ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 96–96
ОТФ

В.О. Соловьев

НЕЗАВИСИМАЯ ОТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ АЛГЕБРА В ФОРМАЛИЗМЕ АШТЕКАРА

Протвино 1996

УДК 539.1.01 М–24

Аннотация

Соловьев В.О. Независимая от граничных условий алгебра в формализме Аштекара: Препринт ИФВЭ 96–96. – Протвино, 1996. – 20 с., библиогр.: 21.

Рассматривается алгебра генераторов пространственных диффеоморфизмов и калибровочных преобразований в каноническом формализме общей теории относительности в переменных Аштекара и АДМ. Используется предложенная ранее модификация полевой скобки Пуассона поверхностными членами, которая позволяет рассматривать в качестве допустимых все локальные функционалы. Показано, что замыкание указанной алгебры можно обеспечить еще до наложения граничных условий путем выбора поверхностных членов в выражениях генераторов. При этом существенно, что на границе пуассонова структура для переменных Аштекара отлична от канонической.

Abstract

Soloviev V.O. Boundary Conditions Free Poisson Algebra in Ashtekar's Formalism: IHEP Preprint 96–96. – Protvino, 1996. – p. 20, refs.: 21.

The algebra of spatial diffeomorfism and gauge transformation generators is studied in the canonical formalism of General Relativity in Ashtekar and ADM variables. The previously proposed modification of field theory Poisson bracket by surface terms is exploited. It permits to consider all local functionals as admissible. It is shown that this algebra can be closed even before the fixing of boundary conditions due to special choice of surface terms in the generators. Here it is essential that the Poisson structure for the Ashtekar variables is not canonical on the boundary.

Введение

Принято считать, что в гамильтоновом формализме теории поля могут иметь смысл только скобки Пуассона между "дифференцируемыми" функционалами [1], [2]. Так называют функционалы, вариация которых не содержит граничного вклада. Однако само по себе это ограничение является излишним. Так, в работах [3], [4], [5] фактически предлагалось выйти за его рамки путем изменения традиционной формулы для скобок Пуассона. Недавно мы показали [6], [7], что такая модификация возможна и в весьма общем случае произвольных локальных функционалов, так что новая скобка удовлетворяет тождеству Якоби и требованиям антисимметрии и замкнутости еще до наложения каких-либо граничных условий. Таким образом, новая формула определяет алгебру скобок Пуассона для всех локальных функционалов, а не только для "дифференцируемых", как в стандартном подходе.

Нам представляется, что граничные условия должны быть приняты во внимание на следующем шаге подобно калибровочным условиям, учет которых означает лишь последующую редукцию исходной пуассоновой структуры.

В настоящей работе на конкретном примере будет показано, как с помощью нового определения скобки Пуассона [6], [7] известные алгебры могут быть реализованы независимо от выбора граничных условий. Рассматриваемые примеры представляют собой канонический формализм общей теории относительности в переменных Аштекара и АДМ. Особенностью подхода Аштекара является использование преобразования переменных, которое при учете поверхностных членов отличается от канонического [8]. Подобная неканоничность недавно обсуждалась также в работе [9].

Содержание данной работы состоит в следующем. Напомнив основные понятия гамильтонова формализма теории гравитации в переменных Арновитта, Дезера и Мизнера (АДМ) [10], мы анализируем замены переменных, ведущие к формализму Аштекара. После этого излагается мотивировка введения новой формулы для скобок Пуассона в теории поля. Ее применение первоначально иллюстрируется в подходе АДМ. Преобразование к переменным Аштекара ведет к появлению не-

обычного поверхностного вклада, который нарушает каноничность. Однако именно этот вклад позволяет сохранить алгебру генераторов, найденную первоначально в переменных АДМ.

1. Формализм АДМ

Пространство-время может быть понято как 4-многообразие, возникающее в результате временно́й эволюции геометрии 3-мерной пространственноподобной гиперповерхности. При этом динамическими переменными являются поля *риманова* метрического тензора $\gamma_{ij}(x^k)$, так что $\gamma_{ij}dx^i dx^j \geq 0$, и тензорной плотности сопряженных импульсов $\pi^{ij}(x^k)$, которая линейно связана с тензором внешней кривизны гиперповерхности $K_{ij}(x^k)$

$$\pi^{ij} = -\sqrt{\gamma}(K^{ij} - \gamma^{ij}K), \tag{1}$$

где γ^{ij} есть обратная к γ_{ij} матрица, $K = \gamma^{ij}K_{ij}$, $\gamma = \det|\gamma_{ij}|$, латинские индексы соответствуют пространственным координатам и пробегают значения $1, 2, 3$. Знак суммирования везде опускается.

Направление эволюции в каждой точке гиперповерхности задается времениподобным 4-вектором N^α, компоненты которого $N(x^k, t)$, $N^i(x^k, t)$ должны удовлетворять неравенству

$$N^2 \geq \gamma_{ij}N^i N^j. \tag{2}$$

Динамические уравнения порождаются гамильтонианом

$$H = \int\limits_\Omega \left(N\mathcal{H} + N^i\mathcal{H}_i\right) d^3x, \tag{3}$$

который является линейной комбинацией связей

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\gamma R + \frac{\pi^2}{2} - \mathrm{Sp}\pi^2\right), \quad \mathcal{H}_i = -2\pi^j_{i|j}, \tag{4}$$

и канонической скобкой Пуассона

$$\left\{\gamma_{ij}(x), \pi^{kl}(y)\right\} = \delta^{kl}_{ij}\delta(x, y) \equiv \frac{1}{2}\left(\delta^k_i\delta^l_j + \delta^k_j\delta^l_i\right)\delta(x, y), \tag{5}$$

так что

$$\dot{\gamma}_{ij} = \{\gamma_{ij}, H\}, \quad \dot{\pi}^{ij} = \{\pi^{ij}, H\}. \tag{6}$$

Для явного восстановления 4-мерной геометрии пространства-времени в произвольных координатах X^α, $\alpha = 0, 1, 2, 3$ следует задать дополнительно 4 функции, связывающие их с координатами (x^k, t)

$$X^\alpha = e^\alpha(x^k, t). \tag{7}$$

Если t_1 соответствует началу, а t_2 — концу временной эволюции, то при каждом фиксированном значении $t_1 \le t \le t_2$ уравнения (7) определяют вложение соответствующей этому значению гиперповерхности в пространство-время. Тогда функции $N(x^k,t), N^i(x^k,t)$ надо понимать как компоненты разложения 4-вектора N^α,

$$N^\alpha = \dot{e}^\alpha = Nn^\alpha + N^i e_i^\alpha, \tag{8}$$

по базису (n^α, e_i^α), сопоставленному гиперповерхности $t = \mathrm{const}$ в каждой ее точке, причем

$$e_i^\alpha = \frac{\partial e^\alpha}{\partial x^i}, \quad n_\alpha e_i^\alpha = 0, \quad n^\alpha n_\alpha = -1. \tag{9}$$

Найдя компоненты вектора единичной нормали n^α из (8) мы получаем искомую метрику пространства-времени

$$g^{\alpha\beta} = -n^\alpha n^\beta + e_i^\alpha e_j^\beta \gamma^{ij}. \tag{10}$$

Подробное обсуждение ковариантного гамильтонова формализма можно найти в работах Кухаржа[11].

Уравнения (6) пригодны не только для описания временной эволюции, но и, например, для описания преобразований пространственных координат на фиксированной гиперповерхности при $N = 0$:

$$\dot{\gamma}_{ij} = \mathcal{L}_{\vec{N}} \gamma_{ij} = N_{i|j} + N_{j|i}, \tag{11}$$

$$\dot{\pi}^{ij} = \mathcal{L}_{\vec{N}} \pi^{ij} = -N^i{}_{|k}\pi^{kj} - N^j{}_{|k}\pi^{ik} + \left(N^k \pi^{ij}\right)_{|k}, \tag{12}$$

где $\mathcal{L}_{\vec{N}}$ — производная Ли по направлению векторного поля N^i. Разумеется, переменная t в этом случае никак не может считаться временем.

