теоремы Лиувилля, ее связь с параксиальной оптикой

Как известно наиболее общий подход к распространению светового пучка, базируется на возможности применения в оптике обобщённых переменных Гамильтона — обобщённых координат  $q$  и обобщённых импульсов  $P$  [7], подчиняющихся уравнениям Гамильтона:

$$\frac{\partial P_{j0}}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \Big|_{q_0, P_0, t_0} + Q_j^d \Big|_{q_0, P_0, t_0}; \quad \frac{\partial q_{j0}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial P_j} \Big|_{q_0, P_0, t_0}, \quad (1)$$

где  $H(q,P)$  — функция Гамильтона,  $Q_j^d$  — диссипативные силы,  $q_{j0}, P_{j0}$  ( $j=1,2,3$ ) — начальные условия. Для систем, описываемых с помощью уравнений Гамильтона справедлива теорема Лиувилля о сохранении фазового объёма. Эта теорема связана с понятием фазового пространства. Фазовым пространством называется воображаемое пространство  $2k$  измерений (в нашем случае 6 измерений), координатными осями которого являются обобщённые координаты  $q$  и обобщённые импульсы  $P$ . Состояние системы в данный момент времени изображается в фазовом пространстве одной фазовой точкой. С течением времени эта точка движется по фазовой траектории.

Пусть [8] в начальный момент времени  $t_0$  систему представляет фазовый объём  $\Gamma_0$ :

$$\Gamma_0 = \int \int \int \int \int \int \int_{(\Gamma_0)} \delta q_{10} \delta q_{20} \delta q_{30} \delta P_{10} \delta P_{20} \delta P_{30}. \quad (2)$$

В момент времени  $t$  система займёт другую область ( $\Gamma$ ) с фазовым объёмом:

$$\Gamma = \int \int \int \int \int \int \int_{(\Gamma)} \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \delta P_1 \delta P_2 \delta P_3. \quad (3)$$

Учитывая, что действительное изменение системы подчинено уравнениям движения, а следовательно, переменные  $q, P$  в момент  $t$  являются функциями этих же переменных, взятых в начальный момент времени, можно записать фазовый объём  $\Gamma$  в виде интеграла по области ( $\Gamma_0$ ):

$$\Gamma = \int \int \int \int \int \int \int_{(\Gamma_0)} D \delta q_{10} \delta q_{20} \delta q_{30} \delta P_{10} \delta P_{20} \delta P_{30}, \quad (4)$$

где  $D = \frac{\partial(q,P)}{\partial(q_0,P_0)}$  — якобиан преобразования от переменных  $q, P$  к значениям этих переменных  $q_0, P_0$  в начальный момент времени. Из сопоставления (1) и (2) видно, что задача об отыскании закона изменения  $\Gamma$  сводится к отысканию закона изменения якобиана  $D$ . Значения координат и импульсов в момент времени  $t_0 + \Delta t$  равны

$$q_i = q_{i0} + \dot{q}_{i0} \Delta t, \quad P_i = P_{i0} + \dot{P}_{i0} \Delta t, \quad (5)$$

откуда получим элементы якобиана

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial q_{j0}} &= \delta_{ij} + \frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{j0}} \Delta t, & \frac{\partial q_i}{\partial P_{j0}} &= \frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial P_{j0}} \Delta t, \\ \frac{\partial P_i}{\partial q_{j0}} &= \frac{\partial \dot{P}_{i0}}{\partial q_{j0}} \Delta t, & \frac{\partial P_i}{\partial P_{j0}} &= \delta_{ij} + \frac{\partial \dot{P}_{i0}}{\partial P_{j0}} \Delta t. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (6) в выражение для якобиана  $D$ , находим значение  $D(t_0)$  и  $D(t_0 + \Delta t)$ .

$$\begin{aligned} D(q_1, \dots, q_k; P_1, \dots, P_k) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial q_{j0}} & \cdots & \frac{\partial q_i}{\partial P_{j0}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial P_i}{\partial q_{j0}} & \cdots & \frac{\partial P_i}{\partial P_{j0}} \end{vmatrix} = \\ &= \sum_{i,j}^k \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_{j0}} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial P_{j0}} - \frac{\partial q_i}{\partial P_{j0}} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_{j0}} \right) = \\ &= \sum_{i,j}^k \left[ \left( \delta_{ij} + \frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{j0}} \Delta t \right) \left( \delta_{ij} + \frac{\partial \dot{P}_{i0}}{\partial P_{j0}} \Delta t \right) - \frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial P_{j0}} \Delta t \cdot \frac{\partial \dot{P}_{i0}}{\partial q_{j0}} \Delta t \right] = \\ &= \sum_{i,j}^k \left[ \delta_{ij} \delta_{ij} + \delta_{ij} \frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{j0}} \Delta t + \delta_{ij} \frac{\partial \dot{P}_{i0}}{\partial P_{j0}} \Delta t + \frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{j0}} \Delta t \frac{\partial \dot{P}_{i0}}{\partial P_{j0}} \Delta t - \frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial P_{j0}} \Delta t \frac{\partial \dot{P}_{i0}}{\partial q_{j0}} \Delta t \right] = \\ &= \sum_{i,j}^k \left[ \delta_{ij} \delta_{ij} + \left( \delta_{ij} \frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{j0}} + \delta_{ij} \frac{\partial \dot{P}_{i0}}{\partial P_{j0}} \right) \Delta t + \left( \frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{j0}} \frac{\partial \dot{P}_{i0}}{\partial P_{j0}} - \frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial P_{j0}} \frac{\partial \dot{P}_{i0}}{\partial q_{j0}} \right) (\Delta t)^2 \right]. \end{aligned}$$

$$D(t_0) = 1, \quad D(t_0 + \Delta t) = 1 + \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{i0}} + \frac{\partial \dot{P}_{i0}}{\partial P_{i0}} \right) \Delta t. \quad (7)$$

Отсюда

$$\dot{D} = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{i0}} + \frac{\partial \dot{P}_{i0}}{\partial P_{i0}} \right). \quad (8)$$

Поскольку изменение системы подчинено уравнениям Гамильтона, постольку каждое слагаемое в правой части (8) будет равно (1)

$$\frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{i0}} + \frac{\partial \dot{P}_{i0}}{\partial P_{i0}} = \frac{\partial Q_{i0}^d}{\partial P_{i0}}. \quad (9)$$

