



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 97-59

ОТФ

М.А.Вдовиченко, А.С.Вшивцев, К.Г.Клименко

**ВЛИЯНИЕ ХИМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА
НА ФАЗОВУЮ СТРУКТУРУ
МОДЕЛИ НАМБУ-ЙОНА-ЛАЗИНИО
В НЕОДНОСВЯЗНОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

Протвино 1997

Аннотация

Вдовиченко М.А., Вшивцев А.С., Клименко К.Г. Влияние химического потенциала на фазовую структуру модели Намбу-Йона-Лазинио в неодносвязном пространстве: Препринт ИФВЭ 97-59. – Протвино, 1997. – 29 с., 16 рис., библиогр.: 19.

Исследована фазовая структура модели Намбу-Йона-Лазинио в неодносвязном пространстве-времени с топологией $R^3 \times S^1$ (компактифицирована пространственная координата) и химическим потенциалом μ . В плоскости $\mu, \lambda = 1/L$, где L — длина окружности S^1 , построены фазовые портреты модели в случае с периодическими граничными условиями. Наиболее подробно рассмотрена ситуация, когда константа связи принимает значения $G < G_c = 4\pi^2/\Lambda^2$, где Λ — параметр обрезания. Случай $G > G_c$ детально исследован только для значений $1 < G/G_c < 1.225\dots$. Впервые показано существование по крайней мере трех различных фаз — одной безмассовой и двух массивных со спонтанным нарушением киральной инвариантности. В явном виде получены уравнения границ фаз — критических кривых фазовых переходов как первого, так и второго родов. На фазовой диаграмме (μ, λ) существуют две трикритические точки.

Abstract

Vdovichenko M.A., Vshivtsev A.S., Klimenko K.G. Phase Structure of the Nambu-Jona-Lasinio Model in the Non-Simply Connected Spacetime with Account for Chemical Potential: IHEP Preprint 97-59. – Protvino, 1997. – p. 29, figs. 16, refs.: 19.

Phase structure of the Nambu-Jona-Lasinio model in $R^3 \times S^1$ spacetime (the space coordinate is compactified) and in the presence of a chemical potential has been investigated. A phase portrait of the model has been obtained in the case with periodic boundary conditions. It was shown that at least three different types of ground states might exist in the model. Two of them are the states with spontaneously broken chiral invariance and the latter corresponds to the massless chirally symmetric phase of the theory. Phase transitions of the first as well, as the second orders are proved to exist in the Nambu-Jona-Lasinio model. Two tricritical points are found to exist on the phase portrait of the model.

Введение

Идея спонтанного нарушения симметрии (СНС) играет важную роль в развитии физики элементарных частиц. В настоящее время существуют два широко известных способа нарушить симметрию спонтанным образом. В первом из них СНС происходит в теориях со вспомогательными полями Хиггса, где спонтанное нарушение фактически происходит на уровне классического действия (именно на этом подходе основана стандартная теория электрослабых взаимодействий, теория великого объединения элементарных частиц и т.д.). Плата за такую возможность — обязательное существование еще неоткрытых хиггсовских бозонов.

В другом подходе СНС происходит динамическим образом, т.е. благодаря радиационным поправкам к классическому действию, и при этом не требуется введения полей Хиггса. Впервые такой механизм нарушения симметрии был обнаружен в моделях с четырехфермионным взаимодействием [1,2], простейшая из которых имеет лагранжиан вида

$$L_\psi = \sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k i \hat{\partial} \psi_k + \frac{G}{2N} \left[\left(\sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k \psi_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k i \gamma_5 \psi_k \right)^2 \right] \quad (1)$$

и называется моделью Намбу-Йона-Лазинио (НИЛ). Для того чтобы использовать непертурбативный метод $1/N$ -разложения, мы будем рассматривать N -фермионную версию модели, которая при этом инвариантна относительно простейших непрерывных киральных преобразований:

$$\psi_k \rightarrow e^{i\theta\gamma_5} \psi_k \quad ; \quad (k = 1, \dots, N). \quad (2)$$

Теории с четырехфермионным взаимодействием находят применение для объяснения сверхпроводимости [3] и высокотемпературной сверхпроводимости [4], при описании низкоэнергетической физики мезонов [5], построении альтернативных моделей электрослабого взаимодействия [6] и т.д. Недавно на их основе было открыто

неизвестное ранее свойство внешних магнитных и хромомагнитных полей способствовать спонтанному нарушению киральной симметрии [7]. Интерес к моделям типа НИЛ не ослабевает уже более тридцати лет, причем особое внимание уделяется исследованиям структуры их вакуума и его критических свойств при наличии окружающей среды, т.е. учету таких факторов, как температура и химический потенциал [8,9], различные внешние поля [10] и т.д. Это направление исследований весьма актуально в современной физике микромира, так как многие явления можно наблюдать и описывать только при наличии ненулевой плотности частиц, воздействии различных внешних полей. Кроме того, свойства вакуума реальных квантовых систем сильно зависят и от величины температуры.

Известно, что единая теория всех сил природы, включая гравитационные, еще далека от завершения. Вот почему довольно значительное внимание физиков обращено на развитие квантовых теорий поля в пространствах с нетривиальной метрикой и топологией [11]. В рамках этого подхода уже обсуждалась связь между СНС и кривизной пространства, а также его топологией [12]. В предлагаемой работе рассматривается совместное влияние ненулевой плотности частиц и нетривиальной топологии пространства-времени на структуру вакуума в квантовой теории поля.

Оказывается, что это явление очень удобно исследовать на основе моделей с четырехфермионным взаимодействием. В предыдущей работе [13] мы рассмотрели фазовую структуру двумерной модели Гросса-Невье при ненулевой плотности в неодносвязном пространстве-времени $R^1 \times S^1$. Было показано, что в этом случае критические свойства и фазовая структура модели более разнообразны по сравнению со случаем пространства Минковского, так как на фазовой диаграмме модели присутствуют трикритические точки, а также кривые фазовых переходов первого и второго родов.

В предлагаемой работе мы продолжаем эту деятельность и рассматриваем более реалистичный случай. Здесь проводится исследование фазовой структуры модели НИЛ в неодносвязном пространстве-времени, имеющем топологию $R^3 \times S^1$ (компактифицирована одна из пространственных осей, свернутая в окружность длиной L), при ненулевых значениях химического потенциала μ . В следующих двух разделах рассматриваются свойства вакуума модели НИЛ в предельных случаях $\mu \neq 0, L = \infty$ и $\mu = 0, L \neq \infty$ соответственно. В разделе 3 показано, что исследуемая система может существовать в двух различных массивных фазах, в которых киральная симметрия спонтанно нарушена, и в безмассовой симметричной фазе. На плоскости $\mu, \lambda = 1/L$ фазы отделены друг от друга критическими кривыми как второго, так и первого родов.

1. Фазовая структура модели при $\mu \neq 0, L = \infty$

Для начала напомним свойства вакуума теории (1) при $\mu = 0$ в пространстве с тривиальной топологией, т.е. при $L = \infty$. С этой целью вместо (1) рассмотрим вспомогательный лагранжиан

$$L_\sigma = \bar{\psi} i \hat{\partial} \psi - \bar{\psi} (\sigma_1 + i \sigma_2 \gamma_5) \psi - \frac{N}{2G} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \quad (3)$$

(здесь ради простоты у ψ опущен индекс k , нумерующий ферми-поля), который на уравнениях движения для вспомогательных бозонных полей $\sigma_{1,2}$ эквивалентен исходному лагранжиану (1).

Эффективное действие модели в главном порядке $1/N$ -разложения определяется следующим образом:

$$\exp(iS_{eff}(\sigma_{1,2})) = \int D\bar{\psi} D\psi \exp(i \int L_\sigma d^4x),$$

где

$$\frac{1}{N} S_{eff}(\sigma_{1,2}) = - \int d^4x \frac{\sigma_1 + \sigma_2^2}{2G} - i \ln \det(i\hat{\partial} - \sigma_1 - i\gamma_5 \sigma_2). \quad (4)$$

Полагая здесь поля $\sigma_{1,2}$ независимыми от координат пространства-времени, имеем по определению

$$S_{eff}(\sigma_{1,2}) = -V_{eff}(\sigma_{1,2}) \int d^4x, \quad (5)$$

где ($\Sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$)

$$\frac{1}{N} V_{eff}(\sigma_{1,2}) = \frac{\Sigma^2}{2G} + 2i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln(\Sigma^2 - p^2) \equiv \frac{1}{N} V_0(\Sigma). \quad (6)$$

Переходя в (6) к евклидовой метрике ($p_0 \rightarrow ip_0$) и вводя лоренц-инвариантное обрезание области интегрирования ($p^2 \leq \Lambda^2$), получаем

$$\frac{1}{N} V_0(\Sigma) = \frac{\Sigma^2}{2G} - \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \Lambda^4 \ln \left(1 + \frac{\Sigma^2}{\Lambda^2} \right) + \Lambda^2 \Sigma^2 - \Sigma^4 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{\Sigma^2} \right) \right\}. \quad (7)$$

Уравнение стационарности для функции (7) имеет вид

$$\frac{\partial V_0(\Sigma)}{\partial \Sigma} = 0 = \frac{N\Sigma}{4\pi^2} \left\{ \frac{4\pi^2}{G} - \Lambda^2 + \Sigma^2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{\Sigma^2} \right) \right\}. \quad (8)$$

Отсюда видно, что при $G < G_c = 4\pi^2/\Lambda^2$ уравнение (8) не имеет решений, кроме $\Sigma = 0$, т.е. в этом случае фермионы безмассовы, и киральная инвариантность (2) не нарушена.

Если $G > G_c$, то уравнение стационарности (8) будет иметь одно нетривиальное решение, на котором располагается глобальный минимум потенциала $V_0(\Sigma)$, что означает спонтанное нарушение киральной симметрии и появление у фермионов ненулевой массы.