Отметим, что для гамильтониана как генератора преобразований координат (x^k, t), задаваемых функциями N, N^i, имеет место пуассонова алгебра

$$\left\{H(N,N^i), H(M,M^j)\right\} = H(L,L^k), \tag{13}$$

где

$$L = N^i M_{,i} - M^i N_{,i}, \qquad L^k = \gamma^{ki}(NM_{,i} - MN_{,i}) + N^i M^k{}_{,i} - M^i N^k{}_{,i}. \tag{14}$$

На “локальном” языке эти равенства обычно представляют в виде

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} &= \left(\gamma^{ik}(x)\mathcal{H}_k(x) + \gamma^{ik}(y)\mathcal{H}_k(y)\right)\delta_{,i}(x,y), \\ \{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_k(y)\} &= \mathcal{H}_i(y)\delta_{,k}(x,y) + \mathcal{H}_k(x)\delta_{,i}(x,y), \\ \{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}(y)\} &= \mathcal{H}(x)\delta_{,i}(x,y). \end{aligned} \tag{15}$$

Благодаря этим соотношениям обеспечивается “независимость от пути”[12], т.е. независимость получаемой в результате интегрирования уравнений движения (6) 4-геометрии от выбора функций $N(x^k,t), N^i(x^k,t)$ при фиксированных начале и конце эволюции. Соотношения (14) в общем случае не задают алгебры Ли, так как

в них входит динамическая переменная γ^{ki}. Однако для преобразований пространственных координат, т.е. при $N = M = 0$ алгебра Ли имеет место

$$\left\{H(N^i), H(M^j)\right\} = H\left([N, M]^k\right), \tag{16}$$

где

$$[N, M]^k = N^i M^k{}_{,i} - M^i N^k{}_{,i}. \tag{17}$$

Естественно ожидать, что соотношения (14), (16) не зависят от выбора переменных и сохранятся при их заменах. Одну из таких замен мы и намерены рассмотреть в следующей главе.

В случае, когда гиперповерхность имеет границу (в том числе и бесконечно удаленную), все вышесказанное требует более детального рассмотрения. Гамильтониан может отличаться от (3) на поверхностные интегралы по границе, как, например, в работах [1], [13]. Мы перейдем к этому случаю позже.

2. Преобразование Аштекара

Вместо метрического тензора γ_{ij} введем триады E^a_i, так что $\gamma_{ij} = E^a_i E^a_j$, $a = 1, 2, 3$. Обратные к триадам матрицы будем обозначать E^i_a, т.е. $E^a_i E^j_a = \delta^j_i$, $E^a_i E^i_b = \delta^a_b$. Поскольку $\gamma^{kj}\gamma_{ji} = \gamma^{kj} E^a_j E^a_i = \delta^k_i$, то обратную матрицу можно получить поднимая индекс с помощью γ^{kj}, $E^k_a = E^{ka} = \gamma^{kj} E^a_j$. Положение внутреннего индекса a безразлично. Нетрудно также убедиться, что

$$\gamma^{ij} = E^{ia} E^{ja}, \qquad \gamma = \det|E^a_i E^a_j| = (\det|E^a_i|)^2 = E^2. \tag{18}$$

Введем сопряженные к полям триад импульсы π^i_a

$$\left\{E^a_i(x), \pi^j_b(y)\right\} = \delta^j_i \delta^a_b \delta(x, y), \tag{19}$$

которые легко связать с импульсами π^{ij}

$$\pi^{ij} = \frac{1}{4}\left(\pi^i_a E^j_a + \pi^j_a E^i_a\right). \tag{20}$$

При этом оказывается, что скобки Пуассона для переменных АДМ частично изменяются

$$\left\{\gamma_{ij}(x), \pi^{kl}(y)\right\} = \delta^{kl}_{ij}\delta(x, y), \qquad \{\gamma_{ij}(x), \gamma_{kl}(y)\} = 0, \tag{21}$$

но

$$\left\{\pi^{ij}(x), \pi^{kl}(y)\right\} = \frac{1}{4}\left(\gamma^{ik}\mathcal{M}^{jl} + \gamma^{il}\mathcal{M}^{jk} + \gamma^{jk}\mathcal{M}^{il} + \gamma^{jl}\mathcal{M}^{ik}\right)\delta(x, y), \tag{22}$$

где

$$\mathcal{M}^{ij} = \frac{1}{4}\left(E^{ia}\pi^j_a - E^{ja}\pi^i_a\right) = \mathcal{M}^{[ij]}. \tag{23}$$

Сохранение соответствия пуассоновых структур требует наложения связей $\mathcal{M}^{ij} = 0$, что обеспечивает также сохранение числа степеней свободы (симметричный тензор

$\gamma_{ij}(x)$ определялся в каждой точке 6 числами, а матрица триады $E^a_i(x)$ содержит 9 независимых компонент). Можно эквивалентным образом представить связи в виде

$$J^{ab} \equiv J^{[ab]} = 0, \quad \text{где} \quad J^{ab} = \mathcal{M}^{ij} E^a_i E^b_j. \tag{24}$$

При этом связи находятся в инволюции

$$\left\{\mathcal{M}^{ij}(x), \mathcal{M}^{kl}(y)\right\} = \frac{1}{4}\left(\gamma^{ik}\mathcal{M}^{jl} - \gamma^{il}\mathcal{M}^{jk} - \gamma^{jk}\mathcal{M}^{il} + \gamma^{jl}\mathcal{M}^{ik}\right)\delta(x,y). \tag{25}$$

Разумеется, выбор (E^a_i, π^i_a) в качестве канонических переменных не является единственным. С точки зрения предстоящего перехода к переменным Аштекара, удобнее использовать переменные $\left(\tilde{E}^{ia}, K^a_i\right)$, так что

$$\tilde{E}^{ia} = EE^{ia}, \quad K^a_i = K_{ij}E^{ja} + E^{-1}E_{ib}J^{ab}, \tag{26}$$

тогда

$$\left\{\tilde{E}^{ia}(x), K^b_j(y)\right\} = \frac{1}{2}\delta^i_j\delta^{ab}\delta(x,y), \tag{27}$$

$$\left\{\tilde{E}^{ia}(x), \tilde{E}^{jb}(y)\right\} = 0, \qquad \left\{K^a_i(x), K^b_j(y)\right\} = 0. \tag{28}$$

В работах [14] Аштекаром было предложено замечательное преобразование, которое позволило представить плотность гравитационного гамильтониана в виде полинома четвертой степени по каноническим переменным. Наше изложение следует в основном работе [15]. Преобразование Аштекара аналогично каноническим преобразованиям классической механики вида

$$q^A \to q^A, \quad p_A \to p_A + \frac{\partial F(q)}{\partial q_A}. \tag{29}$$

В данном случае вместо порождающей преобразование функции $F(q)$ используется функционал

$$F = F\left[\tilde{E}^{ia}\right] = \int\limits_{\Omega} \tilde{E}^{ia}\Gamma^a_i d^3x, \tag{30}$$

где

$$\Gamma^a_i = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}E_{jc}E^{jb}_{|i}. \tag{31}$$

а вместо частной производной по координате — вариационная производная Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\delta F}{\delta \tilde{E}^{ia}} = \Gamma^a_i. \tag{32}$$

Если не принимать во внимание поверхностные члены, то такое преобразование будет каноническим. Аштекаром одновременно вводится комплексная параметризация, так что новой переменной является связность

$$A^a_i = iK^a_i + \Gamma^a_i, \tag{33}$$

причем

$$\left\{\tilde{E}^{ia}(x), A^b_j(y)\right\} = \frac{i}{2}\delta^i_j\delta^{ab}\delta(x,y), \tag{34}$$

$$\left\{\tilde{E}^{ia}(x), \tilde{E}^{jb}(y)\right\} = 0, \qquad \left\{A^a_i(x), A^b_j(y)\right\} = 0. \tag{35}$$