Поэтому

$$\dot{D} = \frac{\partial Q_i^d}{\partial P_i}. \quad (10)$$

Следовательно, производная фазового объёма  $\Gamma$  равна

$$\dot{\Gamma} = \int \int \int \int \int \int_{(\Gamma_0)} \sum_{i=1}^k \frac{dQ_i^d}{dP_i} \delta q_{10} \delta q_{20} \delta q_{30} \delta P_{10} \delta P_{20} \delta P_{30}. \quad (11)$$

Отсюда вытекает закон сохранения фазового объёма (теорема Лиувилля): фазовый объём в отсутствие диссипативных сил сохраняется, т. е.

$$\Gamma = \Gamma_0, \quad \text{если } Q_i^d = 0. \quad (12)$$

В этом случае  $\dot{D} = 0$  и, следовательно, величина якобиана в любой момент времени равна  $D = 1$ . Доказательство с позиций термодинамики приведено в книге [9]. Отметим, что этот вывод является одной из форм закона сохранения энергии — при отсутствии в системе потерь энергия системы сохраняется. В соответствии с [10] для шестимерного фазового пространства оптической системы

$$H(P, q) = \omega(\vec{k}, \vec{r}), \quad \dot{\vec{k}} = -\frac{d\omega}{d\vec{r}}, \quad \dot{\vec{r}} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \cdot \frac{\vec{k}}{k}, \quad (13)$$

т.е.

$$\Gamma = \int \int \int \int \int \int \delta x \delta y \delta z \delta k_x \delta k_y \delta k_z = const. \quad (14)$$

Интегрирование производится по области фазового пространства  $(x, y, z, k_x, k_y, k_z)$ , занятой световым пучком.

Перейдём в пространстве векторов  $\vec{k}$  к сферическим координатам

$$d^3 \vec{k} = k^2 dk d\Omega = \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \cdot \frac{d\omega d\Omega}{V}, \quad (15)$$

где  $\Omega$  — телесный угол;  $V = \frac{d\omega}{dk}$  — групповая скорость. Запишем элемент пространственного объёма в виде  $d^3\vec{r} = dz ds$ , где  $ds$  — элемент площади плоскости, перпендикулярной оптической оси. Тогда

$$\Gamma = \int \int \int \int \int \int \frac{\omega^2 n^2(\omega, \vec{r}) d\omega}{c^2} ds d\Omega \frac{dz}{V} = const. \quad (16)$$

В стационарной среде, когда  $\omega = const$ , и в отсутствии дисперсии ( $n(\omega) = const$ ) интеграл  $\int \omega^2 d\omega = const$  и (16) сводится к

$$\int \int \int \int \int n^2 ds d\Omega \frac{dz}{V} = const. \quad (17)$$

В параксиальном приближении, т.е. когда направление вектора  $V$  близко к оси  $z$ , интеграл  $\int \frac{dz}{V} = const$ . Действительно для тонкого слоя пучка  $\Delta z = \ell$  имеем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\ell}{V(z)} \right) = \frac{\dot{\ell}}{V} - \frac{\ell \dot{V}}{V^2} = 0, \quad (18)$$

так как  $\dot{V} = \frac{dV}{dz} V$ ;  $\dot{\ell} = \frac{d\ell}{dz} \ell$ . Учитывая, что в параксиальном приближении  $d\Omega = \theta d\theta d\phi$ , получаем

$$\int \int \int \int n^2 ds \theta d\theta d\phi = const. \quad (19)$$

В простейшем случае, когда пучок является аксиально-симметричным, его угловая расходимость  $\theta_{max}$  не зависит от  $r$ , а  $n$  зависит только от  $z$ , последний интеграл приобретает вид

$$n \theta_{max} r_{max} = const, \quad (20)$$

где  $r_{max}$  — радиус сечения пучка в плоскости  $z = const$ . Соотношение (20) носит название теоремы Лагранжа–Гельмгольца (иногда её называют теоремой Смита–Гельмгольца) и в таком виде она обычно получается непосредственно из законов геометрической оптики [6,11].

Разумеется редукция числа переменных при каждом интегрировании в (16) не меняет фазового объёма, поскольку выполняются условия теоремы Лиувилля. Однако при этом и получение инварианта Лагранжа–Гельмгольца, как мы видим, является следствием наложения дополнительных ограничений на поведение светового пучка (при соблюдении условия сохранения фазового объёма — отсутствия диссипативных сил). Так же, как и закон сохранения энергии, закон сохранения фазового объёма обязан выполняться, однако оба они не приводят к инварианту Лагранжа–Гельмгольца без дополнительных приближений.

Основной вывод из изложенного заключается в том, что получение инварианта Лагранжа–Гельмгольца базируется исключительно на классических приближениях геометрической оптики. Подтвердим это получением инварианта классическими методами.

## 2. Формализм расчётов параксиальной оптики

Используем, в частности, понятие оптической длины пути  $n\ell$  — произведения показателя преломления на длину пути луча. В среде с показателем преломления  $n$   $v = \frac{c}{n}$  и  $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ , где  $\lambda_0$  - длина волны в вакууме. Пусть одна волна проходит в среде с показателем преломления  $n_1$  путь  $\ell_1$ , а другая во второй среде с показателем преломления  $n_2$  путь -  $\ell_2$ . В результате между ними возникнет разность фаз:

$$\Delta\psi = 2\pi \left( \frac{\ell_1}{\lambda_1} - \frac{\ell_2}{\lambda_2} \right) = 2\pi \frac{\ell_1 n_1 - \ell_2 n_2}{\lambda_0}.$$

Если два оптических пути эквивалентны друг другу, то они не внесут никакой разности фаз. Такие пути называются таутохронными. Они совпадают по времени, так как свет по этим не равным по геометрическим путям расстояниям распространяется за одно и то же время. Условию таутохронизма удовлетворяют в частности, все пути лучей, проходящих через линзу и дающих изображение  $L'$  источника  $L$  (рис.1).

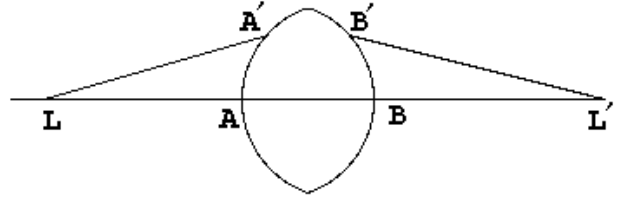


Рис. 1. К понятию таутохронизма. Ход лучей через линзу.