Предположим теперь, что $\mu > 0$. Этот случай подробно рассмотрен в работе [10], где и было получено выражение для соответствующего эффективного потенциала ($V_0(\Sigma)$ дан в уравнении (7)):

$$\frac{1}{N} V_\mu(\Sigma) = \frac{1}{N} V_0(\Sigma) - 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Theta(\mu - \sqrt{\Sigma^2 + p^2}) (\mu - \sqrt{\Sigma^2 + p^2}). \quad (9)$$

Здесь $\Theta(x)$ — ступенчатая функция Хэвисайда. Вычисляя интеграл, приведенный в этой формуле, имеем

$$\frac{1}{N}V_\mu(\Sigma) = \frac{1}{N}V_0(\Sigma) - \frac{\Theta(\mu - \Sigma)}{16\pi^2} \left\{ \frac{10}{3}\mu(\mu^2 - \Sigma^2)^{3/2} - 2\mu^3\sqrt{\mu^2 - \Sigma^2} + \Sigma^4 \ln [(\mu + \sqrt{\mu^2 - \Sigma^2})^2 / \Sigma^2] \right\}. \quad (10)$$

В работе [9] на основе исследования точки абсолютного минимума этого потенциала обнаружены неизвестные ранее свойства модели НИЛ. В частности, было показано, что здесь при ненулевых значениях химического потенциала состояние с массивными фермионами описывается двумя различными фазами, переход между которыми — это фазовый переход второго рода. Там же доказано, что восстановление киральной симметрии модели может происходить как с помощью фазовых переходов первого, так и второго родов, в зависимости от значений параметров модели. В плоскости переменных μ, M , где M — динамическая масса фермионов при $\mu = 0$, был построен фазовый портрет модели НИЛ, на котором существуют две трикритические точки.

2. Фазовая структура модели при $\mu = 0, L \neq \infty$

Предположим теперь, что пространство-время имеет структуру $R^3 \times S^1$, где компактифицирована одна из пространственных координат, а длина окружности S^1 есть конечная величина L . Следует различать два случая. В одном из них поля модели (1) удовлетворяют периодическим по компактифицированной координате граничным условиям, т.е.

$$\psi(t, x + L, y, z) = \psi(t, x, y, z), \quad (11)$$

в другом случае поля антипериодичны по этой координате. Однако этот последний случай в нашей работе рассматриваться не будет.

Теперь, чтобы получить эффективный потенциал при $L \neq \infty$, необходимо в (6) интегрирование по p_1 заменить на суммирование по дискретным значениям p_{1n} по следующему правилу:

$$\int \frac{dp_1}{2\pi} f(p_1) \rightarrow \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(p_{1n}); \quad p_{1n} = 2\pi n/L, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (12)$$

Переходя в полученном выражении к евклидовой метрике и суммируя по n [14], находим эффективный потенциал модели НИЛ на пространстве с топологией $R^3 \times S^1$:

$$V_L(\Sigma) = V_0(\Sigma) - \frac{2N}{\pi^2 L} \int_0^\infty dx x^2 \ln [1 - \exp(-L\sqrt{x^2 + \Sigma^2})]. \quad (13)$$

Потенциал (13) имеет ультрафиолетовую расходимость, которая сосредоточена в первом слагаемом. Для ее устранения мы будем по-прежнему использовать регуляризацию с помощью обрезания в (6) области интегрирования лоренц-инвариантным образом. Это приводит к приведенному в (7) выражению для $V_0(\Sigma)$. Исследуем функцию (13) на абсолютный минимум по переменной Σ . При этом в силу четности потенциала $V_L(\Sigma)$ можно рассматривать только неотрицательные значения Σ . Уравнение стационарности для этой функции имеет вид

$$\frac{1}{N} \frac{\partial V_L(\Sigma)}{\partial \Sigma} = 0 = \frac{2\Sigma}{\pi^2} \{F(\Sigma) - I(\Sigma)\}, \quad (14)$$

где

$$F(\Sigma) = \frac{\pi^2}{2G} - \frac{\Lambda^2}{8} + \frac{\Sigma^2}{8} \ln \left[1 + \frac{\Lambda^2}{\Sigma^2} \right]; \quad I(\Sigma) = \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + \Sigma^2}} \frac{1}{\exp^{L\sqrt{x^2 + \Sigma^2}} - 1}. \quad (15)$$

Отсюда, а также из приложения 1, где получено представление для $I(\Sigma)$ в виде ряда, следует, что

$$F(0) = \frac{\pi^2}{2G} - \frac{\Lambda^2}{8}; \quad I(0) = \frac{\pi^2}{6L^2}. \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что на полуинтервале $\Sigma \geq 0$ функция $F(\Sigma)$ монотонно возрастает от значения $F(0)$ при $\Sigma = 0$ до $\pi^2/(2G)$ при $\Sigma = \infty$. С другой стороны, $I(\Sigma)$ является здесь монотонно убывающей от $I(0)$ до нуля функцией. Следовательно, графики этих функций при $F(0) < I(0)$ обязательно пересекаются в единственной точке $\Sigma_0(L)$ (см. рис.1), которая и будет являться нетривиальным решением уравнения стационарности (14). Заметим, что параметр L не входит в определение функции $F(\Sigma)$, а $I(\Sigma)$ при любом фиксированном значении аргумента Σ монотонно убывает с ростом L . Введем новую величину $\lambda = 1/L$. Тогда с помощью рис.1 можно сделать вывод о том, что ненулевой корень уравнения (14) $\Sigma_0(\lambda) (\equiv \Sigma_0(L))$ монотонно возрастает с ростом λ .

Рассмотрим два случая: i) $G > G_c$, ii) $G < G_c$ (величина G_c определена после формулы (8)). В случае i), как следует из (16), $F(0) < 0$ (именно эта ситуация отражена на рис.1), поэтому при любых значениях λ уравнение (14) имеет нетривиальное решение $\Sigma_0(\lambda)$, на котором у потенциала $V_L(\Sigma)$ находится абсолютный минимум. Следовательно, при $G > G_c$ вакуум модели НИЛ не имеет киральной симметрии. Кроме того, очевидно, что $\Sigma_0(\lambda) \rightarrow M$ при $\lambda \rightarrow 0$, где M — решение уравнения стационарности при $L = \infty$ (на рис.1 это точка пересечения графика функции $F(\Sigma)$ с осью абсцисс).

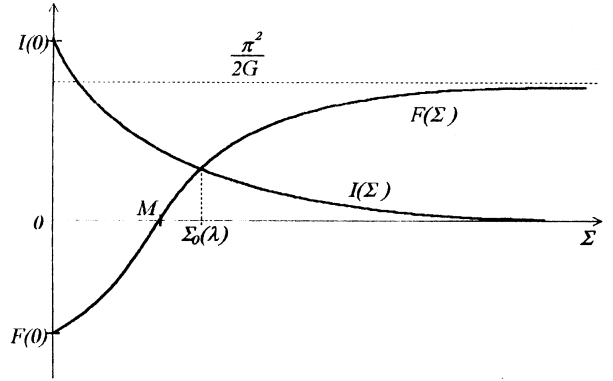


Рис. 1. Функции $F(\Sigma)$ и $I(\Sigma)$ при значении константы связи $G > G_c$.

Рассмотрим случай ii), для которого $F(0) > 0$, и введем обозначение

$$F(0) = \frac{\pi^2}{2G} - \frac{\Lambda^2}{8} \equiv \frac{\pi^2}{6}\lambda_0^2. \quad (17)$$

Ясно, что при $\lambda < \lambda_0$ (т.е. при $F(0) > I(0)$) уравнение стационарности (14) имеет только тривиальное решение, и симметрия модели НИЛ не нарушена. В точке $\lambda = \lambda_0$ в теории происходит фазовый переход второго рода, и при $\lambda > \lambda_0$ симметрия модели спонтанно нарушена. Для того, чтобы получить асимптотику решения $\Sigma_0(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \lambda_{0+}$, нужно воспользоваться полученным в приложении 1 представлением (П.3) для $I(\Sigma)$, в котором достаточно оставить лишь линейное по Σ слагаемое. Подставляя (П.3) в (14), имеем

$$\Sigma_0(\lambda) = \frac{2}{3}\pi(\lambda - \lambda_0) + o(\lambda - \lambda_0). \quad (18)$$

Используя в (14) разложение (П.3), можно показать, что как при $G > G_c$, так и при $G < G_c$, решение $\Sigma_0(\lambda)$ имеет следующую асимптотику при $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\Sigma_0(\lambda) \sim 2\pi\lambda(2.719\dots). \quad (19)$$

Наконец, для дальнейшего необходимо отметить очевидный факт, что $F(\Sigma) - I(\Sigma)$ является монотонно возрастающей функцией на полуинтервале $\Sigma \geq 0$.

3. Фазовая структура модели при $\mu \neq 0, L \neq \infty$

Чтобы получить эффективный потенциал модели НИЛ в главном порядке $1/N$ в этом случае (мы будем иметь дело только с периодическими граничными условиями (11)), достаточно в формуле (9) интегрирование по p_1 заменить на суммирование по правилу (12), и вместо $V_0(\Sigma)$ использовать потенциал (13) $V_L(\Sigma)$. Результатом этой операции является эффективный потенциал при $\mu \neq 0, L \neq \infty$:

$$V_{\mu L}(\Sigma) = V_L(\Sigma) - \frac{2N}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \Theta(\mu - \sqrt{\Sigma^2 + p^2 + (2\pi\lambda n)^2}) (\mu - \sqrt{\Sigma^2 + p^2 + (2\pi\lambda n)^2}). \quad (20)$$

Напомним, что здесь $\lambda = 1/L$. Проинтегрируем в (20) по импульсам:

$$V_{\mu L}(\Sigma) = V_L(\Sigma) - \frac{\lambda N}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \Theta(\mu - \sqrt{\Sigma^2 + (2\pi\lambda n)^2}) \cdot \left\{ \mu \left[\mu^2 - \Sigma^2 - (2\pi\lambda n)^2 \right] - \frac{2}{3}\mu^3 + \frac{2}{3} \left[\Sigma^2 + (2\pi\lambda n)^2 \right]^{3/2} \right\}, \quad (21)$$

$\alpha_n = 2 - \delta_{n0}$. Нас интересует фазовая структура модели (1), поэтому каждой точке плоскости (μ, λ) , где $\mu \geq 0, \lambda \geq 0$, необходимо поставить в соответствие некоторую

фазу НИЛ теории. Структура потенциала (21) диктует следующую стратегию исследования этой функции на абсолютный минимум. Давайте разобьем плоскость параметров (μ, λ) на области Ω_k такие, что

$$(\mu, \lambda) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega_k; \quad \Omega_k = \{(\mu, \lambda) : 2\pi\lambda k \leq \mu < 2\pi\lambda(k+1)\}. \quad (22)$$

Если зафиксировать μ и λ в произвольной области Ω_k , то отличный от нуля вклад в выражение (21) будут давать только $(k+1)$ -первых слагаемых, стоящих под знаком суммы в (21). Далее мы рассмотрим фазовую структуру потенциала $V_{\mu L}(\Sigma)$ только для значений параметров μ, λ из области Ω_0 , где уравнение стационарности для этой функции по переменной Σ имеет вид (напомним, что из всей суммы в (21) при этом необходимо оставить только слагаемое, соответствующее $n=0$)

$$\frac{2\Sigma}{\pi^2} \left\{ F(\Sigma) - I(\Sigma) + \frac{\lambda\pi}{2} \Theta(\mu - \Sigma)(\mu - \Sigma) \right\} = 0, \quad (23)$$

где функции F и I представлены в (15). Как и в предыдущем разделе, разобьем задачу на два различных случая. Кроме того, не теряя общности рассмотрения, будем предполагать, что $\Sigma \geq 0$.