Замена переменных в гамильтониане приводит, с точностью до поверхностных членов, к анализу которых мы перейдем в следующих главах, к выражению

$$H = \int\limits_{\Omega} \left(\mathcal{N}\epsilon^{abc}\tilde{E}^{ia}\tilde{E}^{jb}F^c_{ij} + N^i 2i\tilde{E}^{ja}F^a_{ij} + \hat{\xi}^a 2\mathcal{D}_i\tilde{E}^{ia}\right) d^3x. \tag{36}$$

Здесь

$$\mathcal{D}_i\tilde{E}^{ia} \equiv i\epsilon^{abc}J^{bc} \equiv i\epsilon^{abc}E_{ib}E_{jc}\mathcal{M}^{ij}, \tag{37}$$

а новая ковариантная производная $\mathcal{D}_i$ определяется формулой

$$\mathcal{D}_i\lambda^{ka} = \lambda^{ka}{}_{|i} + \epsilon^{abc}A^b_i\lambda^{kc}. \tag{38}$$

Кривизна связности A^a_i находится из соотношения

$$\left(\mathcal{D}_i\mathcal{D}_j - \mathcal{D}_j\mathcal{D}_i\right)\lambda^a = \epsilon^{abc}F^b_{ij}\lambda^c, \tag{39}$$

так что,

$$F^a_{ij} = \partial_i A^a_j - \partial_j A^a_i + \epsilon^{abc}A^b_i A^c_j. \tag{40}$$

Отметим, что в этой работе, как и в работе [8], связи и гамильтониан отличаются множителем 2, а скобка Пуассона — множителем 1/2 от приведенных в публикациях [14]. Уравнения движения при этом совпадают. Мы предпочитаем пользоваться данными обозначениями, поскольку тогда лагранжев множитель N^i совпадает с множителем АДМ-формализма, а $\mathcal{N} = E^{-1}N$.

Приведем для сравнения с АДМ-формализмом (15) и алгебру генераторов (36)

$$\{H(\mathcal{N}, N^i, \hat{\xi}^a), H(\mathcal{M}, M^j, \hat{\eta}^b)\} = H(\mathcal{L}, L^k, \hat{\lambda}^c), \tag{41}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= N^k\mathcal{M}_{,k} - \mathcal{M}N^k{}_{,k} - M^k\mathcal{N}_{,k} + \mathcal{N}M^k{}_{,k}, \\
L^k &= \tilde{E}^{ka}\tilde{E}^{ja}\left(\mathcal{N}\mathcal{M}_{,j} - \mathcal{M}\mathcal{N}_{,j}\right) + N^j M^k{}_{,j} - M^j N^k{}_{,j}, \\
\hat{\lambda}^c &= i\epsilon^{cab}\hat{\xi}^a\hat{\eta}^b + \frac{i}{2}F^c_{jk}(N^jM^k - M^jN^k) + \epsilon^{cab}F^a_{jk}\tilde{E}^{kb}N^j\mathcal{M}.
\end{aligned}$$

Далее в этой работе нас будет интересовать ситуация, когда поверхностные члены играют существенную роль. Будет показано, что в этом случае преобразование Аштекара отлично от канонического, а именно:

$$\left\{A^a_i(x), A^b_j(y)\right\} \neq 0. \tag{42}$$

3. Поверхностные члены и новая формула для скобок Пуассона

Напомним, что с геометрической точки зрения скобка Пуассона образована следующим образом

$$\{F, G\} = \mathsf{d}G \lrcorner (\mathsf{d}F \lrcorner \Psi), \tag{43}$$

где d — дифференциал (1-форма), Ψ — пуассонов бивектор (скобка Схоутена-Нейенхейса его с самим собой равна нулю), знак $\lrcorner$ обозначает операцию внутреннего умножения (здесь 1-форм на бивектор и на 1-вектор).

В теории поля обычно предполагается,[1] что

- F, G — локальные функционалы,

$$F = \int\limits_{\Omega} f\left(\phi_A(x), \partial_i \phi_A, \partial_i \partial_j \phi_A, \ldots\right) d^n x \equiv \int\limits_{\Omega} f\left(\phi_A^{(J)}(x)\right) d^n x; \tag{44}$$

- дифференциал определяется вариационной производной Эйлера-Лагранжа,[2]

$$\mathsf{d}F = \int\limits_{\Omega} \frac{\delta F}{\delta \phi_A} \delta \phi_A d^n x, \tag{45}$$

$$\frac{\delta F}{\delta \phi_A} = \frac{\partial f}{\partial \phi_A} - D_i \frac{\partial f}{\partial \phi_{A,i}} + D_i D_j \frac{\partial f}{\partial \phi_{A,ij}} + \ldots = (-1)^{|J|} D_J \frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(J)}}; \tag{46}$$

- коэффициенты $\hat{I}_{AB}$ пуассонова бивектора,

$$\Psi = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \frac{\delta}{\delta \phi_A} \wedge \hat{I}_{AB} \frac{\delta}{\delta \phi_B} d^n x, \tag{47}$$

  определяются из фундаментальных скобок полей, которые также локальны, т.е.

$$\{\phi_A(x), \phi_B(y)\} = \hat{I}_{AB} \delta(x, y); \tag{48}$$

- внутреннее произведение 1-формы и, например, 1-вектора (интегрированием по частям их всегда можно привести к виду, называемому каноническим) есть

$$\alpha \lrcorner \psi = \left(\int\limits_{\Omega} \alpha_A \delta \phi_A d^n x \right) \lrcorner \left(\int\limits_{\Omega} \psi_B \frac{\delta}{\delta \phi_B} d^n x \right) = \int\limits_{\Omega} \alpha_A \psi_A d^n x. \tag{49}$$

[1] В этой статье мы стараемся избегать мультииндексных обозначений $J = (j_1, \ldots, j_n)$, $|J| = j_1 + \ldots + j_n$, $\partial_J = \frac{\partial^{|J|}}{\partial^{j_1} x^1 \ldots \partial^{j_n} x^n}$, которые являются основными в работах [6], [7]. Они приводятся только в этой главе, параллельно со стандартными, для иллюстрации возникающей экономии места.

[2] Мы обозначаем D_i полную частную производную $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \phi^{J+i} \frac{\partial}{\partial \phi^J}$, причем $D_J = {D_1}^{i_1} \ldots {D_n}^{i_n}$.

Получающаяся в результате, согласно (43), скобка Пуассона дается формулой

$$\{F, G\} = \int\limits_{\Omega} \frac{\delta F}{\delta \phi_A} \hat{I}_{AB} \frac{\delta G}{\delta \phi_B} d^n x, \tag{50}$$

где в простейшем случае канонических переменных $\phi_A = (q_\alpha, p_\alpha)$ оператор $\hat{I}_{AB}$ есть постоянная антисимметричная матрица

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^\alpha_\beta \\ -\delta^\alpha_\beta & 0 \end{pmatrix}, \tag{51}$$

а в общем случае $\hat{I}_{AB}$ является антисимметричным дифференциальным оператором любого конечного порядка с коэффициентами, зависящими от полей ϕ_A и их производных (также произвольного конечного порядка),

$$\hat{I}_{AB} = -\hat{I}^*_{BA}, \tag{52}$$

где

$$\hat{I}_{AB} = I^{(0)}_{AB} + I^{(i)}_{AB} D_i + I^{(ij)}_{AB} D_i D_j + \ldots = I^K_{AB} D_K, \tag{53}$$

$$\hat{I}^*_{AB} = I^{(0)}_{BA} - D_i \circ I^{(i)}_{BA} + D_i D_j \circ I^{(ij)}_{BA} - \ldots = (-1)^{|K|} D_K \circ I^K_{BA}. \tag{54}$$

Приведенная формула для скобки Пуассона (50) имеет в теории поля строгое обоснование (в рамках так называемого формального вариационного исчисления [17], [18], [19]) при “хороших” граничных условиях, т.е. когда любые интегралы от полных дивергенций обращаются в нуль.