Хотя геометрический путь  $LABL'$  короче пути  $LA'B'L'$ , часть, приходящаяся на путь внутри линзы, соответственно больше ( $AB > A'B'$ ). (В работе [12] по этому поводу утверждается: равенство оптических путей должно и так быть понятно). Так как скорость света в материале, из которого сделана линза, меньше, чем в воздухе, запаздывание на участке  $AB$  компенсирует опережение на участках  $LA$  и  $BL'$  по сравнению с соответствующими участками пути  $LA'$  и  $B'L'$ . Поэтому условие таутохронизма можно записать в виде  $AL + nAB + BL' = LA' + nA'B' + B'L'$ , где  $n$  — показатель преломления материала линзы. Если бы отдельные лучи, проходящие через линзу, не были таутохронными, некоторые из них, распространяясь по разным путям, обладали бы некоторой разностью фаз и взаимно ослабляли бы друг друга при встрече в  $L'$ . Получающийся интенсивный максимум в  $L'$ , который является изображением источника  $L$ , обусловлен взаимным усилением лучей, прошедших в  $L'$  без разности фаз по таутохронным путям. Пути, ведущие к другой точке пространства, не будут оптически равными, и во всех иных точках, кроме  $L'$ , взаимная интерференция приводит к ослаблению света.

Таким образом, получение изображения в линзе есть интерференционный эффект. Следовательно, линза не вносит разности хода между отдельными лучами, образующими изображение. Это относится к любой оптической системе, дающей изображение источника.

В оптически однородной среде, т.е. в среде, все точки которой характеризуются одним и тем же значением показателя преломления, свет затрачивает на прохождение от одной точки до другой по своему действительному пути меньше времени, чем потребовалось бы ему для прохождения между теми же точками любым дру-

гим путём. Это утверждение носит название принципа Ферма. Он справедлив для лучей, преломляющихся и отражающихся от плоских поверхностей. Исследования показали, что принцип Ферма в той форме, в какой он был высказан самим автором, не всегда выполняется для лучей, преломляющихся или отражающихся от изогнутых поверхностей [13]. В современной формулировке принцип Ферма гласит: свет распространяется по пути, оптическая длина которого экстремальна, т.е. она является либо минимальной из всех возможных, либо максимальной, либо стационарной.

В геометрической оптике световым лучом называется абстракция в виде параллельного, бесконечно узкого светового пучка. Под светящейся точкой понимается источник излучения, не имеющий размеров. Если лучи выходят из одной точки, являющейся вершиной расходящегося пучка лучей, такой пучок называется гомоцентрическим, т.е. имеющим общий центр. Параксиальными (приосевыми), называются лучи, образующие с осью оптической системы (линзы, зеркала ...) малые углы.

Стигматическое изображение — такое оптическое изображение, каждая точка которого соответствует одной точке изображаемого оптической системой объекта. Строго говоря, подобное соответствие возможно лишь в идеальных оптических системах при условии, что отсутствуют или устранены все aberrации и допустимо пренебречь волновыми свойствами света, в частности дифракцией.

В геометрической оптике предполагается обычно не только, что гомоцентрический пучок лучей изображается в виде точки (стигматическое изображение), но и что при этом возможен обратный ход лучей (т.е. существует взаимно однозначное соответствие между точкой-предметом и точкой-изображением). Проблема обратимости в общем виде не решена, в [14] сделана попытка решения проблемы с позиций термодинамики, но объём и сложность задачи пока не позволили достичь на этом пути успеха, хотя термодинамический подход сам по себе весьма привлекателен.

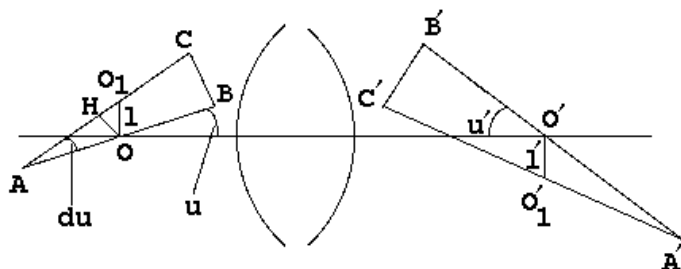


Рис. 2. К выводу инварианта Лагранжа–Гельмгольца с использованием принципа Ферма.

луч  $AOB$ , образующий с осью угол  $u$ . После преломления этот луч идёт в направлении  $B'O'A'$  и образует угол с осью  $u'$ . Через точку  $O_1$  проведём  $AO_1C$ , образующий с осью угол  $u + du$ , весьма мало отличный от  $u$ . Этот луч после преломления идёт в направлении  $C'O'_1A'$ , образуя с осью угол  $u' + du'$ , весьма мало отличный от  $u'$ . Согласно принципу Ферма, оптические пути равны между собой, откуда

Пусть (рис.2)  $O$  — точка, изображение  $O'$ , которой стигматично, т.е. все лучи, выходящие из точки  $O$ , пересекаются в точке  $O'$ . Найдём, при каком условии точка  $O_1$ , расположенная бесконечно близко к точке  $O$  в направлении перпендикулярном оси, изображается стигматически в точку  $O'_1$ . Обозначим  $OO_1$  через  $l$ , а  $O'O'_1$  — через  $l'$ . Проведём через точку  $O$



$$(ACC'A') = (ABB'A') \text{ или } nAO_1 + (OO'_1) + n'O'_1A' = nAO + (OO') + n'O'A', \text{ поэтому}$$

$$n(AO_1 - AO) + [(O_1O'_1) - (OO')] + n'(O'_1A' - O'A') = 0. \quad (21)$$

Из точки А как центра описываем окружность радиуса АО, пересекающую луч АС в точке Н. Вследствие малости угла  $du$  можно заменить дугу окружности прямой ОН. Тогда из треугольника  $HO_1$  имеем

$$HO_1 = OO_1 \sin u = l \sin u,$$

или

$$AO_1 - AO = HO_1 = l \sin u.$$

Аналогично для  $O'$  и  $O'_1$

$$A'O' - A'O'_1 = l' \sin u'.$$

Подставляя в (21), получаем

$$n'l' \sin u' - nl \sin u = (O_1O'_1) - (OO').$$

Поскольку  $O'$  есть изображение  $O$ , а  $O'_1$  — изображение  $O_1$ , оптические пути  $(OO')$  и  $(OO'_1)$  не должны зависеть от  $u$ . В частном случае, когда  $u=0$  угол  $u' = 0$  и левая часть уравнения равна нулю, а правая, постоянная, должна тоже равняться нулю. Отсюда получается инвариант Лагранжа–Гельмгольца:

$$n'l' \sin u' = nl \sin u. \quad (22)$$

Пусть теперь (см.рис.3)  $A_1$  — точечный объект, а  $A_2$  — его изображение. Повернём оптическую ось  $A_1C$  вокруг центра кривизны  $C$  на малый угол  $\phi$ , тогда точка  $A$  займёт положение  $B'_1$ , а её изображение — положение  $B'_2$ . Все точки дуги  $A_1B'_1$  отобразятся точками, находящимися на дуге  $A_2B'_2$ . Если дуги  $A_1B'_1$  и  $A_2B'_2$  малы, их можно заменить отрезками касательных  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ , перпендикулярных к оптической оси. Каждая точка изображения является местом пересечения всех лучей, исходящих из сопряжённой точки объекта.