3.1 Случай $G < G_c$. Уравнение стационарности

Для упрощения дальнейшего рассмотрения перейдем к новым обозначениям. В предыдущем разделе был введен параметр λ_0 (17):

$$\frac{\pi^2}{6} \lambda_0^2 \equiv \frac{\pi^2}{2G} - \frac{\Lambda^2}{8}.$$

Кроме того, будем использовать следующие величины:

$$a \equiv \frac{\Lambda^2}{16\pi^2\lambda_0^2}; \quad x \equiv \frac{\Sigma}{2\pi\lambda_0}; \quad \bar{\mu} \equiv \frac{\mu}{2\pi\lambda_0}; \quad t \equiv \frac{\lambda}{\lambda_0}. \quad (24)$$

Тогда в новых обозначениях эффективный потенциал предстанет в виде

$$V_{\mu L}(\Sigma) \equiv 8\pi^2\lambda_0^4 N \cdot v_{\bar{\mu}t}(x), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} v_{\bar{\mu}t}(x) = & \frac{x^2}{12} + \frac{a}{2}x^2 - 2a^2 \ln \left(1 + \frac{x^2}{4a} \right) + \frac{x^4}{8} \ln \left(1 + \frac{4a}{x^2} \right) - \\ & - \frac{2t}{\pi} \int_0^\infty u^2 \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{2\pi}{t} \sqrt{x^2 + u^2} \right) \right] du - \frac{t}{2} \sum_{n=0}^\infty \alpha_n \Theta \left(\bar{\mu} - \sqrt{x^2 + t^2 n^2} \right) \times \\ & \times \left\{ \bar{\mu} \left(\bar{\mu}^2 - x^2 - t^2 n^2 \right) - \frac{2}{3} \left[\bar{\mu}^3 - \left(x^2 + t^2 n^2 \right)^{3/2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

а разбиение плоскости параметров (μ, λ) (см. (22)) будет иметь вид

$$(\bar{\mu}, t) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bar{\Omega}_k; \bar{\Omega}_k = \{(\bar{\mu}, t) : tk \leq \bar{\mu} < t(k+1)\}. \quad (26)$$

Для области $\bar{\Omega}_0$ напомним эффективный потенциал

$$v_{\bar{\mu}t}^0(x) = \frac{x^2}{12} + \frac{ax^2}{2} - 2a^2 \ln\left(1 + \frac{x^2}{4a}\right) + \frac{x^4}{8} \ln\left(1 + \frac{4a}{x^2}\right) - \frac{2t}{\pi} \int_0^{\infty} u^2 \ln\left[1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{t}\sqrt{x^2+u^2}\right)\right] du - \frac{t}{2} \Theta(\bar{\mu}-x) \left(\frac{2}{3}x^3 - \bar{\mu}x^2 + \frac{1}{3}\bar{\mu}^3\right), \quad (27)$$

для которого имеем уравнение стационарности (см. (23))

$$\frac{\partial v_{\bar{\mu}t}^0(x)}{\partial x} \equiv x \cdot \varphi(x) = 0, \quad (28)$$

где, с учетом обозначений (24), мы ввели

$$\varphi(x) \equiv f(x) - i(x) + \Theta(\bar{\mu}-x)t(\bar{\mu}-x), \quad (29)$$

$$f(x) \equiv \frac{F(\Sigma)}{\pi^2 \lambda_0^2} = \frac{1}{6} + \frac{x^2}{2} \ln\left(1 + \frac{4a}{x^2}\right), \quad (30)$$

$$i(x) \equiv \frac{I(\Sigma)}{\pi^2 \lambda_0^2} = 4 \int_0^{\infty} \frac{u^2 du}{\sqrt{x^2+u^2} \left[\exp\left(\frac{2\pi}{t}\sqrt{x^2+u^2}\right) - 1\right]}. \quad (31)$$

Качественный анализ функций $f(x)$ и $i(x)$ был проведен в предыдущем разделе и отражен на рис.2. Применим полученные результаты для исследования функции $\varphi(x)$ (29). Сперва отметим, что на основании (16)

$$\varphi(0) = \frac{1-t^2}{6} + \bar{\mu}t, \quad (32)$$

а также, что уравнение стационарности (28) при $t < 1$ имеет только тривиальное решение $x = 0$. Таким образом, при $t < 1$ и $0 \leq \bar{\mu} \leq t$ находится безмассовая фаза модели НИЛ. Далее мы будем иметь дело только со значениями $t \geq 1$.

Исследуем более подробно свойства непрерывной функции $\varphi(x)$ из (29) в этом случае. Очевидно, она имеет следующий вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) - i(x), & x \geq \bar{\mu} \\ \Phi(x), & x \leq \bar{\mu} \end{cases}, \quad (33)$$

где

$$\Phi(x) = f(x) - i(x) + t(\bar{\mu}-x). \quad (34)$$

Для начала отметим, что уравнение

$$f(x) - i(x) = 0 \quad (35)$$

определяет единственное решение $x_0(t)$ (см. рис.3). Далее, с помощью (31) и (П.3), имеем

$$i(x) = \frac{t^2}{6} - tx + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \ln \frac{x^2}{4t^2} + \gamma x^2 - \frac{x^4}{t^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \left(n + \sqrt{n^2 + x^2/t^2} \right)^2}. \quad (36)$$

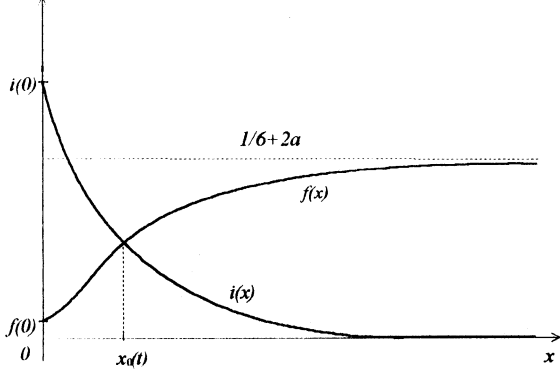


Рис. 2. Функции $f(x)$ и $i(x)$ при значении константы связи $G < G_c$.

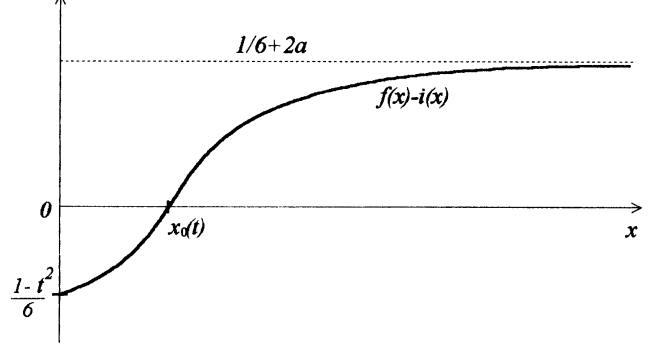


Рис. 3. Функция $f(x) - i(x)$ при значении константы связи $G < G_c$.

Используя (30) и (36), нетрудно получить

$$f(x) - i(x) = \frac{1-t^2}{6} + tx + \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{4}x^4 + O(x^6) \quad \text{при} \quad x \ll 1, \quad (37)$$

где

$$\alpha = 2\gamma - 1 + \ln \frac{a}{t^2}; \quad \beta = \frac{1}{2a} - \frac{\zeta(3)}{t^2}. \quad (38)$$

Так как $x_0(t) \rightarrow 0_+$ при $t \rightarrow 1_+$ (см.(18)), то с помощью (37) мы получим следующую асимптотику для решения уравнения (35):

$$x_0(t) = \frac{1}{3}(t-1) - \frac{\alpha}{18}(t-1)^2 + O((t-1)^3) \quad \text{при} \quad t \rightarrow 1_+. \quad (39)$$

Также отметим, что $x_0(t)$ при $t > 1$ монотонно возрастает и при $t \rightarrow \infty$: $x_0(t) \sim (2.719...)t$ (см.(19)). Тем самым график функции $\bar{\mu} = x_0(t)$, неявно зависящей от параметров a и t , на плоскости $(\bar{\mu}, t)$ изображается кривой, которая при достаточно больших t выходит из области $\bar{\Omega}_0$, т.е. пересекает прямую $\bar{\mu} = t$ в некоторой точке t^* . Так при $a_1 = 1$; $a_2 = 10$; $a_3 = 100$, имеем $t_1^* = 58.687...$; $t_2^* = 179.039...$; $t_3^* = 564.056...$, т.е. чем больше величина a , тем при больших значениях t график этой функции выходит из области $\bar{\Omega}_0$. Описанная выше ситуация качественно отражена на рис.4, где изображены графики функции $\bar{\mu} = x_0(t)$ при различных значениях параметра a ($a_1 = 1$; $a_2 = 10$; $a_3 = 100$). Теперь рассмотрим функцию $\Phi(x)$ (34). С учетом (32) мы имеем

$$\Phi(0) = -\frac{t^2-1}{6} + \bar{\mu}t. \quad (40)$$

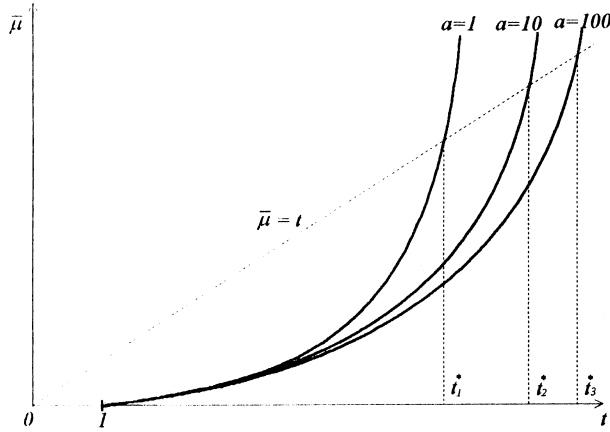


Рис. 4. Функция $\bar{\mu} = x_o(t)$ при различных значениях параметра α и для константы связи $G < G_c$ (численные значения параметров, указанных на этом и следующих рисунках, можно найти в разделе 4.1 работы).