Однако в физике, в частности в гамильтоновом формализме теории гравитации, приходится иметь дело и с такими задачами, где это условие не выполняется. Например, при рассмотрении асимптотически плоского пространства-времени гамильтониан (3) должен быть дополнен поверхностными интегралами специального вида [1], [13]. Оказывается, что тем не менее и здесь можно использовать стандартную формулу для скобки Пуассона, если ограничиться классом “дифференцируемых” гамильтонианов, не содержащих поверхностных интегралов в своих вариациях. При этом удается сохранить определение дифференциала через производную Эйлера-Лагранжа. В работе [16] было показано, что при асимптотических граничных условиях на пространственной бесконечности, принятых в [1], [13], скобка Пуассона не выводит из класса “дифференцируемых” функционалов. Непосредственной проверкой можно убедиться и в справедливости тождества Якоби при тех же условиях.

В то же время, в указанных работах остаются неясности. Например, вычисляя скобки Пуассона генераторов АДМ-формализма по формуле (50) при граничных условиях работ [1], [13], мы получаем снова аналогичные генераторы, *включающие нужные поверхностные члены*, алгебра замыкается аналогично (13), (14). С другой стороны, нахождение скобки по таким формулам, как

$$\{H(N), H(M)\} = \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\Omega} N(x) M(y) \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} d^3x d^3y, \tag{55}$$

с помощью алгебры связей (15) не позволяет получить нужных поверхностных интегралов. Причина в том, что возникающие в промежуточных вычислениях интегралы типа

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \xi(x)\eta(y)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n \delta(x,y), \tag{56}$$

однозначно определены лишь при обращении в нуль всех поверхностных интегралов, а при граничных условиях работ [1], [13] это не так.

В середине 80-х годов появились публикации [3], [4], [5], выводящие за рамки описанного класса "дифференцируемых" функционалов. В них рассматривались функционалы, вариации которых могли иметь поверхностные составляющие, но не произвольные, а специального вида. С неизбежностью оказывалось, что стандартная формула для скобок Пуассона тогда неприменима, для нее нарушалось тождество Якоби. Предлагались новые формулы, отличающиеся от стандартной поверхностными членами.

Недавно нам удалось показать, что возможен весьма общий подход к нетривиальным граничным задачам, основанный на расширении формального вариационного исчисления на полные дивергенции. На основе этого подхода получена формула для скобки Пуассона, которая определена для всех локальных функционалов, независимо от выбора граничных условий. Эта ситуация представляется аналогичной ситуации с наложением калибровок в калибровочно-инвариантных теориях. Скобка Пуассона в обоих случаях известна нам заранее, до наложения граничных условий или, соответственно, калибровок, выбор которых до известной степени произволен. После же сделанного выбора скобка Пуассона должна измениться, и эта измененная скобка получает название скобки Дирака. К сожалению, явная демонстрация такой процедуры в случае граничных условий пока отсутствует.

Новая формула для скобки Пуассона возникает как результат обобщения всех трех ее "составляющих": дифференциала, пуассонова бивектора и операции спаривания. Это необходимо, если мы хотим сохранить все поверхностные члены в выражениях функционалов, m-форм и m-векторов.

Дифференциал локального функционала будет теперь его *полной* вариацией без отбрасывания граничных вкладов

$$\mathsf{d}F = \int\limits_{\Omega} f'_A \delta\phi_A d^m x, \tag{57}$$

где вводится производная Фреше

$$f'_A = \frac{\partial f}{\partial \phi_A} + \frac{\partial f}{\partial \phi_{A,i}} D_i + \frac{\partial f}{\partial \phi_{A,ij}} D_i D_j + \ldots = \frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(J)}} D_J. \tag{58}$$

Часто удобно использовать симметризованные ковариантные производные вместо частных

$$f'_A = \frac{\partial f}{\partial \phi_A} + \frac{\partial f}{\partial(\nabla_i \phi_A)}\nabla_i + \frac{\partial f}{\partial(\nabla_{(i}\nabla_{j)}\phi_A)}\nabla_{(i}\nabla_{j)} + \ldots \tag{59}$$

Полезна также запись через высшие эйлеровы операторы [17]

$$\begin{aligned}\mathsf{d}F &= \int\limits_{\Omega}\Big(E^0_A(f)\delta\phi_A + D_i\Big(E^{1,i}_A(f)\delta\phi_A\Big) + D_iD_j\Big(E^{2,ij}_A(f)\delta\phi_A\Big) + \ldots\Big)\,d^nx = \\ &= \int\limits_{\Omega} D_J\left(E^J_A(f)\delta\phi_A\right)d^nx, \qquad E^J_A(f) = (-1)^{|J|+|K|}\binom{K}{J}D_{K-J}\frac{\partial f}{\partial\phi^{(K)}_A}, \end{aligned} \tag{60}$$

причем оператором нулевого порядка E^0_A является обычная вариационная производная Эйлера-Лагранжа (46). Третий способ записи использует формальный прием, сводящий интеграл по конечной области Ω к интегралу по всему бесконечному пространству $\mathbb{R}^n$

$$F = \int\limits_{\Omega} f d^nx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\theta_\Omega f d^nx, \tag{61}$$

где

$$\theta_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x\in\Omega \\ 0 & \text{иначе}\end{cases}. \tag{62}$$

Ниже мы будем опускать у этой функции знак Ω, а у интеграла по всему пространству — знак $\mathbb{R}^n$. Получаем

$$\mathsf{d}F = \int E^0_A(\theta f)\delta\phi_A d^nx = \int\frac{\delta F}{\delta\phi_A}\delta\phi_A d^nx, \tag{63}$$

причем оказывается, что

$$E^0_A(\theta f) = \frac{\delta F}{\delta\phi_A} = \theta E^0_A(f) - \theta_{,i}E^{1,i}_A(f) + \theta_{,ij}E^{2,ij}_A(f) + \ldots = (-1)^{|J|}D_J\theta E^J_A(f). \tag{64}$$

Новая *полная* вариационная производная, для которой мы используем то же самое обозначение, что обычно применяется для производной Эйлера-Лагранжа, содержит в себе информацию не только о подынтегральном выражении f, но и об области интегрирования Ω, благодаря функции θ.

Вторым шагом является пересмотр определения бивектора, который также может быть понят как учет характеристической функции θ области Ω. При этом изменяется определение сопряженного оператора, используемое при "перебрасывании" производных с одного аргумента δ-функции на другой

$$\hat{I}_{AB}(x)\delta(x,y) = \hat{I}^*_{BA}\delta(x,y). \tag{65}$$

Например,

$$\theta(x)D_x\delta(x,y) = -\theta(y)D_y\delta(x,y) - \theta'\delta(x,y), \tag{66}$$

т.е. если

$$\hat{I} = \theta D, \tag{67}$$

то

$$\hat{I}^* = -\theta D - \theta' = -D\circ\theta. \tag{68}$$

Учет подобных членов позволяет, в частности, избежать неоднозначности и получать согласованные ответы при вычислениях по формулам типа (55) и (50).