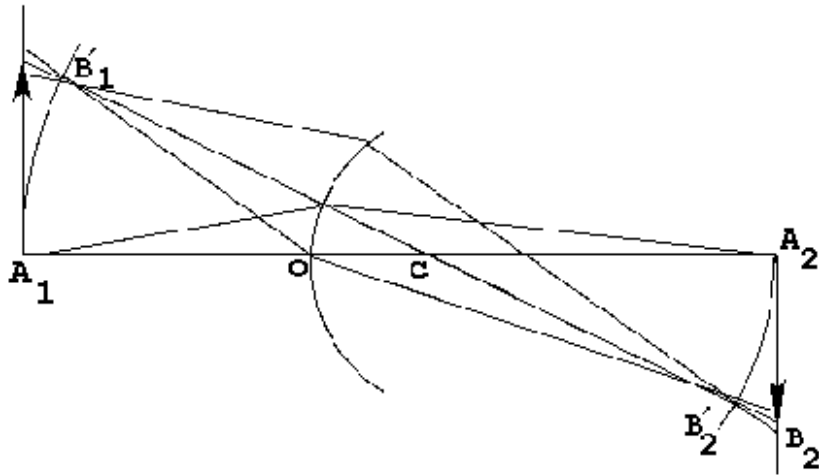


Рис. 3. К выводу инварианта Лагранжа–Гельмгольца с использованием геометрических построений. Ход луча через оптический центр.

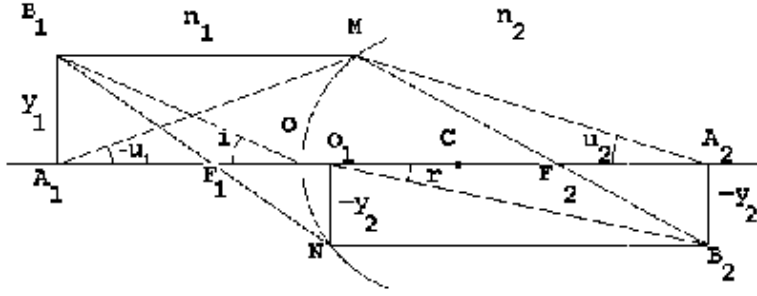


Рис. 4. К выводу инварианта Лагранжа–Гельмгольца с использованием геометрических построений в рамках приближений геометрической оптики.

отрезок  $A_2B_2$  является изображением отрезка  $A_1B_1$ . Из  $\triangle A_1B_1O$  и  $\triangle A_2B_2O_1$  имеем  $tg(i) = \frac{A_1B_1}{a_1} = \frac{y_1}{a_1}$  и  $tg(r) = \frac{A_2B_2}{a_2} = \frac{y_2}{a_2}$ , где  $a_1 = A_1O$ ;  $a_2 = A_2O_1$ . При малых  $y_1$  и  $y_2$ :  $\frac{tg(i)}{tg(r)} \sim \frac{\sin(i)}{\sin(r)} = \frac{n_2}{n_1}$ . Тогда

$$\frac{y_1}{a_1}n_1 = \frac{y_2}{a_2}n_2,$$

или

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{n_1 a_2}{n_2 a_1}.$$

При соблюдении условия параксиальности (см. рис.4)  $A_1M \sim A_1O = a_1$  и  $A_2M \sim A_2O = a_2$  из  $\triangle A_1MO$  и  $\triangle A_2MO$  имеем  $tg u_1 = \frac{MO}{a_1}$ ;  $tg u_2 = \frac{MO}{a_2}$ , т.е.

$$\frac{tg u_1}{tg u_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

В параксиальном приближении  $tg u_1 \sim u_1$  и  $tg u_2 \sim u_2$ , поэтому  $\frac{n_1 a_2}{n_2 a_1} = \frac{n_1 u_1}{n_2 u_2} = \frac{y_2}{y_1}$  или

$$y_1 n_1 u_1 = y_2 n_2 u_2, \quad (23)$$

т.е. инвариант Лагранжа–Гельмгольца.

Для целей вычислительной оптики удобно ввести в обращение матричную технику [10,15,16,17,18].

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = M_{21} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F_{21}} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Здесь  $x$  — расстояние от оптической оси системы, совпадающей с осью  $z$ , а  $x' \equiv \frac{dx}{dz}$  — угол с осью  $z$  (малый в параксиальном приближении),  $F_{21}$  — фокусное расстояние сферической поверхности (порядок индексов задаёт направление движения  $1 \rightarrow 2$ : от 1 к 2). Последовательным перемножением матриц  $M$  можно получить матрицу тонкой линзы, использованием матрицы переноса совместно с матрицами сферических поверхностей получают матрицу толстой линзы и т.д.

Однако более привлекателен матричный формализм с использованием лучевых матриц и лучевых векторов, развитый на базе приведённого. Пусть луч без преломления пересекает опорные плоскости  $OP_1$  и  $OP_2$  (см. рис.5). Тогда можно записать:

$$y_2 = y_1 + t \cdot tgu_1 = y_1 + t \cdot u_1 = y_1 + \frac{t n}{n u_1} = y_1 + TU_1, \quad (25)$$

$T$  — приведённая толщина оптического промежутка;  $U$  — оптический направляющий косинус. Так как  $u_2 = u_1$ , то  $U_2 = U_1$  и тогда

$$y_2 = 1 \cdot y_1 + T \cdot U_1, \quad U_2 = 0 \cdot y_1 + 1 \cdot U_1, \quad (26)$$

что удобно записать в виде

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ U_1 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ U_1 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

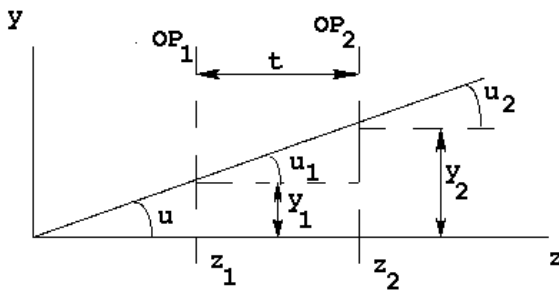


Рис. 5. К введению лучевых матриц и лучевых векторов.