Чтобы описать поведение этой функции при малых x , нужно воспользоваться выражением (37). Получим

$$\Phi(x) = \Phi(0) + \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{4}x^4 + O(x^6) \quad \text{при} \quad x \ll 1. \quad (41)$$

При $x \rightarrow \infty$ мы имеем (см. (30) и (31)) $f(x) - i(x) \rightarrow \frac{1}{6} + 2a$, и тем самым

$$\Phi(x) \rightarrow \frac{1}{6} + 2a + t\bar{\mu} - tx \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty. \quad (42)$$

Далее рассмотрим производную по x от функции $\Phi(x)$. Так при $x > 0$, продифференцировав выражение (34), получим

$$\Psi(x) \equiv \frac{d\Phi}{dx} = -t + x \ln\left(1 + \frac{4a}{x^2}\right) - \frac{4ax}{4a + x^2} + 4x \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{x^2 + u^2} \left(e^{\frac{2\pi}{t}\sqrt{x^2 + u^2}} - 1\right)}. \quad (43)$$

Теперь воспользуемся выражениями (41) и (42), тогда получим следующие асимптотики:

$$\Psi(x) = \alpha x + \beta x^3 + O(x^5) \quad \text{при} \quad x \ll 1 \quad (44)$$

и

$$\Psi(x) \rightarrow -t \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty. \quad (45)$$

Из (38) находим, что если $a > a_*$, где

$$a_* = \frac{1}{\exp(2\gamma - 1)} = 0.926\dots, \quad (46)$$

тогда при $1 \leq t < t_a^1$, где

$$t_a^1 = \sqrt{a} \exp\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) = (1.080\dots)\sqrt{a}, \quad (47)$$

мы имеем $\alpha > 0$, а значит, функция $\Psi(x)$ монотонно возрастает при $x \ll 1$ (см. (44)). Эта функция будет возрастать от нуля до некоторого значения Ψ_{\max} , а затем монотонно убывать к предельной величине (45) таким образом, что при $x = \bar{x}_0(t)$ она пересечет ось Ox (см. рис.5 кривая 1). Тем самым, для функции $\Phi(x)$ в этом случае имеем: при $0 < x < \bar{x}_0(t)$ — область монотонного возрастания, а при $x > \bar{x}_0(t)$ — монотонное убывание (см. (41) и (42)). При этом заметим, что расположение графика этой функции зависит от величины химического потенциала $\bar{\mu}$ (см. (40)). Так, при фиксированных значениях параметров a и t из рассматриваемой области возникают следующие ситуации.

1. Если $\bar{\mu} \ll \frac{t^2-1}{6t}$ (см. (40)), тогда $\Phi(x) < 0$ при всех $x \geq 0$ (см. рис.6, кривая 1).

2. Существует такое значение химического потенциала $\bar{\mu} = \bar{\mu}_*(t) < \frac{t^2-1}{6t}$, при котором $\Phi(\bar{x}_0(t)) = 0$ (кривая 2 на рис.6). Выражение для $\bar{\mu}_*(t)$ можно получить следующим образом. Из (34) имеем $\Phi(\bar{x}_0(t)) - \Phi(0) = Const$, при различных $\bar{\mu}$. Подставляя $\bar{\mu} = \bar{\mu}_*(t)$ и $\bar{\mu} = \frac{t^2-1}{6t}$, находим

$$\bar{\mu}_*(t) = \bar{x}_0(t) - \frac{f(\bar{x}_0(t)) - i(\bar{x}_0(t))}{t}. \quad (48)$$

3. Если $\bar{\mu}_*(t) < \bar{\mu} < \frac{t^2-1}{6t}$, тогда график функции $\Phi(x)$ пересекает ось Ox в двух точках $x_1(\bar{\mu}, t)$ и $x_2(\bar{\mu}, t)$ (кривая 3 на рис.6). При этом отметим, что $x_1(\bar{\mu}, t) < \bar{x}_0(t) < x_2(\bar{\mu}, t)$.

4. Если $\bar{\mu} > \frac{t^2-1}{6t}$, то функция $\Phi(x)$ обращается в нуль лишь при $x = x_2(\bar{\mu}, t) > \bar{x}_0(t)$ (кривая 4 на рис.6). Если $a > a_*$ (46) и $t > t_a^1$ (47), а также когда $a < a_*$ и $t \geq 1$, то мы имеем $\alpha < 0$ (38). В этом случае функция $\Psi(x) < 0$ при всех $x > 0$ (кривая 2 на рис.6).

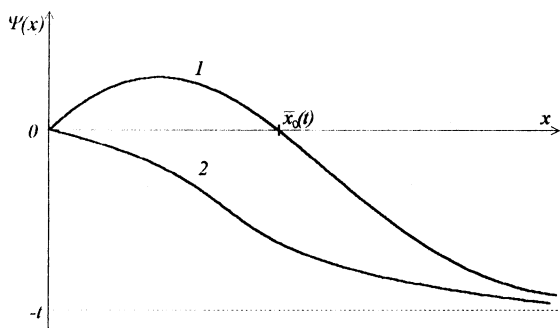


Рис. 5. Функция $\Psi(x)$.

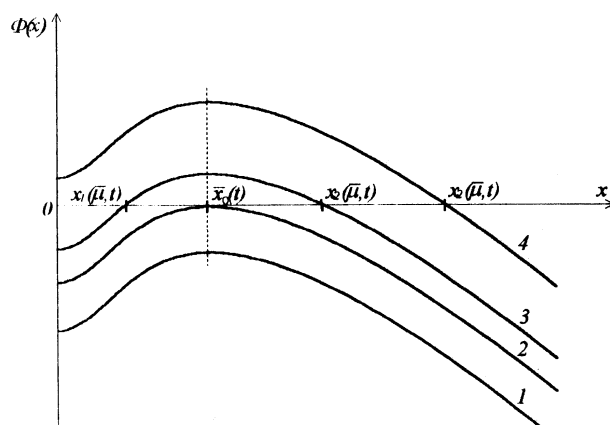


Рис. 6. Функция $\Phi(x)$ при различных значениях величины химического потенциала μ (случай $\alpha > 0$).

Следовательно, функция $\Phi(x)$ (34) монотонно убывает на всей области $x > 0$ так, что если $\bar{\mu} < \frac{t^2-1}{6t}$, то $\Phi(x) < 0$ при всех $x > 0$ (кривая 1 на рис.7), а когда $\bar{\mu} > \frac{t^2-1}{6t}$, тогда график функции $\Phi(x)$ пересечет ось Ox в единственной точке

$x = x_2(\bar{\mu}, t)$ (кривая 2 на рис.7). Проведенный анализ позволяет для фиксированных значений параметров a и t из вышеуказанных областей качественно представить график функции $\varphi(x)$ (33).

А. Если $a \leq a_*$, тогда при всех $t \geq 1$ характер поведения графика функции $\varphi(x)$ будет зависеть от величины химического потенциала $\bar{\mu}$. Прежде всего отметим, что при $\alpha < 0$ справедливо соотношение $x_0(t) > \frac{t^2-1}{6t}$ для всех $t \geq 1$ (см. асимптотики (19) и (39), а также рис.4). На рис.8 изображены три кривые, каждая из которых соответствует $\varphi(x)$ при некотором значении $\bar{\mu}$. Так, для линии 1 величина химического потенциала такая, что $\bar{\mu} < \frac{t^2-1}{6t}$ (см. (32)). В этом случае уравнение стационарности (28) имеет два решения: $x = 0$ и $x = x_0(t)$. Последнее является точкой глобального минимума для потенциала $v_{\bar{\mu}t}^0(x)$ (27). Когда химический потенциал принимает значения $\frac{t^2-1}{6t} < \bar{\mu} < x_0(t)$, тогда график функции $\varphi(x)$ пересекает ось Ox в двух точках $x_2(\bar{\mu}, t)$ и $x_0(t)$ (кривая 2 на рис.8). В этом случае эффективный потенциал $v_{\bar{\mu}t}^0(x)$ имеет минимумы в двух точках: $x = 0$ и $x = x_0(t)$. При этом глобальный минимум в зависимости от $\bar{\mu}$ может находиться как в одной, так и в другой точках. Отложим этот вопрос до следующего раздела. Наконец, при $\bar{\mu} > x_0(t)$ функция $\varphi(x) > 0$ для всех $x \geq 0$ (кривая 3 на рис.8), что соответствует лишь тривиальному решению $x = 0$ уравнения (28).

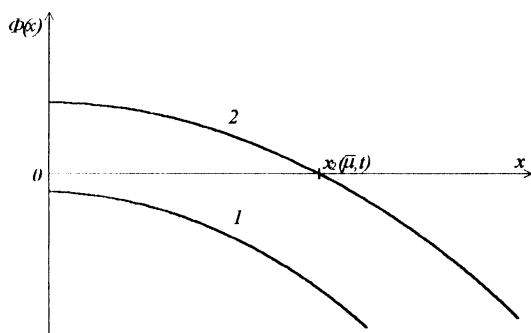


Рис. 7. Функция $\Phi(x)$ при различных значениях величины химического потенциала $\bar{\mu}$ (случай $\alpha < 0$).

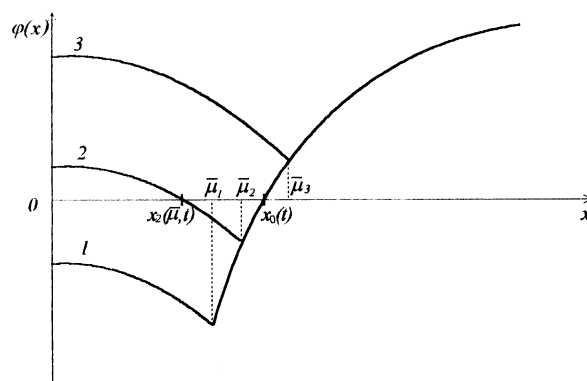


Рис. 8. Функция φ при различных значениях величины химического потенциала $\bar{\mu}$ (случай $\alpha < 0$).