Наконец, операция спаривания $\lrcorner$ (внутреннего умножения) 1-форм и бивекторов (в общем случае m-векторов), или наоборот, 1-векторов и 2-форм (в общем случае m-форм), также определяется заново, через след двух дифференциальных операторов. Если

$$\hat{A} = a_J D_J \equiv a + a_i D_i + a_{ij} D_i D_j + \ldots, \tag{69}$$

$$\hat{B} = b_K D_K \equiv b + b_k D_k + b_{kl} D_k D_l + \ldots, \tag{70}$$

то

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left(\hat{A}\hat{B}\right) &= ab + a_i \cdot D_i b + D_k a \cdot b_k + D_k a_i \cdot D_i b_k + D_k D_l a \cdot b_{kl} + D_k D_l a_i \cdot D_i b_{kl} + \\ &+ a_{ij} \cdot D_i D_j b + D_k a_{ij} \cdot D_i D_j b_k + D_k D_l a_{ij} \cdot D_i D_j b_{kl} + \ldots = \\ &= D_K a_J \cdot D_J b_K. \end{aligned} \tag{71}$$

В результате трех сделанных выше шагов по обобщению определений дифференциала, сопряженного оператора и спаривания мы приходим к новой формуле для скобки Пуассона. В дальнейших расчетах будет использоваться ее представление через производные Фреше

$$\{F, G\} = \int \mathrm{Tr}\left(f'_A \hat{I}_{AB} g'_B\right) d^n x, \tag{72}$$

причем θ-функции из оператора $\hat{I}_{AB}$ выносятся за знак следа, т.е. если

$$\hat{I}_{AB} = \theta \hat{I}^{\langle 0 \rangle}_{AB} + \theta_{,i} \hat{I}^{\langle i \rangle}_{AB} + \theta_{,ij} \hat{I}^{\langle ij \rangle}_{AB} + \ldots = D_J \theta \hat{I}^{\langle J \rangle}_{AB}, \tag{73}$$

то

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \int\limits_{\Omega} \mathrm{Tr}\left(f'_A \hat{I}^{\langle 0 \rangle}_{AB} g'_B\right) d^n x - \int\limits_{\Omega} D_i \mathrm{Tr}\left(f'_A \hat{I}^{\langle i \rangle}_{AB} g'_B\right) d^n x + \int\limits_{\Omega} D_i D_j \mathrm{Tr}\left(f'_A \hat{I}^{\langle ij \rangle}_{AB} g'_B\right) - \\ &- \ldots = (-1)^{|J|} \int\limits_{\Omega} D_J \mathrm{Tr}\left(f'_A \hat{I}^{\langle J \rangle}_{AB} g'_B\right) d^n x. \end{aligned} \tag{74}$$

Можно записать результат также через высшие эйлеровы производные

$$\{F, G\} = (-1)^{|L|} \int\limits_{\Omega} D_{J+K+L} \left(E^J_A(f) \hat{I}^{\langle L \rangle} E^K_B(g)\right) d^n x, \tag{75}$$

или в виде двойного интеграла с *полными* вариационными производными (64)

$$\{F, G\} = \int\int \frac{\delta F}{\delta \phi_A(x)} \frac{\delta G}{\delta \phi_B(y)} \{\phi_A(x), \phi_B(y)\} d^n x d^n y, \tag{76}$$

вычисление которого должно проводиться по правилам, изложенным в работе [6].

4. Поверхностные члены в АДМ-формализме

В качестве первого примера вычисления скобки Пуассона по формуле (72) рассмотрим скобку для функционалов, известных как генераторы пространственных диффеоморфизмов в асимптотически плоском пространстве-времени,

$$\Big\{H(N^i), H(M^j)\Big\} = \int\limits_{\Omega} \mathrm{Tr}\left(h'_{\gamma_{ij}}(N^i)h'_{\pi^{ij}}(M^j) - h'_{\gamma_{ij}}(M^j)h'_{\pi^{ij}}(N^i)\right) d^3x, \tag{77}$$

где

$$H(N^i) = \int\limits_{\Omega} N^i \mathcal{H}_i d^3x + \oint\limits_{\partial\Omega} 2\pi^j_i N^i dS_j \equiv \int \pi^{ij}(N_{i|j} + N_{j|i}) d^3x. \tag{78}$$

Вариация такого функционала имеет вид

$$\delta H = \int \left((N_{i|j} + N_{j|i})\delta\pi^{ij} + 2\pi^{ij}\delta(\gamma_{ik}(N^k{}_{,j} + \Gamma^k_{jm}N^m))\right) d^3x. \tag{79}$$

Воспользовавшись известной формулой

$$\delta\Gamma^k_{jm} = \frac{1}{2}\gamma^{kn}\left(\delta\gamma_{nj|m} + \delta\gamma_{nm|j} - \delta\gamma_{jm|n}\right), \tag{80}$$

находим

$$\delta H(N^i) = \int\limits_{\Omega} \left((N_{i|j} + N_{j|i})\delta\pi^{ij} + (\pi^{ik}N^j{}_{|k} + \pi^{kj}N^i{}_{|k})\delta\gamma_{ij} + N^k\pi^{ij}(\delta\gamma_{ij})_{|k}\right) d^3x, \tag{81}$$

откуда видно, что производные Фреше по каноническим переменным равны

$$h'_{\pi^{ij}}(N^i) = N_{i|j} + N_{j|i}, \tag{82}$$

$$h'_{\gamma_{ij}}(N^i) = \pi^{ik}N^j{}_{|k} + \pi^{kj}N^i{}_{|k} + N^k\pi^{ij}\nabla_k, \tag{83}$$

где ∇_k обозначает ту же ковариантную производную, согласованную с метрикой γ_{ij}, что и вертикальная черта. Таким образом, здесь производная Фреше генератора по импульсам является функцией, а производная по метрике — дифференциальным оператором. В отличие от вычислений, проводимых для нахождения производной Эйлера-Лагранжа, здесь нет необходимости интегрировать по частям.

Вычислим след

$$\mathrm{Tr}\left(h'_{\gamma_{ij}}(N^i)h'_{\pi^{ij}}(M^j)\right) = \left(\pi^{ik}N^j{}_{|k} + \pi^{kj}N^i{}_{|k} + N^k\pi^{ij}\nabla_k\right)(M_{i|j} + M_{j|i}). \tag{84}$$

Симметричные по N, M члены не дадут вклада в скобку Пуассона, и после переобозначения индексов получаем

$$\Big\{H(N^i), H(M^j)\Big\} = \int\limits_{\Omega} 2\pi^{ij}\left((N^k{}_{|j}M_{i|k} - M^k{}_{|j}N_{i|k}) + (N^kM_{i|jk} - M^kN_{i|jk})\right) d^3x. \tag{85}$$

Далее, изменим порядок вторых ковариантных производных согласно соотношению

$$M_{i|jk} = M_{i|kj} + R_{mijk} M^m, \tag{86}$$

тогда вклад

$$2\pi^{ij} R_{mijk} \left(N^k M^m - M^k N^m \right) \tag{87}$$

обращается в нуль, в силу свойств симметрии тензора Римана, следовательно,

$$\Big\{ H(N^i), H(M^j) \Big\} = \int\limits_{\Omega} 2\pi^{ij} \Big(N^k M_{i|k} - M^k N_{i|k} \Big)_{|j} d^3x = H([N, M]^k). \tag{88}$$

Мы видим, что генераторы $H(N^i)$ реализуют представление алгебры диффеоморфизмов 3-мерной гиперповерхности. При этом мы не задавали каких-либо специальных граничных условий, т.е. при обычном подходе эти генераторы не являются "дифференцируемыми" функционалами. С нашей точки зрения, это означает лишь то, что стандартной формулой для скобки Пуассона нельзя пользоваться в общем случае. Если попытаться формально вычислить ту же самую скобку, применяя обычную формулу (50), то результат будет отличаться от нашего ответа поверхностным интегралом:

$$\Delta \Big\{ H(N^i), H(M^j) \Big\} = - \oint\limits_{\partial\Omega} \pi^{ij} \left(N^k (M_{i|j} + M_{j|i}) - M^k (N_{i|j} + N_{j|i}) \right) dS_k. \tag{89}$$