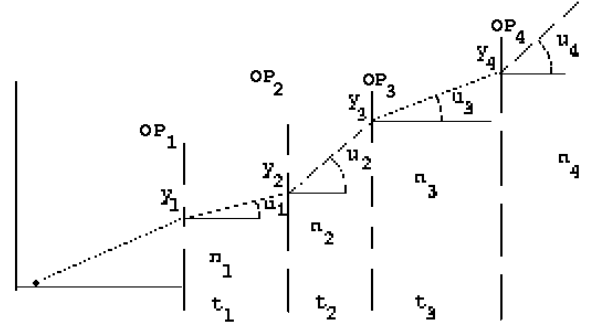


Рис. 6. К введению лучевых матриц и лучевых векторов в случае сред с разными показателями преломления.

В случае сред с разными показателями преломления (см. рис.6)

$$\begin{aligned} y_4 &= y_3 + t_3 u_3 = y_2 + t_2 u_2 + t_3 u_3 = y_1 + t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3, \\ n_1 \sin u_1 &= n_2 \sin u_2 = n_3 \sin u_3 = n_4 \sin u_4, \\ n_1 u_1 &= n_2 u_2 = n_3 u_3 = n_4 u_4, \\ U_1 &= U_2 = U_3 = U_4, \\ y_4 &= 1 \cdot y_1 + U_1(T_1 + T_2 + T_3), \\ U_4 &= 0 \cdot y_1 + 1 \cdot U_1, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{pmatrix} y_4 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T_1 + T_2 + T_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ U_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y_1 \\ U_1 \end{pmatrix} = M_1 M_2 M_3 \begin{pmatrix} y_1 \\ U_1 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \sum_k T_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

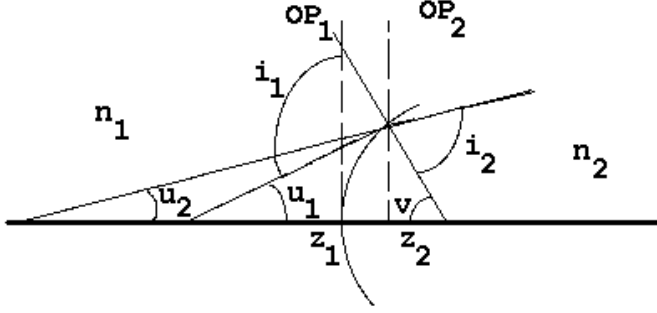


Рис. 7. К связи матричного формализма с формализмом геометрической оптики.

В случае сферической поверхности (см. рис.7) в параксиальном приближении, когда  $v \rightarrow 0$ ,  $z_2 - z_1 \simeq 0$ , следовательно,  $y_2 \simeq y_1$  и  $n_1 i_1 = n_2 i_2$ .  $i_1 = u_1 + v = u_1 + \frac{y_1}{R}$ ,  $i_2 = u_2 + v = u_2 + \frac{y_2}{R}$ , поэтому  $n_1(u_1 + \frac{y_1}{R}) = n_2(u_2 + \frac{y_2}{R})$  или  $U_1 + \frac{n_1 y_1}{R} = U_2 + \frac{n_2 y_2}{R}$ , откуда  $U_2 = U_1 + \frac{n_1 y_1}{R} - \frac{n_2 y_2}{R} = U_1 + \frac{y_1}{R}(n_1 - n_2)$ . Тогда для преломляющей сферической поверхности можно записать:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ U_1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} y_1 \\ U_1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Для линзы

$$R_2 M R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_3 - n_2}{R_2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{R_1} & 1 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Линза тонкая, когда  $T = 0$ , т.е.

$$\begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \quad (33)$$

тогда

$$R_2 M R_1 \rightarrow R_2 R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_3 - n_2}{R_2} - \frac{n_2 - n_1}{R_1} & 1 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Таким образом, матрица оптической системы запишется как

$$\begin{pmatrix} y \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ U_0 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Если  $a_{11} = 0$ , то  $y = a_{12} U_0$ , т.е. все лучи, падающие на оптическую систему под одинаковым углом  $u_0 = \frac{U_0}{n}$ , соберутся в одной точке опорной плоскости  $OP_2$ .

Если  $a_{12} = 0$ , то  $y = a_{11} y_0$ , т.е. все лучи, вышедшие из одной точки  $OP_1$ , с координатой  $y_0$  после прохождения системы соберутся в одной точке  $OP_2$  с координатой  $y$ .

Если  $a_{21} = 0$ , то  $U = a_{22} U_0$ , т.е. все лучи, падающие на оптическую систему под одинаковыми углами  $u_0 = \frac{U_0}{n}$ , выйдут из неё под одинаковыми углами  $u = \frac{U}{n}$ .

Если  $a_{22} = 0$ , то  $U = a_{21} y_0$ , т.е. все лучи, вышедшие из одной точки  $OP_1$ , с координатой  $y_0$  после прохождения системы будут распространяться параллельно друг другу под углом  $u = \frac{U}{n}$ .

Матрицы второго ранга достаточно для описания оптической системы, изображённой на рис.7, поскольку система радиально-симметрична, а  $z$  - координата

просто связана с  $y$ -координатой через тангенс угла. В более общем случае второй ранг матрицы недостаточен для описания оптической системы, например в случае прямоугольной преломляющей поверхности, и тогда произвольный луч  $(\ell_1 h_1 h_2 \ell_2)$  окажется определённым однозначно, если задана четвёрка координат  $(x_1, \phi_1, y_1, \psi_1)$  для исходного луча и  $(x_2, \phi_2, y_2, \psi_2)$  для преобразованного луча, т.е.

$$A_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \phi_1 \\ y_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ \phi_2 \\ y_2 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (36)$$

$$A_2 = M \cdot A_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ \phi_2 \\ y_2 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{14} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{41} & \dots & m_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \phi_1 \\ y_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

В этом подходе векторно-матричный аппарат четырёхмерен. Однако существуют два частных случая, когда можно ограничиться квазидвумерными векторами и матрицами. Первый — случай стигматических систем. В этом случае все меридиональные плоскости эквивалентны и  $M$  при любой ориентации поперечных осей  $X$  и  $Y$  приобретает квазидиагональный вид:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & C & D \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Второй — рассматриваемая оптическая система обладает простым астигматизмом, т.е. главные меридиональные сечения всех оптических поверхностей системы и неоднородных сред, заполняющих систему, совпадают или развёрнуты на  $90^\circ$ . Условие простого астигматизма заключается в выполнении одного из условий:

$$K = \frac{m_{13} + m_{31}}{m_{11} - m_{33}} = \frac{m_{14} + m_{32}}{m_{12} - m_{34}} = \frac{m_{23} + m_{41}}{m_{21} - m_{43}} = \frac{m_{24} + m_{42}}{m_{22} - m_{44}} \text{ ю} \quad (39)$$