В. Пусть $a > a_*$ (46) и $1 \leq t < t_a^1$ (47). В этом случае важно знать, как соотносятся между собой $\bar{x}_0(t)$ и $x_0(t)$. Напомним, что $x_0(t)$ — неявная функция, заданная посредством уравнения (35), а $\bar{x}_0(t)$ задается уравнением $\Psi(x) = 0$ (43). На рис.9 качественно показаны графики этих функций, которые пересекаются в точке $t = \tilde{t}_a$ так, что

$$\begin{aligned} x_0(t) < \bar{x}_0(t) & \quad \text{при} \quad t < \tilde{t}_a; \\ x_0(t) > \bar{x}_0(t) & \quad \text{при} \quad \tilde{t}_a < t \leq t_a^1. \end{aligned} \quad (49)$$

Предварительно введем значение параметра $t = T_a$ ($\tilde{t}_a < T_a < t_a^1$), при котором $\frac{t^2-1}{6t} = x_0(t)$. Так, что

$$\begin{aligned} x_0(t) &< \frac{t^2-1}{6t} && \text{при} && 1 < t < T_a; \\ x_0(t) &> \frac{t^2-1}{6t} && \text{при} && T_a < t < t_a^1, \end{aligned} \quad (50)$$

а согласно (32), будем иметь

$$\varphi(0) = \varphi(x_0(t)) = 0 \quad \text{при} \quad t = T_a. \quad (51)$$

Отметим, что значения \tilde{t}_a и T_a находятся вблизи точки t_a^1 . Так, при $a = 5; 10; 100$ будем соответственно иметь $t_a^1 = 2.414...; 3.415...; 10.800...$, $\tilde{t}_a = 2.394...; 3.389...; 10.723...$ и $T_a = 2.402...; 3.398...; 10.746...$. Итак, можно выделить три различных случая в зависимости от значений параметра t .

1) При $1 \leq t < \tilde{t}_a$ (см. первую строку в (49)) мы имеем ситуацию, качественно показанную на рис.10, где линия 1 соответствует величине химического потенциала $\bar{\mu} < x_0(t)$. При этом график функции $\varphi(x)$ монотонно возрастает при всех $x > 0$ и в точке $x = x_0(t)$ пересекает ось Ox . Тем самым мы имеем при $x = x_0(t)$ глобальный минимум для потенциала $v_{\bar{\mu}t}^0(x)$ (27). При $x_0(t) < \bar{\mu} < \frac{t^2-1}{6t}$ функция $\varphi(x)$ обращается в нуль в точке $x = x_1(\bar{\mu}, t)$ (кривая 2 на рис.10), которая является глобальным минимумом для эффективного потенциала (27). Заметим, что $x_1(\bar{\mu}, t)$ в зависимости от $\bar{\mu}$ может принимать любые значения — от нуля при $\bar{\mu} = \frac{t^2-1}{6t}$, до $x_0(t)$ при $\bar{\mu} = x_0(t)$. Если $\bar{\mu} > \frac{t^2-1}{6t}$, тогда $\varphi(x)$, вообще, не пересекает оси Ox , и уравнение стационарности (28) имеет только тривиальное решение $x = 0$.

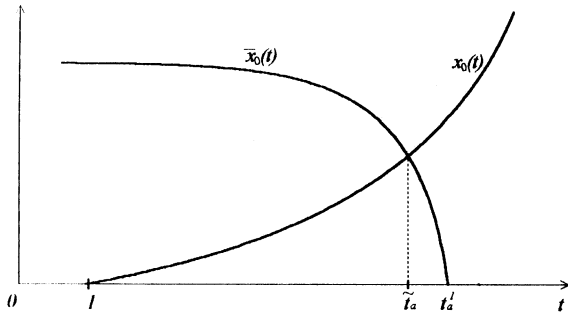


Рис. 9. Графики функций $x_0(t)$ и $\bar{x}_0(t)$ (случай $G < G_c$).

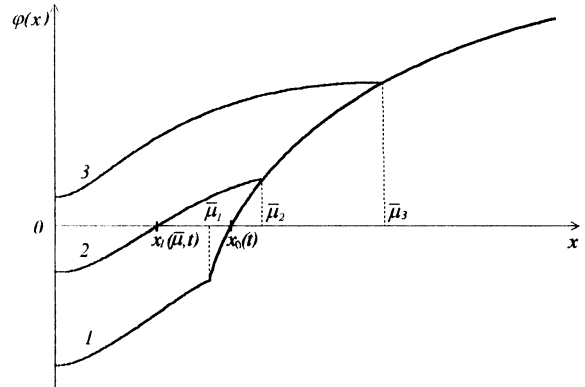


Рис. 10. Функция $\varphi(x)$ при различных значениях величины химического потенциала μ (случай $t < \tilde{t}_a$).

2) Когда $\tilde{t}_a < t < T_a$, то при $\bar{\mu} < \bar{\mu}_*(t)$ (48) функция $\varphi(x)$ имеет единственный нуль в точке $x = x_0(t)$ (кривая 1 на рис.11). Если химический потенциал принимает значения $\bar{\mu}_*(t) < \bar{\mu} < x_0(t)$ (кривая 2 на рис.11), тогда уравнение стационарности

(28) имеет три нетривиальных решения: $x_1(\bar{\mu}, t)$, $x_2(\bar{\mu}, t)$ и $x_0(t)$. При этом эффективный потенциал (27) в точках $x_1(\bar{\mu}, t)$ и $x_0(t)$ достигает минимального значения. При $x_0(t) < \bar{\mu} < \frac{t^2-1}{6t}$ мы имеем кривую 3 на рис.11, где график функции $\varphi(x)$ пересекает ось Ox лишь в точке $x = x_1(\bar{\mu}, t)$. Также отметим, что при $\bar{\mu}_*(t) < \bar{\mu} < \frac{t^2-1}{6t}$ величина $x_1(\bar{\mu}, t)$ в зависимости от $\bar{\mu}$ может принимать любые значения — от нуля при $\bar{\mu} = \frac{t^2-1}{6t}$, до $\bar{x}_0(t)$ при $\bar{\mu} = \bar{\mu}_*(t)$. При этом $x_0(t) > \bar{x}_0(t)$ (см. формулу (49) вторая строчка). И наконец, при $\bar{\mu} > \frac{t^2-1}{6t}$ (кривая 4 на рис.11) уравнение (28) имеет только тривиальное решение $x = 0$.

3) На рис.12 отражен случай, когда $T_a < t < t_a^1$. Линия 1 отвечает значениям химического потенциала $\bar{\mu} < \bar{\mu}_*(t)$ (48), при которых $\varphi(x)$ пересекает ось Ox лишь в точке $x = x_0(t)$. Если $\bar{\mu}_*(t) < \bar{\mu} < \frac{t^2-1}{6t}$ (кривая 2 на рис. 12), тогда имеем три нетривиальных решения уравнения (28): $x_1(\bar{\mu}, t)$, $x_2(\bar{\mu}, t)$ и $x_0(t)$. При этом $x_1(\bar{\mu}, t)$ и $x_0(t)$ — точки минимума для потенциала $v_{\bar{\mu}t}^0(x)$ (27). При $\frac{t^2-1}{6t} < \bar{\mu} < x_0(t)$ мы имеем две точки пересечения $\varphi(x)$ с осью Ox : $x = x_2(\bar{\mu}, t)$ и $x = x_0(t)$ (кривая 3 на рис.12). В этом случае эффективный потенциал имеет минимум при $x = 0$ и $x = x_0(t)$. Также отметим, что при $\bar{\mu}_*(t) < \bar{\mu} < x_0(t)$ величина $x_2(\bar{\mu}, t)$, в зависимости от $\bar{\mu}$ принимает любые значения — от $\bar{x}_0(t)$ при $\bar{\mu} = \bar{\mu}_*(t)$, до $x_0(t)$, при $\bar{\mu} = x_0(t)$. Если $\bar{\mu} > x_0(t)$, тогда $\varphi(x) > 0$ при всех $x \geq 0$ (кривая 4 на рис.12), т.е. уравнение стационарности (28) имеет только тривиальное решение.

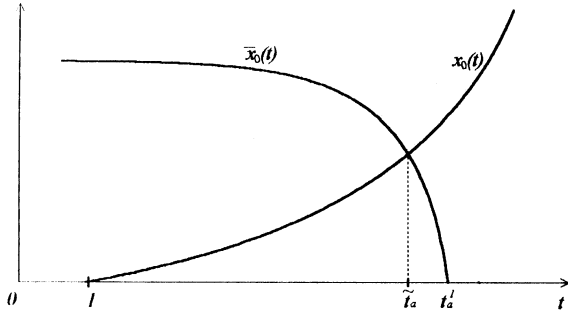


Рис. 11. Функция $\varphi(x)$ при различных значениях величины химического потенциала $\bar{\mu}$ (случай $\tilde{t}_a < t < T_a$).

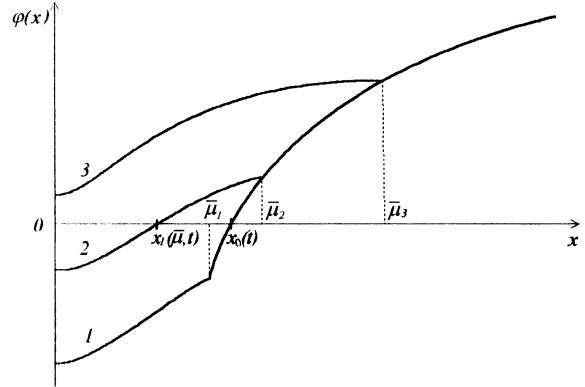


Рис. 12. Функция $\varphi(x)$ при различных значениях величины химического потенциала $\bar{\mu}$ (случай $T_a < t < t_a^1$).

С. Случай $a > a_*$ (46) и $t > t_a^1$ (47) полностью описывается пунктом **А** этого раздела и графически представлен на рис.8.

3.2 Случай $G < G_c$. Фазовая структура

На основе проведенного в предыдущем пункте анализа функции $\varphi(x)$ (33) мы теперь сможем описать фазовый портрет модели НИЛ в зависимости от значений $(\bar{\mu}, t) \in \bar{\Omega}_0$ (26).