Естественно, что в общем случае тождество Якоби для скобки (50) также не будет выполняться:

$$\Big\{ \{ H(N^i), H(M^j) \}, H(L^k) \Big\} + \Big\{ \{ H(L^i), H(N^j) \}, H(M^k) \Big\} + \Big\{ \{ H(M^i), H(L^j) \}, H(N^k) \Big\} \neq 0.$$

Условием выполнения тождества Якоби для стандартной скобки Пуассона будет здесь требование, чтобы N^i, M^j, L^k были векторами Киллинга метрики γ_{ij} на границе $\partial\Omega$, или чтобы они были касательными к границе. Очевидно, в первом случае новая и старая формулы дадут один и тот же результат, хотя функционалы $H(N^i)$, $H(M^j)$ и останутся "недифференцируемыми"

$$\delta H = \int\limits_{\Omega} \left(E^0_{\gamma_{ij}}(h) \delta\gamma_{ij} + E^0_{\pi^{ij}}(h) \delta\pi^{ij} \right) d^3x + \oint\limits_{\partial\Omega} N^k \pi^{ij} \delta\gamma_{ij} dS_k. \tag{90}$$

5. Поверхностные члены в формализме Аштекара

Естественно ожидать, что переход от переменных АДМ к переменным Аштекара не должен существенно повлиять на алгебру пространственных диффеоморфизмов (88). Однако имеются по меньшей мере две особенности этого преобразования, которые нам хотелось бы обсудить подробнее.

Во-первых, выше уже отмечалось, что переход к триадам сохраняет прежние скобки Пуассона лишь на поверхности связей $\mathcal{M}^{ij} = 0$, а следовательно, чтобы

получить полную (off-shell) структуру пуассоновой алгебры, необходимо проделать дополнительные вычисления.

Во-вторых, как также упоминалось ранее, преобразование Аштекара канонично лишь с точностью до поверхностных членов и важно понять, какую роль в алгебре играет неканонический вклад.

Поскольку речь идет о применении новой формулы для скобки Пуассона, мы считаем оправданным подробное изложение технических деталей расчетов. Общее доказательство инвариантности этой формулы при заменах зависимых переменных пока не опубликовано, и поэтому явная демонстрация этой инвариантности на конкретном примере не будет излишней.

Итак, начнем с проверки того, как изменится соотношение (16) при переходе к триадам. Поскольку

$$\left\{\pi^{ij}(x), \pi^{kl}(y)\right\} = \mathcal{C}^{ijkl}_{mn}\mathcal{M}^{mn}\delta(x,y), \tag{91}$$

где

$$\mathcal{C}^{ijkl}_{mn} = \frac{1}{4}\left(\gamma^{ik}\delta^{jl}_{mn} + \gamma^{il}\delta^{jk}_{mn} + \gamma^{jk}\delta^{il}_{mn} + \gamma^{jl}\delta^{ik}_{mn}\right), \tag{92}$$

то возникает дополнительный вклад в найденную ранее скобку, который обращается в нуль на поверхности связей $\mathcal{M}^{mn} = 0$,

$$\begin{aligned}
\Delta\left\{H(N^i), H(M^j)\right\} &= \int\limits_{\Omega} \mathrm{Tr}\left(h'_{\pi^{ij}}(N^i)\mathcal{C}^{ijkl}_{mn}\mathcal{M}^{mn}h'_{\pi^{kl}}(M^j)\right)d^3x = \\
&= \int\limits_{\Omega}(N_{i|j} + N_{j|i})\mathcal{C}^{ijkl}_{mn}\mathcal{M}^{mn}(M_{k|l} + M_{l|k})d^3x = \\
&= \int\limits_{\Omega}(N^k{}_{|m} + N_m{}^{|k})(M_{k|n} + M_{n|k})\mathcal{M}^{mn}d^3x.
\end{aligned} \tag{93}$$

Эта добавка может обратиться в нуль и вне поверхности связей, если хотя бы одно из векторных полей $N^i(x)$, $M^j(x)$ удовлетворяет уравнению Киллинга, т.е. сохраняет метрику $\gamma_{ij}(x)$ в области Ω.

Для вычисления скобки непосредственно в новых переменных, например в переменных (E^a_i, π^i_a), не всегда необходимо использовать явные выражения генераторов через эти переменные. Часто достаточно бывает выразить вариации старых полей через новые

$$\delta\gamma_{ij} = E^a_i\delta E^a_j + E^a_j\delta E^a_i, \tag{94}$$

$$\delta\pi^{ij} = \frac{1}{4}\left(E^{ia}\delta\pi^{ja} + \pi^{ja}\delta E^{ia} + E^{ja}\delta\pi^{ia} + \pi^{ia}\delta E^{ja}\right). \tag{95}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\delta H &= \int\limits_{\Omega}\left(h'_{\gamma_{ij}}\delta\gamma_{ij} + h'_{\pi_{ij}}\delta\pi^{ij}\right)d^3x = \int\limits_{\Omega}\left(\tilde{h}'_{E_{ia}}\delta E_{ia} + \tilde{h}'_{\pi^{ia}}\delta\pi^{ia}\right)d^3x = \\
&= \int\limits_{\Omega}\left(h'_{\gamma_{kj}}(\gamma_{kj})'_{E_{ia}}\delta E_{ia} + h'_{\pi_{kj}}(\pi^{kj})'_{E_{ia}}\delta E_{ia} + h'_{\pi_{kj}}(\pi^{kj})'_{\pi^{ia}}\delta\pi^{ia}\right)d^3x,
\end{aligned} \tag{96}$$

откуда находим

$$\tilde{h}'_{\pi^{ia}}(N^i) = h'_{\pi_{ij}}(N^i)\frac{1}{2}E^{ja} = \frac{1}{2}(N_{i|j} + N_{j|i})E^{ja}, \tag{97}$$

$$\begin{aligned}\tilde{h}'_{E_{ia}}(N^i) &= h'_{\gamma_{ij}}(N^i)2E_{ja} + h'_{\pi^{kl}}(N^i)\left(-\frac{1}{2}\right)\pi^{kb}E^{ib}E^{la} = \\ &= \left(\pi^{ik}N^l{}_{|k} + \pi^{kl}N^i{}_{|k} + N^k\pi^{il}\nabla_k\circ\right)2E_{la} - \frac{1}{2}(N_{k|l} + N_{l|k})\pi^{kb}E^{ib}E^{la}.\end{aligned} \tag{98}$$

При этом

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(\tilde{h}'_{E_{ia}}(N^i)\tilde{h}'_{\pi^{ia}}(M^j)\right) &= \left(\pi^{ik}N^l{}_{|k} + \pi^{kl}N^i{}_{|k} + N^k\pi^{il}\nabla_k\right)(M_{i|l} + M_{l|i}) - \\ &- \frac{1}{4}\pi^{kb}E^{ib}(N_k{}^{|j} + N^j{}_{|k})(M_{i|j} + M_{j|i}).\end{aligned} \tag{99}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\left\{H(N^i), H(M^j)\right\} &= \int\limits_\Omega \mathrm{Tr}\left(\tilde{h}'_{E_{ia}}(N^i)\tilde{h}'_{\pi^{ia}}(M^j) - \tilde{h}'_{E_{ia}}(M^i)\tilde{h}'_{\pi^{ia}}(N^j)\right)d^3x = \\ &= H([N,M]^k) + \int\limits_\Omega (N^k{}_{|m} + N_m{}^{|k})(M_{k|n} + M_{n|k})\mathcal{M}^{mn}d^3x,\end{aligned} \tag{100}$$

как следовало ожидать, ответ не изменился при этой замене переменных по сравнению с деформированной, согласно (91), (88), скобкой АДМ (93).