В зависимости от свойств конкретной оптической системы некоторые из дробей этого выражения могут давать  $\frac{0}{0}$ . Однако если астигматизм системы существует, то хотя бы одно из этих соотношений даёт определённое значение  $K$ . В этом случае, совмещая координатные плоскости  $XZ$  и  $YZ$  с главными сечениями оптической системы, можно привести лучевую матрицу к квазидиагональному виду

$$M = \begin{pmatrix} A_x & B_x & 0 & 0 \\ C_x & D_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_y & B_y \\ 0 & 0 & C_y & D_y \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Для этого надо развернуть оси  $X$  и  $Y$  на угол  $\alpha$  —  $\alpha = \frac{1}{2} \arctan K$ . Представить матрицу общего вида в согласованной системе координат можно, подействовав на неё оператором кручения  $M_0 = S(\alpha) \cdot M \cdot S(-\alpha)$ , где

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Однако такой четырёхмерный формализм удобен только в рамках параксиального приближения, с использованием которого проводятся обычно расчёты оптических систем.

Как известно, [6,19,20] и др., инвариант Лагранжа–Гельмгольца накладывает сильнейшие ограничения на концентрирующие возможности оптических приборов. При попытке сконструировать оптическую систему нарушающую условия применимости (20), (22), (23) неизбежны потери света. Например, при размере предмета  $y_1 = 10$  мм и угле поля зрения объектива  $u_1 = 30^\circ$ , ( $n_1 = n_2 = 1$ )  $y_1 \sin u_1 = 5$ , что даже при угле  $u_2 = 90^\circ$ , когда  $\sin u_2 = 1$ , предполагает получение изображения размером не менее 5 мм. Более того, как известно [6], для получения **качественного изображения** относительное отверстие объектива не может быть больше, чем 1 : 0.5 и только для оптических систем, от которых не требуется изображение (пржектора, конденсоры и т.д.), возможны относительные отверстия 3 : 1; 5 : 1 и больше. Для концентрирующих систем большие углы поля зрения означают бóльшие световые потоки.

Применительно к адиабатическим световодам, как указывают многие авторы [1,6,19,20,21,22], это означает выполнение закона отношения площадей: т.е. свет теряется при переходе от бóльшей площади к меньшей в отношении площадей раз

$$k_{потерь} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{s_1}{s_2}.$$

Однако геометрическая оптика является удобным, но приближением, поэтому возможны (и они существуют) отклонения от её предсказаний. Уже геометрические построения для толстой линзы показывают пересечение оптической оси лучами, падающими на линзу под разными углами, в разных точках (сферическая абберация).

При выводе инварианта Лагранжа–Гельмгольца не только приходится использовать параксиальное приближение, но и прибегать к новым: приравнению малоотличающихся длин отрезков и т.д.

Существуют отклонения от предсказаний в преломлении и отражении от криволинейных поверхностей [13], в отражении от усиливающих сред [23,24] и т.д.

При попытке проверить экспериментально выполнение закона отношения площадей в работе [25], было показано, что этот закон не выполняется. Это может означать как надежду на создание более совершенного световода, так и недостаточно тщательное выполнение экспериментов, ввиду необходимости изготовления

большого количества прецизионно изготовленных адиабатических световодов разных размеров и форм.

Следует заметить, что переход в (24) к понятию фокусного расстояния однозначно определяет и переход к геометрической оптике. При этом теорема Лиувилля не может регламентировать поведение пучков света в оптической системе, рассчитанной по законам геометрической оптики, но для света, эти законы нарушающего (стр. 9 ([13,23,24] и др.).

Все, что требуется для выполнения теоремы Лиувилля — это равенство 1 детерминантов матриц преобразования.

### 3. Формализм расчётов непараксиальной оптики

Как показано в работе [26], (см. рис.8) расчеты в шестимерном пространстве предоставляют некоторые преимущества по сравнению с расчетами в трехмерном пространстве. В работе [26] выходные параметры меридиональных лучей некоторой оптической системы  $\vec{r}_2, \vec{g}_2$  связаны со входными  $\vec{r}_0, \vec{g}_0$  без использования приближений геометрической оптики ( $\vec{r}, \vec{g}$  — соответственно координаты точек и направляющие косинусы лучей, исходящих из этих точек):