I. Пусть $a < a_*$ (46). Используя свойства функции $\varphi(x)$ (см. рис.8 и соответствующий ему случай **A** предыдущего пункта), можно сделать следующие выводы. Предположим, что значение параметра t фиксировано при $t > 1$. Тогда при $\bar{\mu} < \frac{t^2-1}{6t}$ уравнение стационарности (28) имеет два корня $x = x_0(t)$ и $x = 0$. Причем абсолютный минимум потенциала $v_{\bar{\mu}t}^0(x)$ находится в точке $x_0(t)$. Это означает, что точки плоскости $(\bar{\mu}, t)$, расположенные ниже кривой $\bar{\mu} = \frac{t^2-1}{6t}$, соответствуют массивной фазе теории — фазе **B**, в которой исходная киральная симметрия (2) модели НИЛ спонтанно нарушена, а фермионы имеют массу $\Sigma_0(\lambda)$ ($\Sigma_0(\lambda) = 2\pi\lambda_0 x_0(t)$ см. (24)), не зависящую от μ . Если $\bar{\mu} > x_0(t)$, то уравнение стационарности имеет только тривиальное решение, и поэтому для всех точек плоскости $(\bar{\mu}, t)$, расположенных выше кривой $\bar{\mu} = x_0(t)$, будем иметь безмассовую кирально симметричную фазу **A**.

Теперь рассмотрим значения параметров $(\bar{\mu}, t) : \frac{t^2-1}{6t} < \bar{\mu} < x_0(t)$. При этом уравнение стационарности (28) имеет два нетривиальных решения: $x = x_2(\bar{\mu}, t)$ и $x = x_0(t)$. В этом случае эффективный потенциал в точке $x_2(\bar{\mu}, t)$ имеет локальный максимум, а в нуле и в точке $x_0(t)$ достигает минимальное значение. Очевидно, что критическое значение химического потенциала, при котором глобальный минимум функции $v_{\bar{\mu}t}^0(x)$ переходит из точки $x_0(t)$ в точку $x = 0$, определяется уравнением

$$v_{\bar{\mu}t}^0(x_0(t)) = v_{\bar{\mu}t}^0(0). \quad (52)$$

Подставляя (27) в уравнение (52), получаем следующее решение:

$$\bar{\mu}_{1c}(t) = \left\{ \frac{6}{t} [v_t(0) - v_t(x_0(t))] \right\}^{1/3}, \quad (53)$$

где

$$v_t(x) = v_0(x) - \frac{2t}{\pi} \int_0^\infty u^2 \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{2\pi}{t} \sqrt{x^2 + u^2} \right) \right] du, \quad (54)$$

$$v_0(x) = \frac{x^2}{12} + \frac{ax^2}{2} - 2a^2 \ln \left(1 + \frac{x^2}{4a} \right) + \frac{x^4}{8} \ln \left(1 + \frac{4a}{x^2} \right). \quad (55)$$

На плоскости $(\bar{\mu}, t)$ функция $\bar{\mu}_{1c}(t)$ изображается кривой, обычно называемой критической кривой, ниже которой находится массивная фаза **B**, выше нее — безмассовая фаза **A** (см. рис.13). Так как при пересечении критической кривой параметр порядка теории (масса фермионов, которая совпадает со значением точки глобального минимума потенциала $V_{\mu L}(\Sigma)$) скачком меняет свое значение, то переход из фазы **B** в фазу **A** и наоборот в этом случае есть фазовый переход первого рода. Из выражения (53) можно извлечь асимптотическое поведение критической кривой при $t \rightarrow 1_+$. Для этого необходимо использовать разложение функции $v_t(x)$ (54) в ряд Тейлора и оставить в нем четыре первых члена. Учитывая также соотношение (39), имеем

$$\bar{\mu}_{1c}(t) = \frac{1}{3}(t-1) \left[1 + \left(\frac{\alpha}{6} \right)^2 (t-1)^2 \right] + O((t-1)^5) \quad \text{при} \quad t \rightarrow 1_+. \quad (56)$$

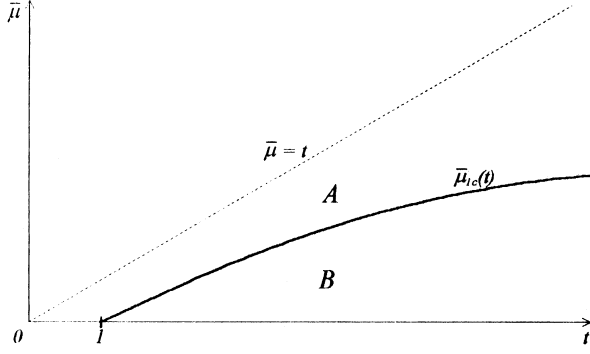


Рис. 13. Фазовый портрет модели НИЛ при значении константы связи $0 < G < (0.917\dots)G_c$.

Сравнивая (56) и (39), видим, что функции $\frac{t^2-1}{6t}$, $\bar{\mu}_{1c}(t)$ и $x_0(t)$ совпадают при $t = 1$ и имеют одинаковую касательную в этой точке. Для нахождения поведения $\bar{\mu}_{1c}(t)$ при $t \rightarrow \infty$ нужно воспользоваться формулой (П.7) из приложения 2, а также асимптотикой (19) для $\Sigma_0(\lambda)$. В результате получим

$$\bar{\mu}_{1c}(t) \approx (0.321\dots)t \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty. \quad (57)$$

Следует заметить, что во всех точках критической кривой $\bar{\mu}_{1c}(t)$ происходит фазовый переход первого рода. Исключением, как показано в разделе 3, является лишь точка $(0,1)$, при пересечении которой мы имеем фазовый переход второго рода.

II. Пусть $a > a_*$ (46). На основании результатов исследования поведения функции $\varphi(x)$ (33), проведенного в случаях **B** и **C** раздела 3.1 и отраженного на рис. 8, 10, 11 и 12, мы можем качественно описать фазовый портрет модели. Для этого сперва зафиксируем значение параметра t при $1 \leq t < \tilde{t}_a$ (49). Тогда при $\bar{\mu} < x_0(t)$ имеем глобальный минимум потенциала $v_{\bar{\mu}t}^0(x)$ в точке $x_0(t)$ (см. рис.10, кривая 1), что соответствует массивной фазе **B** (в этом случае фермионы имеют массу $\Sigma_0(\lambda)$). Если $x_0(t) < \bar{\mu} < \frac{t^2-1}{6t}$, то функция $\varphi(x)$ обращается в нуль лишь при $x = x_1(\bar{\mu}, t)$ (кривая 2 на рис.10). В этой точке у эффективного потенциала глобальный минимум, а значит, модель НИЛ при указанных значениях параметров $\bar{\mu}$ и t будет находиться в другой массивной фазе **C**, где масса фермионов становится равной $\tilde{\Sigma}_0(\mu, \lambda) \equiv 2\pi\lambda_0 x_1(\bar{\mu}, t)$ и приобретает зависимость от химического потенциала ¹. С помощью рис.10 нетрудно понять (с учетом (24)), что

$$\tilde{\Sigma}_0(\mu, \lambda) \rightarrow \Sigma_0(\lambda) \quad \text{при} \quad \bar{\mu} \rightarrow x_0(t)_+, \quad (58)$$

$$\tilde{\Sigma}_0(\mu, \lambda) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \bar{\mu} \rightarrow \frac{t^2-1}{6t}. \quad (59)$$

¹Доказательство того, что при указанных значениях параметров находится новая массивная фаза **C** теории, приведено в работе [17]. Здесь показано, что на линии $\mu = \Sigma_0(\lambda)$ вторая производная по μ термодинамического потенциала системы терпит разрыв. Следовательно, эта линия согласно критерию фазовых переходов [15] есть кривая фазовых переходов второго рода из одной массивной фазы **B** теории в другую массивную фазу **C**. В фазе **B** плотность частиц в вакууме равна нулю, а в фазе **C** плотность частиц отлична от нуля. Кроме того, различны и массы одночастичных фермионных возбуждений основных состояний этих фаз.

При $\bar{\mu} > \frac{t^2-1}{6t}$, уравнение стационарности (28) имеет только тривиальное решение $x = 0$ (см. рис.10, кривая 3). Поэтому в этом случае фермионы находятся в безмассовой фазе **A**.

Таким образом, при $1 \leq t < \tilde{t}_a$, на фазовом портрете $(\bar{\mu}, t)$ мы можем отметить две критические кривые:

$$\bar{\mu}_{2c}(t) = x_0(t), \quad (60)$$

$$\bar{\mu}_{3c}(t) = \frac{t^2 - 1}{6t}. \quad (61)$$

Одна из них $\bar{\mu}_{2c}(t)$ изображена кривой ab на рис.14, а другая — $\bar{\mu}_{3c}(t)$ — есть кривая ac на рис.14. Так как параметр порядка — масса фермиона — непрерывен на критических кривых $\bar{\mu}_{2c}(t)$ и $\bar{\mu}_{3c}(t)$, то фазовые переходы **B** \leftrightarrow **C** и **C** \leftrightarrow **A** являются фазовыми переходами второго рода.

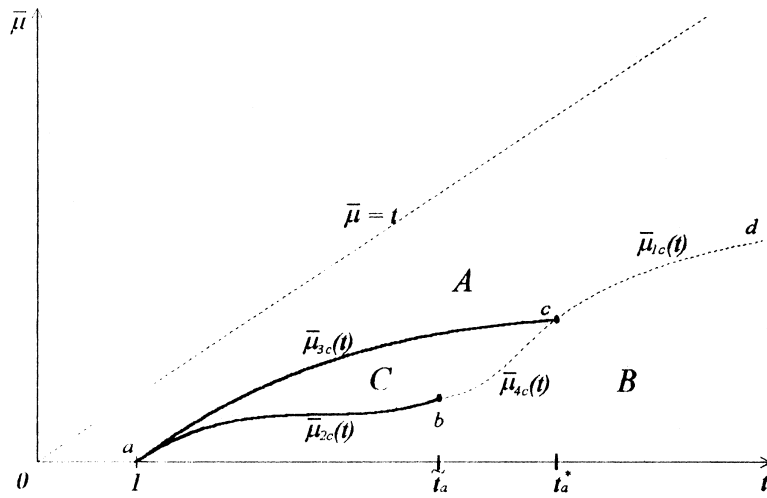


Рис. 14. Фазовый портрет модели НИЛ при значении константы связи $(0.917\dots) G_c < G < G_c$ (на этом и следующих рисунках сплошные и штрихованные линии изображают кривые точек фазовых переходов соответственно второго и первого родов).