Аналогичным образом, рассмотрим переход к $\left(\tilde{E}^{ia}, K^a_i\right)$. Для этого воспользуемся (26) и легко проверяемым соотношением

$$\pi^{ia} = 2E\left(E^{ia}E^{jb} - E^{ib}E^{ja}\right)K^b_j, \tag{101}$$

тогда получаем

$$\begin{aligned}\delta E_{ia} &= \frac{1}{2E}(E_{ia}E_{jb} - 2E_{ja}E_{ib})\delta\tilde{E}^{jb}, \\ \delta\pi^{ia} &= 2E(E^{ia}E^{jb} - E^{ib}E^{ja})\delta K^b_j + \Bigg(2(K^b_jE^{ia} + K^c_kE^{kc}\delta^i_j\delta^{ab} - K^c_jE^{ic}\delta^{ab} - \\ &- K^b_kE^{ka}\delta^i_j) + K^c_kE_{jb}(E^{ic}E^{ka} - E^{kc}E^{ia})\Bigg)\delta\tilde{E}^{jb}.\end{aligned} \tag{102}$$

Вычисления, аналогичные предыдущим, также подтверждают, что результат не меняется при выборе новых переменных.

Отметим, что до сих пор мы рассматривали алгебраические преобразования, т.е. не содержащие зависимости от производных полей. При переходе к переменным Аштекара

$$\tilde{E}^{ia} \to \tilde{E}^{ia}, \quad K^a_i \to A^a_i = iK^a_i + \Gamma^a_i, \tag{103}$$

это свойство уже не имеет места, ибо

$$\Gamma_i^a = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\tilde{E}_{jc}\tilde{E}^{jb}_{|i}, \tag{104}$$

где $\tilde{E}_{jc}$ — обратная к $\tilde{E}^{ib}$ матрица. Выразив вариации старых переменных через новые, получим

$$\delta K_i^a = -i\delta A_i^a + i(\Gamma_i^a)'_{\tilde{E}^{jb}}\delta\tilde{E}^{jb}, \tag{105}$$

и таким образом, для произвольного функционала

$$\delta F = \int\limits_\Omega \left(f'_{\tilde{E}^{ia}}\delta\tilde{E}^{ia} + f'_{K_i^a}\delta K_i^a\right)d^3x = \int\limits_\Omega \left(\tilde{f}'_{\tilde{E}^{ia}}\delta\tilde{E}^{ia} + \tilde{f}'_{A_i^a}\delta A_i^a\right)d^3x, \tag{106}$$

где

$$\tilde{f}'_{\tilde{E}^{ia}} = f'_{\tilde{E}^{ia}} + f'_{K_j^b}\left(\Gamma_j^b\right)'_{\tilde{E}^{ia}}, \tag{107}$$

$$\tilde{f}'_{A_i^a} = -if'_{K_i^a}. \tag{108}$$

Если бы это преобразование было каноническим (с точностью до множителя i), то скобка Пуассона в новых переменных определялась бы по формуле

$$\begin{aligned}\{F,G\} &= \frac{i}{2}\int\limits_\Omega \mathrm{Tr}\left(\tilde{f}'_{\tilde{E}^{ia}}\tilde{g}'_{A_i^a} - \tilde{f}'_{A_i^a}\tilde{g}'_{\tilde{E}^{ia}}\right)d^3x = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \mathrm{Tr}\left(f'_{\tilde{E}^{ia}}g'_{K_i^a} - f'_{K_i^a}g'_{\tilde{E}^{ia}}\right)d^3x + \\ &+ \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left(f'_{K_j^b}(\Gamma_j^b)'_{\tilde{E}^{ia}}g'_{K_i^a} - f'_{K_i^a}g'_{K_j^b}(\Gamma_j^b)'_{\tilde{E}^{ia}}\right)d^3x.\end{aligned} \tag{109}$$

Но в таком случае инвариантность скобки была бы нарушена

$$\Delta_1\{F,G\} = \int\limits_\Omega \mathrm{Tr}\left(f'_{K_i^a}\hat{C}_{aibj}g'_{K_j^b}\right)d^3x, \tag{110}$$

где

$$\hat{C}_{aibj} = \frac{1}{2}\left((\Gamma_i^a)'_{\tilde{E}^{jb}} - \left[(\Gamma_j^b)'_{\tilde{E}^{ia}}\right]^*\right). \tag{111}$$

Мы видим, что предположение о каноничности переменных Аштекара ведет к неинвариантности скобки Пуассона. Но ранее было показано [8], еще с использованием стандартной формулы (50), что

$$\left\{A_i^a(x), A_j^b(y)\right\} = i\hat{C}_{aibj}(x)\delta(x,y) \neq 0, \tag{112}$$

а именно,

$$\begin{aligned}\left\{A_i^a(x), A_j^b(y)\right\} &= i\left\{\Gamma_i^a(x), K_j^b(y)\right\} + i\left\{K_i^a(x), \Gamma_j^b(y)\right\} = \frac{i}{2}\Bigg(\left(\Gamma_i^a(x)\right)'_{\tilde{E}^{jb}} - \\ &- \left(\Gamma_j^b(y)\right)'_{\tilde{E}^{ia}}\Bigg)\delta(x,y) = \frac{i}{2}\left(\left(\Gamma_i^a(x)\right)'_{\tilde{E}^{jb}} - \left[\left(\Gamma_j^b(x)\right)'_{\tilde{E}^{ja}}\right]^*\right)\delta(x,y).\end{aligned}$$

Если не учитывать поверхностные члены, то производная Фреше от производной Эйлера-Лагранжа является симметричным оператором [17], следовательно, здесь мы получаем чисто поверхностный вклад. Из-за неканоничности переменных Аштекара возникает, таким образом, вторая поправка

$$\Delta_2\{F,G\} = \int\limits_\Omega \mathrm{Tr}\left(\tilde{f}'_{A_i^a}\hat{C}_{aibj}\tilde{g}'_{A_j^b}\right)d^3x = -\int\limits_\Omega \mathrm{Tr}\left(f'_{K_i^a}\hat{C}_{aibj}g'_{K_j^b}\right)d^3x, \tag{113}$$

которая компенсирует первую. Новая формула для скобки Пуассона является инвариантной при замене $\left(\tilde{E}^{ia}, K_i^a\right) \to \left(\tilde{E}^{ia}, A_i^a\right)$, не исключая инвариантности и для поверхностных вкладов.

Инвариантность скобки позволяет использовать для вычислений алгебры генераторов различные переменные. Явные вычисления, исходящие из записи генераторов в формализме Аштекара, значительно более трудоемки, чем рассмотренные выше. Приведем для сравнения явное выражение генератора $H(N^i)$ в переменных Аштекара, наиболее краткий вывод которого дан в работе [20],

$$\begin{aligned} H(N^i) &= 2i\int\limits_\Omega N^k\tilde{E}^{ia}F^a_{ki}d^3x - 2i\oint\limits_{\partial\Omega}\left(A_i^a - \Gamma_i^a\right)\left(\tilde{E}^{ia}N^k - \tilde{E}^{ka}N^i\right)dS_k - \\ &- 2i\int\limits_\Omega\left(N^iA_i^c - \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\tilde{E}_{ib}\left(\tilde{E}^{ia}{}_{|k}N^k - \tilde{E}^{ka}N^i{}_{|k}\right)\right)\mathcal{D}_j\tilde{E}^{jc}d^3x. \end{aligned} \tag{114}$$

В качестве примера вычислений, проводимых непосредственно в переменных Аштекара, рассмотрим скобку генераторов комплексных вращений триад. Вариация генератора имеет вид

$$\delta H(\hat{\xi}^a) = \delta\int\limits_\Omega \hat{\xi}^a 2\mathcal{D}_i\tilde{E}^{ia}d^3x = \int\limits_\Omega\left(h'_{\tilde{E}^{jc}}(\hat{\xi}^a)\delta\tilde{E}^{jc} + h'_{A_j^c}(\hat{\xi}^a)\delta A_j^c\right)d^3x, \tag{115}$$