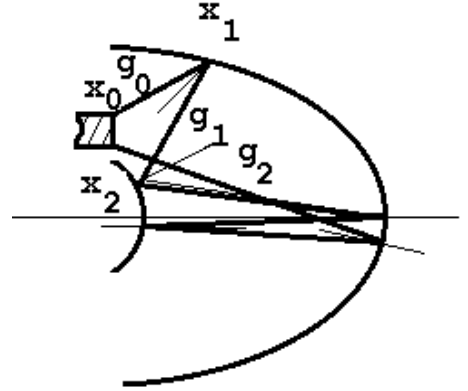


Рис. 8. Ход луча в двухзеркальной системе.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + g_{1x}\ell_1 = x_0 + g_{0x}\ell_0 + g_{0x}\ell_1 - \ell_1 \text{scal}_1 \frac{x_1^2}{a_1^2} = \\ &= x_0 \left(1 - \ell_1 \frac{\text{scal}_1}{a_1^2}\right) + g_{0x} \left(\ell_0 + \ell_1 - \ell_0 \ell_1 \frac{\text{scal}_1}{a_1^2}\right) = \\ &= x_0 \left(1 - \ell_1 \frac{\text{scal}_1}{a_1^2}\right) + g_{0x} \left[\ell_0 + \ell_1 \left(1 - \ell_0 \frac{\text{scal}_1}{a_1^2}\right)\right]; \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} g_{2x} &= g_{1x} - \text{scal}_2 \frac{x_1 + g_{1x}\ell_1}{a_2^2} = -x_1 \frac{\text{scal}_2}{a_2^2} + g_{1x} \left(1 - \ell_1 \frac{\text{scal}_2}{a_2^2}\right) = \\ &= -(x_0 + g_{0x}\ell_0) \frac{\text{scal}_2}{a_2^2} + \left(g_{0x} - \text{scal}_1 \frac{x_0 + g_{0x}\ell_0}{a_1^2}\right) \left(1 - \ell_1 \frac{\text{scal}_2}{a_2^2}\right) = \\ &= -x_0 \left[\frac{\text{scal}_2}{a_2^2} + \left(1 - \ell_1 \frac{\text{scal}_2}{a_2^2}\right) \frac{\text{scal}_1}{a_1^2}\right] + g_{0x} \left[1 - \ell_0 \frac{\text{scal}_1}{a_1^2} - \ell_1 \frac{\text{scal}_2}{a_2^2} - \ell_0 \left(1 - \ell_1 \frac{\text{scal}_2}{a_2^2}\right) \frac{\text{scal}_1}{a_1^2}\right] = \\ &= -x_0 \left[\frac{\text{scal}_2}{a_2^2} + \left(1 - \ell_1 \frac{\text{scal}_2}{a_2^2}\right) \frac{\text{scal}_1}{a_1^2}\right] + g_{0x} \left[-\ell_0 \frac{\text{scal}_2}{a_2^2} + \left(1 - \ell_0 \frac{\text{scal}_1}{a_1^2}\right) \left(1 - \ell_1 \frac{\text{scal}_2}{a_2^2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Аналогичные выражения можно записать для  $y_2, g_{2y}$  и для  $z_2, g_{2z}$ , где  $(x, y, z)$  и  $(g_x, g_y, g_z)$  — соответственно координатные и угловые переменные системы,  $\ell$  — параметр в уравнении луча,  $\text{scal} = \frac{2(\vec{g}\vec{n})}{|\vec{n}|^2}$  — некоторая переменная, выражающаяся через параметры соответствующей поверхности ( $\vec{n}$  — нормаль к поверхности). Эти уравнения можно представить в матричном виде для радиально-симметричных относительно оси  $OX$  поверхностей:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ g_{2x} \\ g_{2y} \\ g_{2z} \end{pmatrix} = M^6 \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ g_{0x} \\ g_{0y} \\ g_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ell_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ell_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ell_1 \\ -\frac{scal_2}{a_2^2} & 0 & 0 & 1 - \ell_1 \frac{scal_2}{a_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{scal_2}{b_2^2} & 0 & 0 & 1 - \ell_1 \frac{scal_2}{b_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{scal_2}{b_2^2} & 0 & 0 & 1 - \ell_1 \frac{scal_2}{b_2^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ell_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ell_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ell_0 \\ -\frac{scal_1}{a_1^2} & 0 & 0 & 1 - \ell_0 \frac{scal_1}{a_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{scal_1}{b_1^2} & 0 & 0 & 1 - \ell_0 \frac{scal_1}{b_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{scal_1}{b_1^2} & 0 & 0 & 1 - \ell_0 \frac{scal_1}{b_1^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ g_{0x} \\ g_{0y} \\ g_{0z} \end{pmatrix}, \quad (44)$$

где  $M^6$  обозначена матрица  $6 \times 6$  с элементами:

$$\begin{aligned}
M_{11}^6 &= 1 - \ell_1 \frac{scal_1}{a_1^2}, \quad M_{12}^6 = 0, \quad M_{13}^6 = 0, \quad M_{14}^6 = \ell_0 + \ell_1 \left(1 - \ell_0 \frac{scal_1}{a_1^2}\right), \quad M_{15}^6 = 0, \quad M_{16}^6 = 0, \\
M_{21}^6 &= 0, \quad M_{22}^6 = 1 - \ell_1 \frac{scal_1}{b_1^2}, \quad M_{23}^6 = 0, \quad M_{24}^6 = 0, \quad M_{25}^6 = \ell_0 + \ell_1 \left(1 - \ell_0 \frac{scal_1}{b_1^2}\right), \quad M_{26}^6 = 0, \\
M_{31}^6 &= 0, \quad M_{32}^6 = 0, \quad M_{33}^6 = 1 - \ell_1 \frac{scal_1}{c_1^2}, \quad M_{34}^6 = 0, \quad M_{35}^6 = 0, \quad M_{36}^6 = \ell_0 + \ell_1 \left(1 - \ell_0 \frac{scal_1}{c_1^2}\right), \\
M_{41}^6 &= -\frac{scal_2}{a_2^2} - \left[\frac{scal_1}{a_1^2} \left(1 - \ell_1 \frac{scal_2}{a_2^2}\right)\right], \quad M_{42}^6 = 0, \quad M_{43}^6 = 0, \\
M_{44}^6 &= \ell_0 \frac{scal_2}{a_2^2} + \left(1 - \ell_0 \frac{scal_1}{a_1^2}\right) \left(1 - \ell_1 \frac{scal_2}{a_2^2}\right), \quad M_{45}^6 = 0, \quad M_{46}^6 = 0, \\
M_{51}^6 &= 0, \quad M_{52}^6 = -\frac{scal_2}{b_2^2} - \left[\frac{scal_1}{b_1^2} \left(1 - \ell_1 \frac{scal_2}{b_2^2}\right)\right], \quad M_{53}^6 = 0, \quad M_{54}^6 = 0 \\
M_{55}^6 &= \ell_0 \frac{scal_2}{b_2^2} + \left(1 - \ell_0 \frac{scal_1}{b_1^2}\right) \left(1 - \ell_1 \frac{scal_2}{b_2^2}\right), \quad M_{56}^6 = 0, \\
M_{61}^6 &= 0, \quad M_{62}^6 = 0, \quad M_{63}^6 = -\frac{scal_2}{c_2^2} - \left[\frac{scal_1}{c_1^2} \left(1 - \ell_1 \frac{scal_2}{c_2^2}\right)\right], \quad M_{64}^6 = 0, \quad M_{65}^6 = 0, \\
M_{66}^6 &= \ell_0 \frac{scal_2}{c_2^2} + \left(1 - \ell_0 \frac{scal_1}{c_1^2}\right) \left(1 - \ell_1 \frac{scal_2}{c_2^2}\right),
\end{aligned}$$

т.е. шесть величин пространства предметов связаны с шестью величинами пространства изображений с помощью матрицы шестого ранга. Непосредственным дифференцированием можно убедиться, что эта матрица, как и следовало ожидать, представляет собой якобиан перехода в шестимерном интеграле от переменных  $(x_0, y_0, z_0, g_{0x}, g_{0y}, g_{0z})$  к переменным  $(x_2, y_2, z_2, g_{2x}, g_{2y}, g_{2z})$ , т.е. от области  $D_0$  к  $D_2$ . Нетрудно убедиться, что как требуется для сохранения фазового объёма [8], все матрицы из выражения (44) имеют детерминанты равные 1. Это означает, что рассчитать идеальную непараксиальную оптическую систему сохраняющую фазовый объём можно. В этом представлении якобиан перехода — лучевая матрица системы явно выражен через параметры оптических поверхностей, что предоставляет значительные вычислительные преимущества при определении параметров поверхностей.