Теперь зафиксируем значение параметра t при $\tilde{t}_a < t < T_a$ (50). В этом случае решение уравнения стационарности (28) графически отражено на рис.11. Так, при $\bar{\mu} < \bar{\mu}_*(t)$ (48) (кривая 1 на рис.11) глобальный минимум функции $v_{\bar{\mu}t}^0(x)$ (27) расположен в точке $x_0(t)$, что соответствует массивной фазе **B**. Если $\bar{\mu}_*(t) < \bar{\mu} < x_0(t)$ (кривая 2 на рис.11), тогда имеем ситуацию, когда эффективный потенциал (27) имеет минимумы в двух точках $x_1(\bar{\mu}, t)$ и $x_0(t)$. Критическое значение химического потенциала $\bar{\mu}_{4c}(t)$, при котором глобальный минимум функции $v_{\bar{\mu}t}^0(x)$ переходит из точки $x_0(t)$ в точку $x_1(\bar{\mu}, t)$, задается уравнением

$$v_{\bar{\mu}t}^0(x_0(t)) = v_{\bar{\mu}t}^0(x_1(\bar{\mu}, t)). \quad (62)$$

На плоскости $(\bar{\mu}, t)$ критическая кривая $\bar{\mu}_{4c}(t)$ разделяет фазы **B** и **C** (кривая bc на рис.14). Заметим, что при $\tilde{t}_a < t < t_a^1$ (см.(49)) справедливы следующие соотношения: $x_1(\bar{\mu}, t) < \bar{x}_0(t) < x_0(t)$. Тем самым при $\tilde{t}_a < t < T_a$ имеем

$$\tilde{\Sigma}_0(\mu, \lambda) < \Sigma_0(\lambda) \quad \text{при} \quad \bar{\mu} \rightarrow \bar{\mu}_{4c}(t)_+, \quad (63)$$

т.е. при переходе через кривую $\bar{\mu}_{4c}(t)$, параметр порядка теории скачком меняет свое значение. Следовательно, $\bar{\mu}_{4c}(t)$ является кривой точек фазовых переходов первого рода из массивной фазы **B** в массивную фазу **C** и обратно. При этом кривая фазовых переходов второго рода $\bar{\mu}_{2c}(t)$ (60) в критической точке b переходит в кривую фазовых переходов первого рода $\bar{\mu}_{4c}(t)$. Такую точку обычно называют трикритической точкой. Далее при $x_0(t) < \bar{\mu} < \frac{t^2-1}{6t}$ функция $\varphi(x)$ имеет нуль лишь в точке $x_1(\bar{\mu}, t)$ (кривая 3 на рис.11), в которой эффективный потенциал (27) имеет глобальный минимум.

Таким образом, для указанных выше значений параметров $\bar{\mu}$ и t , мы, по-прежнему, будем иметь массивную фазу **C** теории — фазу с фермионами массы $\tilde{\Sigma}_0(\mu, \lambda)$. Причем справедлива асимптотика (59). При пересечении критической кривой $\bar{\mu}_{3c}(t)$ (61) (кривая ac на рис.14) в модели восстанавливается киральная инвариантность, фермионы становятся безмассовыми, и мы попадаем в фазу **A** с помощью фазового перехода второго рода.

Рассмотрим значение параметра t на интервале $T_a < t < t_a^1$. При $\bar{\mu} < \bar{\mu}_*(t)$ (48) (кривая 1 на рис.12) глобальный минимум эффективного потенциала (27) расположен в точке $x_0(t)$, что соответствует фазе **B**. Если $\bar{\mu} > x_0(t)$ (кривая 4 на рис.12), тогда уравнение стационарности (28) имеет только тривиальное решение, и модель НИЛ находится в безмассовой фазе **A**. Если $\frac{t^2-1}{6t} < \bar{\mu} < x_0(t)$ (кривая 3 на рис.12), то функция $v_{\bar{\mu}t}^0(x)$ имеет минимумы в точках $x_0(t)$ и $x = 0$. В этом случае при $t = T_a$ и $\bar{\mu} = \frac{t^2-1}{6t}$ (см. (50)) имеем: в точке $x = 0$ находится глобальный минимум, а при $x = x_0(t)$ у функции $v_{\bar{\mu}t}^0(x)$ находится точка перегиба. Следовательно, здесь располагается фаза **A** теории. При $t = t_a^1$ и $\bar{\mu} = \frac{t^2-1}{6t}$ глобальный минимум эффективного потенциала находится в точке $x = x_0(t)$, т.е. в этом случае мы имеем фазу **B**.

Таким образом, непрерывно перемещаясь вдоль линии $\bar{\mu} = \frac{t^2-1}{6t}$ на интервале $T_a < t < t_a^1$, мы обнаружим критическую точку c при $t = t_a^*$ (см. рис.14), переходя через которую, модель НИЛ будет иметь фазовый переход первого рода из фазы **A** в фазу **B** и наоборот. Так что для всех точек плоскости $(\bar{\mu}, t)$ — $\frac{t^2-1}{6t} < \bar{\mu} < x_0(t)$ и $T_a < t < t_a^1$ — мы будем иметь критическую кривую фазовых переходов первого рода $\bar{\mu}_{1c}(t)$ (53), исходящую из точки c (кривая cd на рис.14) и разделяющую фазы **A** и **B**. Когда $\bar{\mu}_*(t) < \bar{\mu} < \frac{t^2-1}{6t}$ и $T_a < t < t_a^1$ (кривая 2 на рис.12), то функция $v_{\bar{\mu}t}^0(x)$ имеет минимумы в точках $x_1(\bar{\mu}, t)$ и $x_0(t)$. В этом случае можно выделить две массивные фазы: фазу **B** с массой фермионов $\Sigma_0(\lambda)$ и фазу **C**, в которой масса фермионов $\tilde{\Sigma}_0(\mu, \lambda)$. Они разделены критической кривой фазовых переходов первого рода $\bar{\mu}_{4c}(t)$ (кривая bc на рис.14), определяемой уравнением (62). При этом остаются в силе асимптотики (59) и (63). Из (59) также следует, что для $T_a < t < t_a^1$ фазы **A** и **C** разделены критической кривой фазовых переходов второго рода $\bar{\mu}_{3c}(t)$ (61)

(кривая ac на рис.14). Также заметим, что кривые фазовых переходов первого рода $\bar{\mu}_{4c}(t)$ и $\bar{\mu}_{1c}(t)$ в точке c плавно переходят друг в друга. Кроме того, в точку c приходит и линия фазовых переходов второго рода $\bar{\mu}_{3c}(t)$. Обычно критическую точку c называют трикритической точкой.

Наконец, рассмотрим интервал $t > t_a^1$ (47) (см. рис.8). Так как этот случай полностью совпадает с ситуацией, рассмотренной в случае **I** ($a < a_*$) и отраженной на рис.13, то здесь будем иметь две фазы: **A** и **B**, разделенные критической кривой фазовых переходов первого рода $\bar{\mu}_{1c}(t)$ (53) (кривая cd на рис.14).

3.3 Случай $G > G_c$. Уравнение стационарности

Здесь величина $F(0) < 0$ (см. (16)), поэтому удобно ввести следующее обозначение:

$$F(0) = \frac{\pi^2}{2G} - \frac{\Lambda^2}{8} \equiv -\frac{\pi^2}{6}\bar{\lambda}_0^2. \quad (64)$$

Как и в предыдущем случае (см. (24)), введем величины

$$a \equiv \frac{\Lambda^2}{16\pi^2\bar{\lambda}_0^2}; \quad x \equiv \frac{\Sigma}{2\pi\bar{\lambda}_0}; \quad \bar{\mu} \equiv \frac{\mu}{2\pi\bar{\lambda}_0}; \quad t \equiv \frac{\lambda}{\bar{\lambda}_0}. \quad (65)$$

В новых обозначениях потенциал модели $v_{\bar{\mu}t}(x)$ (25) внешне претерпевает незначительные изменения (лишь только в первом слагаемом меняется знак):

$$\begin{aligned} v_{\bar{\mu}t}(x) = & -\frac{x^2}{12} + \frac{a}{2}x^2 - 2a^2 \ln\left(1 + \frac{x^2}{4a}\right) + \frac{x^4}{8} \ln\left(1 + \frac{4a}{x^2}\right) - \\ & -\frac{2t}{\pi} \int_0^\infty u^2 \ln\left[1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{t}\sqrt{x^2 + u^2}\right)\right] du - \frac{t}{2} \sum_{n=0}^\infty \alpha_n \Theta(\bar{\mu} - \sqrt{x^2 + t^2 n^2}) \times \\ & \times \left\{ \bar{\mu}(\bar{\mu}^2 - x^2 - t^2 n^2) - \frac{2}{3} [\bar{\mu}^3 - (x^2 + t^2 n^2)^{3/2}] \right\}. \end{aligned} \quad (66)$$

Соответственно в области $\bar{\Omega}_0$ (см. (26)) имеем эффективный потенциал

$$\begin{aligned} v_{\bar{\mu}t}^0(x) = & -\frac{x^2}{12} + \frac{ax^2}{2} - 2a^2 \ln\left(1 + \frac{x^2}{4a}\right) + \frac{x^4}{8} \ln\left(1 + \frac{4a}{x^2}\right) - \\ & -\frac{2t}{\pi} \int_0^\infty u^2 \ln\left[1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{t}\sqrt{x^2 + u^2}\right)\right] du - \frac{t}{2} \Theta(\bar{\mu} - x) \left(\frac{2}{3}x^3 - \bar{\mu}x^2 + \frac{1}{3}\bar{\mu}^3\right), \end{aligned} \quad (67)$$

для которого уравнение стационарности имеет вид (28), где выражение для функции $\varphi(x)$, по-прежнему, содержится в (29), а (с учетом обозначений (65)) вместо (30) мы будем иметь

$$f(x) \equiv \frac{F(\Sigma)}{\pi^2\bar{\lambda}_0^2} = -\frac{1}{6} + \frac{x^2}{2} \ln\left(1 + \frac{4a}{x^2}\right). \quad (68)$$

Выражение для функции $i(x) \equiv I(\Sigma) / \pi^2 \bar{\lambda}_0^2$ останется без изменений (31). Качественный анализ функций $f(x)$ и $i(x)$ был проведен раньше (см. раздел 3 случай (i)) и отражен на рис.1, где показаны графики функций $F(\Sigma)$ и $I(\Sigma)$, которые пересекаются в единственной точке

$$\Sigma_0(\lambda) \equiv 2\pi \bar{\lambda}_0 x_0(t). \quad (69)$$

Так как $f(x)$ монотонно возрастает к предельному значению

$$f(x) \rightarrow -\frac{1}{6} + 2a \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty, \quad (70)$$

то решение уравнения (35) $x_0(t)$ определено лишь при $a > 1/12$. При этом, если $t \rightarrow 0$, то $x_0(t) \rightarrow m \equiv M / 2\pi \bar{\lambda}_0 \neq 0$ — точка пересечения графика функции $f(x)$ с осью Ox ($M \equiv \Sigma_0(0)$ см. (69)). Нетрудно показать, что $m \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$, и $m \rightarrow \infty$ при $a \rightarrow 1/12$. Если $t \rightarrow \infty$, то верна асимптотика (19): $x_0(t) \sim (2,719\dots)t$.