где

$$h'_{\tilde{E}^{jc}}(\hat{\xi}^a) = 2\hat{\xi}^c\partial_j + 2\hat{\xi}^a\epsilon^{abc}A_j^b, \tag{116}$$

$$h'_{A_j^c}(\hat{\xi}^a) = -2\hat{\xi}^a\epsilon^{abc}\tilde{E}^{jb}. \tag{117}$$

Скобка Пуассона дается формулой

$$\begin{aligned} \{H(\hat{\xi}^a), H(\hat{\eta}^b)\} &= \frac{i}{2}\int\limits_\Omega \mathrm{Tr}\left(h'_{\tilde{E}^{jc}}(\hat{\xi}^a)h'_{A_j^c}(\hat{\eta}^b) - h'_{A_j^c}(\hat{\xi}^a)h'_{\tilde{E}^{jc}}(\hat{\eta}^b)\right)d^3x + \\ &+ i\int\limits_\Omega \mathrm{Tr}\left(h'_{A_j^c}(\hat{\xi}^a)\hat{C}_{cjdk}h'_{A_k^d}(\hat{\eta}^b)\right)d^3x. \end{aligned} \tag{118}$$

Здесь необходим явный вид неканонической поправки

$$\hat{C}_{aibj} = \theta_{,k}C^k_{aibj} = \theta_{,k}\frac{i}{4E}\left(\epsilon^{acb}\delta^k{}_jE_{ic} - \epsilon^{bca}\delta^k{}_iE_{jc} - \epsilon^{acd}E_{ib}E_{jc}E^{kd} + \epsilon^{bcd}E_{ja}E_{ic}E^{kd}\right). \tag{119}$$

В итоге получаем следующие соотношения:

$$\{H(N^i), H(M^j)\} = H\left([N,M]^k\right) + H(\hat{\lambda}^a), \tag{120}$$

$$\{H(N^i), H(\hat{\xi}^a)\} = 0, \tag{121}$$

$$\{H(\hat{\xi}^a), H(\hat{\eta}^b)\} = H\left(i(\hat{\xi}\times\hat{\eta})^c\right), \tag{122}$$

где

$$[N,M]^k = N^i M^k{}_{,i} - M^i N^k{}_{,i}, \qquad (\hat{\xi}\times\hat{\eta})^c = \epsilon^{cab}\hat{\xi}^a\hat{\eta}^b,$$

$$\hat{\lambda}^a = \epsilon^{abc}E^{ib}E^{jc}\left(N^k{}_{|i} + N_i{}^{|k}\right)\left(M_{k|j} + M_{j|k}\right),$$

где поверхностные члены фиксированы, а граничные условия остаются полностью свободными.

Последнее слагаемое в формуле (120) пропущено в аналогичной формуле (5.3) работы [20], что, впрочем, несущественно для основного результата. Причина этой неточности, разумеется, в том, что переход от канонических скобок для переменных АДМ к деформированным скобкам (91) не является заменой переменных и сохраняет скобки Пуассона лишь на поверхности связей $\mathcal{M}^{ij} = 0$.

Заключение

Выше мы показали, как новое определение скобок Пуассона позволяет изучать пуассоновы алгебры на более широком, чем обычно, классе функционалов. Здесь мы считаем допустимыми произвольные локальные функционалы, а не только “дифференцируемые”, т.е. те, вариация которых не содержит вклада от границы. При этом оказывается, что можно найти генераторы, отличающиеся, вообще говоря, от связей поверхностными интегралами, такие, что их алгебра замыкается. Найденные выражения генераторов нельзя назвать новыми, поскольку они встречаются, например, при рассмотрении асимптотически плоского пространства-времени [20]. Однако новым является утверждение об их применимости в гораздо более общем случае, независимо от выбора граничных условий.

В другой работе [21] мы обсуждаем критерий того, что локальный функционал может считаться допустимым гамильтонианом, т.е. генерировать обычные, а не в смысле обобщенных функций, уравнения движения. Применительно к данной работе это более жесткое ограничение не изменило бы найденной пуассоновой алгебры (120), (121), (122), а лишь потребовало бы касательности к границе векторов сдвига пространственных координат.

Настоящая работа ограничена обсуждением алгебры генераторов пространственных диффеоморфизмов и вращений триад, т.е. преобразований внутри одной и той же гиперповерхности. Что будет происходить при движении гиперповерхности в нормальном к ней направлении, можно ли включить генераторы этих движений в алгебру, подобную существующей для пространства без границы, или в случае асимптотически плоского пространства-времени, пока неясно.

Для этого необходимо знать, существует ли поверхностный интеграл, который позволил бы замкнуть при произвольных граничных условиях более широкую алгебру, включающую генератор $H(\mathcal{N})$.

Список литературы

[1] Regge T. and Teitelboim C. // Ann. Phys. 1974, v. 88, p. 286.

[2] Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. — М.: Наука, 1986.

[3] Lewis D., Marsden J., Montgomery R. and Ratiu T. // Physica 1986, v. D18, p. 391.

[4] Faddeev L.D. and Takhtajan L.A. // Lett. Math. Phys. 1985, v. 10, p. 183.

[5] Аркадьев В.А., Погребков А.К., Поливанов М.К. // ДАН. 1988, т. 298, с. 324; ТМФ 1988, т. 75, с. 170.

[6] Soloviev V.O. // J. Math. Phys. 1993, v. 34, p. 5747.

[7] Soloviev V.O. – Preprint IHEP 94-145. Protvino, 1994, q-alg/9501017 (submitted to J. Math. Phys.).

[8] Soloviev V.O. // Phys. Lett. 1992, v. B292, p. 30.

[9] Smolin L. // J. Math. Phys. 1995 v. 36, p. 6417.

[10] Arnowitt R., Deser S. and Misner Ch.W. — In: Gravitation, an Introduction to Current Research. Ed. L. Witten. — N.Y., 1963 (Имеется перевод: Эйнштейновский сборник 1967. — М.: Наука, 1967).

[11] Kuchař K. // J. Math Phys. 1977 v. 17, p. 777; p. 792; p. 801; 1978, v. 18, p. 158.

[12] Teitelboim C. // Ann. Phys. 1973, v. 79, p. 542 .

[13] Соловьев В.О. // ТМФ. 1985, т. 65, с. 400.

[14] Ashtekar A. // Phys. Rev. Lett. 1986, v. 57, p. 2244; Phys. Rev. 1987, v. D36, p. 1587; Ashtekar A., Mazur P., Torre C.G. // Phys. Rev. 1987, v. D36, p. 2955.

[15] Henneaux M., Nelson J.E. and Schomblond C. // Phys. Rev. 1989, v. D39, p. 434.

[16] Brown J.D., Henneaux M. // J. Math. Phys. 1986, v. 27, p. 489.

[17] Olver P.J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. Graduate texts in mathematics. — Springer-Verlag, N.Y., 1986 (Имеется перевод: Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989).

[18] Dorfman I. Dirac Structures and Integrability of Nonlinear Evolution Equations. — John Wiley and Sons, N.Y., 1993.

[19] Dickey L. Soliton Equations and Hamiltonian Systems. — World Scientific, Singapore, 1991.

[20] Thiemann T. // Class. Quant. Grav. 1995, v. 12, p. 181.

[21] Соловьев В.О. – Препринт ИФВЭ 96-86. Протвино, 1996, hep-th/9611212.

Рукопись поступила 19 ноября 1996 г.

В.О. Соловьев
Независимая от граничных условий алгебра в формализме Аштекара.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы LaTeX.
Редактор Н.В.Ежела.

Подписано к печати 21.11.96. Формат $60 \times 84/8$.
Офсетная печать. Печ.л. 2,5. Уч.-изд.л. 1,92. Тираж 250. Заказ 829.
Индекс 3649. ЛР №020498 17.04.97.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 96–96, И Ф В Э, 1996