Как показано в работе [26], идеальная оптическая система из двух эллипсоидов способна сфокусировать лучи света, испускаемые предметом в виде кольца с диаметром 18 мм и толщиной 1 мм под углами  $\simeq +42^\circ$  и  $\simeq -42^\circ$  к оси системы в



изображение с диаметром  $\sim .01$  мм. В процессе расчётов выявилось свойство алгоритма крайне резко реагировать на небольшие изменения используемых в расчёте величин, небольшие изменения параметров зачастую приводят к непредсказуемым результатам. Это означает, что реальная система должна изготавливаться с высокой точностью. Однако в данной работе задача анализа точностных характеристик или отклонений от идеальности не ставилась.

## Заключение

Алгоритм применим для любых систем, подчиняющихся уравнениям Гамильтона: в оптике пучков частиц, акустике, радиотехнике и т.д. В шестимерном представлении лучевая матрица системы, якобиан перехода, явно выражен через параметры оптических поверхностей, что предоставляет значительные вычислительные преимущества при определении параметров поверхностей и их взаимного расположения. Однако это не единственное преимущество. При получении якобиана нам не понадобилось делать никаких приближений, в том числе не нужно использовать параксиальное приближение, а значит в этом подходе влияние теоремы Лагранжа–Гельмгольца скажется только в случае перехода к конкретной конструкции, рассчитанной, например, для случая параксиальных пучков, когда эта теорема справедлива. Точно так же требования стигматичности и гомоцентричности служат потребностям получения качественного изображения.

Полезно поэтому, минимально используя привычные приёмы вычислительной оптики, рассчитать оптическую систему, не предназначенную для получения изображения (неизображающая оптика [3,4,27,28,29,30]). Такой расчёт двухзеркальной конструкции с большим углом поля зрения выполнен в нашей работе [26] и показывает принципиальную работоспособность алгоритма и рассчитываемой с его помощью конструкции.

## Список литературы

- [1] Garwin R.L. The Design of Liquid Scintillation Cells. // Rev. Sci. Instr. 1952, v.23, p. 755.
- [2] Garwin R.L. Light collection of Scintillation Counters. // Rev. Sci. Instr. 1960, v.31, p. 1010.
- [3] Winston R. Light Collection within the Framework of Geometrical Optics. JOSA, v.60, №2, 1970, pp. 245 - 247.
- [4] Basset I.M., Welford W.T., Winston R. Nonimaging Optics for Flux Concentration. – In: Progress in Optics, v.XXVII, 1989, pp. 161 - 226.
- [5] Ries H.R., Winston R. Tailored edge-ray reflectors for illumination. JOSA, A, vol. 11, №4, 1994, pp. 1259 - 1264.

- [6] Слюсарев Г.Г. О возможном и невозможном в оптике. – М.: Глав. ред. физ.-мат. лит., 1960.
- [7] Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Наука, 1973.
- [8] Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970.
- [9] Терлецкий Я.П. Статистическая физика. – М.: Высшая школа, 1973.
- [10] Мешков И.Н., Чириков Б.В. Электромагнитное поле. чч. 1,2. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1987.
- [11] Саржевский А.М. Оптика. тт. 1,2. – Минск: Изд. Университетское, 1984.
- [12] Мешков В.В. Основы светотехники. – М.: Энергия, 1979.
- [13] Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. – М.: Сов. радио, 1970.
- [14] Clark J.R. On Reversibility and Irreversibility in Optics. // JOSA, 1953, v.43, №2, pp. 138 - 144.
- [15] Мешков И.Н. Транспортировка пучков заряженных частиц. – Новосибирск, Наука: Сибирское отделение, 1991.
- [16] Джерард А., Бёрч Дж.М. Введение в матричную оптику. – М.: Мир, 1978.
- [17] Сайкин А.С., Морозова Н.Н. Элементы матричной оптики. Матричный формализм в геометрической оптике. – Чебоксары: изд. Чувашского университета, 1993.
- [18] Ищенко Е.Ф., Тимофеев А.С., Янина Г.М. Метод лучевых матриц и элементы вычислительной оптики. – М.: МЭИ, 1989.
- [19] Зверев В.А. Эквивалентные преобразования световой трубки и их приложения. // ОМП. 1990, №9, с. 43 - 46.
- [20] Цирлин Ю. А. Светособирание в сцинтилляционных счётчиках. – М.: Атомиздат, 1975.
- [21] Сапожников Р.А. Теоретическая фотометрия. – Л.: Энергия, Л. отд., 1967.
- [22] Гуревич М.М. Введение в фотометрию. – Л.: Энергия, Л. отд., 1968.
- [23] Бойко Б.Б., Петров Н.С. Отражение света от усиливающих и нелинейных сред. – Минск: Наука и техника, 1988.

- [24] Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.
- [25] Мосенжник Ю.У. и др. Пропускание света адиабатическими световодами. // ОМП. 1980. №12, , с.36.
- [26] Дацко В.С., Дацко Н.А. Автоматизированный габаритный расчёт оптического двухзеркального концентратора света. Препринт ИФВЭ 95-132. – Протвино, 1995.
- [27] Баранов В.К. Фоконная отражающая система. // ОМП. 1967. №2, с. 5.
- [28] Davies P.A. Edge-ray principle of nonimaging optics. // JOSA. 1994. A, vol. 11, №4, pp. 1256 - 1259.
- [29] Minano J.C. Design of three-dimensional nonimaging concentrators with inhomogeneous media. // JOSA. 1986. A, vol. 3, №9, pp. 1345 - 1353.
- [30] Minano J.C. Two-dimensional nonimaging concentrators with inhomogeneous media: a new look. // JOSA. 1985. A, vol. 2, №11, 1985, pp. 1826 - 1831.

*Рукопись поступила 16 октября 1996 г.*

В.С. Дацко, Н.А. Дацко.

Использование теоремы Лиувилля в оптических расчётах.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы  $\text{\LaTeX}$ .

Редактор Н.В.Ежела.

Технический редактор Н.В.Орлова.

---

Подписано к печати 1.11.96. Формат  $60 \times 84/8$ .      Офсетная печать.  
Печ.л. 2,12.    Уч.-изд.л. 1,63.    Тираж 200.    Заказ 836.    Индекс 3649.  
ЛР №020498 17.04.97.

---

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий  
142284, Протвино Московской обл.