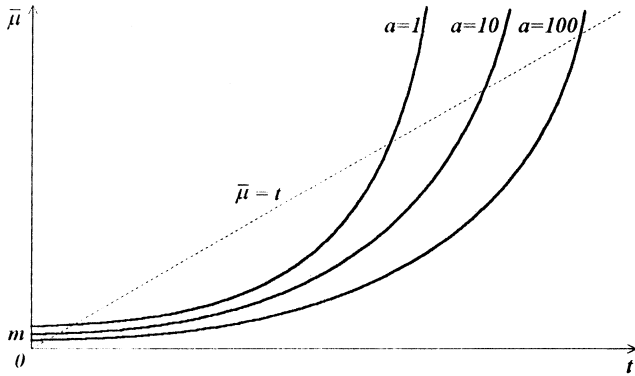


Рис. 15. Функция $\bar{\mu} = x_0(t)$ при различных значениях параметра a и для константы связи $G > G_c$.

Таким образом, видно, что при достаточно малых, а также — при больших значениях t график функции $\bar{\mu} = x_0(t)$ лежит вне области $\bar{\Omega}_0$. Так, при $a = 100$ только точки этой кривой, соответствующие интервалу $0.189\dots < t < 563.585\dots$, находятся в $\bar{\Omega}_0$, при $a = 10$ этот интервал имеет вид $0.223\dots < t < 177.550\dots$, при $a = 1$ — $0.294\dots < t < 53.978\dots$, при $a = 0.1$ — $0.981\dots < t < 7.196\dots$ и т.д. Наконец, существует значение $a = \bar{a} = 0.0876\dots$, при котором график функции $\bar{\mu} = x_0(t)$ лишь касается границы области $\bar{\Omega}_0$ в точке $t = \bar{t} = 2.599\dots$. На

рис.15 качественно отражено поведение функции $\bar{\mu} = x_0(t)$ при различных значениях параметра a . Тем самым мы рассмотрели поведение функции $\varphi(x)$ при $x \geq \bar{\mu}$ (см. (33)) в случае $G > G_c$.

Теперь рассмотрим функцию $\Phi(x) \equiv \varphi(x)$ при $x < \bar{\mu}$ (см. (34)), для которой в случае $G > G_c$ вместо (40) имеем

$$\Phi(0) = \varphi(0) = -\frac{t^2 + 1}{6} + \bar{\mu}t. \quad (71)$$

Таким образом,

$$\varphi(0) < 0 \quad \text{при} \quad \bar{\mu} < \frac{t^2 + 1}{6t}, \quad (72)$$

$$\varphi(0) > 0 \quad \text{при} \quad \bar{\mu} > \frac{t^2 + 1}{6t}. \quad (73)$$

Далее мы отметим справедливость асимптотики (41) при $x \ll 1$, где $\Phi(0)$ задается (71), а также с учетом (70) факт

$$\Phi(x) \rightarrow -\frac{1}{6} + 2a + t\bar{\mu} - tx \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty. \quad (74)$$

Функция $\Psi(x) \equiv \frac{d\Phi}{dx}$ такая же, как и в случае $G < G_c$. Тем самым выражения (43)-(45) имеют силу и в случае $G > G_c$. Поведение функции $\Psi(x)$, а следовательно, и функции $\Phi(x)$, сильно зависит от знака величины α (38). Так, при $t < t_a^1$ (47) мы имеем $\alpha > 0$. В этом случае $\Psi(x) > 0$ при $x < \bar{x}_0(t)$ и $\Psi(x) < 0$ при $x > \bar{x}_0(t)$ (см. рис.5, кривая 1). Соответствующее поведение функции $\Phi(x)$ представлено на рис.6. Если $\bar{\mu} < \bar{\mu}_*(t)$ (48), то $\Phi(x) < 0$ при всех $x \geq 0$ (кривая 1 на рис.6). При $\bar{\mu}_*(t) < \bar{\mu} < \frac{t^2+1}{6t}$ (см. (72)) график функции $\Phi(x)$ пересекает ось Ox в двух точках $x_1(\bar{\mu}, t)$ и $x_2(\bar{\mu}, t)$ (кривая 3 на рис.6). Когда $\bar{\mu} > \frac{t^2+1}{6t}$, тогда функция $\Phi(x)$ обращается в нуль лишь при $x = x_2(\bar{\mu}, t) > \bar{x}_0(t)$ (кривая 4 на рис.6).

Если $t > t_a^1$, то $\alpha < 0$. В этом случае функция $\Psi(x) < 0$ при всех $x > 0$ (кривая 2 на рис.5). Следовательно, функция $\Phi(x)$ (34) монотонно убывает на всей области $x > 0$ так, что если $\bar{\mu} < \frac{t^2+1}{6t}$, то $\Phi(x) < 0$ при всех $x > 0$ (рис.7, кривая 1), а когда $\bar{\mu} > \frac{t^2+1}{6t}$, тогда график функции $\Phi(x)$ пересекает ось Ox в единственной точке $x = x_2(\bar{\mu}, t)$ (кривая 2 на рис.7).

Теперь заметим, что в случае $G > G_c$ поведение графика функции $\varphi(x)$ аналогично рассмотренному выше случаю $G < G_c$ с той лишь разницей, что величине хиппотенциала будут соответствовать другие интервалы изменения значения $\bar{\mu}$ для каждой кривой на рис.8, 10-12. Так², при $t < \tilde{t}_a$ мы имеем рис.10, на котором линии 1 отвечают значениям хиппотенциала $\bar{\mu} < x_0(t)$. При $x_0(t) < \bar{\mu} < \frac{t^2+1}{6t}$ мы имеем кривую 2, а когда $\bar{\mu} > \frac{t^2+1}{6t}$ — кривую 3 на рис.10. Если $\tilde{t}_a < t < T_a$, то мы имеем функцию $\varphi(x)$ изображенную на рис.11, где T_a — значение параметра t , при котором $\frac{t^2+1}{6t} = x_0(t)$. Ясно, что (ср. с формулой (50))

$$\begin{aligned} x_0(t) &< \frac{t^2+1}{6t} && \text{при} && t < T_a; \\ x_0(t) &> \frac{t^2+1}{6t} && \text{при} && T_a < t < t_a^1. \end{aligned} \quad (75)$$

В этом случае при $\bar{\mu} < \bar{\mu}_*(t)$ (48) мы имеем кривую 1 на рис.11, при $\bar{\mu}_*(t) < \bar{\mu} < x_0(t)$ — кривую 2, при $x_0(t) < \bar{\mu} < \frac{t^2+1}{6t}$ — кривую 3, при $\bar{\mu} > \frac{t^2+1}{6t}$ — кривую 4. Когда $T_a < t < t_a^1$ (47), тогда при $\bar{\mu} < \bar{\mu}_*(t)$ имеем кривую 1 на рис.12, при $\bar{\mu}_*(t) < \bar{\mu} < \frac{t^2+1}{6t}$ — кривую 2, при $\frac{t^2+1}{6t} < \bar{\mu} < x_0(t)$ — кривую 3, при $\bar{\mu} > x_0(t)$ — кривую 4 на рис.12. Наконец, случай $t > t_a^1$ отражен на рис.8, где изображены три графика функции $\varphi(x)$. Так, кривой 1 на рис.8 отвечают значения хиппотенциала $\bar{\mu} < \frac{t^2+1}{6t}$, кривой 2 соответствует интервал $\frac{t^2+1}{6t} < \bar{\mu} < x_0(t)$, а для кривой 3 — значения $\bar{\mu} > x_0(t)$.

²Точка \tilde{t}_a при $G < G_c$ определена в (49). В случае $G > G_c$ ее можно определить подобным соотношением.

Так же, как и в случае $G < G_c$, отметим, что значения \tilde{t}_a и T_a находятся вблизи точки t_a^1 . Так, при $a = 5; 10; 100$ имеем соответственно: $t_a^1 = 2.414...; 3.415...; 10.800...$, $\tilde{t}_a = 2.388...; 3.384...; 10.710...$ и $T_a = 2.406...; 3.394...; 10.755...$.

3.4 Фазовая структура при $G > G_c$

Если при $G < G_c$ все критические кривые фазовой диаграммы располагались в области $\bar{\Omega}_0$ (см. рис.13, 14), то в рассматриваемом случае в этой области мы можем зафиксировать лишь часть критических явлений модели НИЛ. Начнем с рассмотрения значений параметров $(\bar{\mu}, t) \in \bar{\Omega}_0$ (26). Так как функция $\varphi(x)$ как для случая $G < G_c$, так и для $G > G_c$, обладает одинаковыми свойствами, изображенными на рис.8, 10-12, то, повторяя дословно весь анализ, проведенный в пункте 3.2, можно сделать следующие выводы.

1. При $t < \tilde{t}_a$ (49) мы имеем три фазы модели НИЛ (см. рис.16). Так, массивная фаза **B** (с массой фермионов $\Sigma_0(\lambda)$) отделена от массивной фазы **C** (с массой фермионов $\tilde{\Sigma}_0(\mu, \lambda) \leq \Sigma_0(\lambda)$) критической кривой фазовых переходов второго рода $\bar{\mu}_{2c}(t) = x_0(t)$ (см. (60) и рис.15), которая изображена кривой mb на рис.16. Безмассовая кирально симметричная фаза **A** отделяется от фазы **C** кривой фазовых переходов второго рода (ср. с формулой (61)):

$$\bar{\mu}_{3c}(t) = \frac{t^2 + 1}{6t}, \quad (76)$$

которая изображена кривой ac на рис.16.

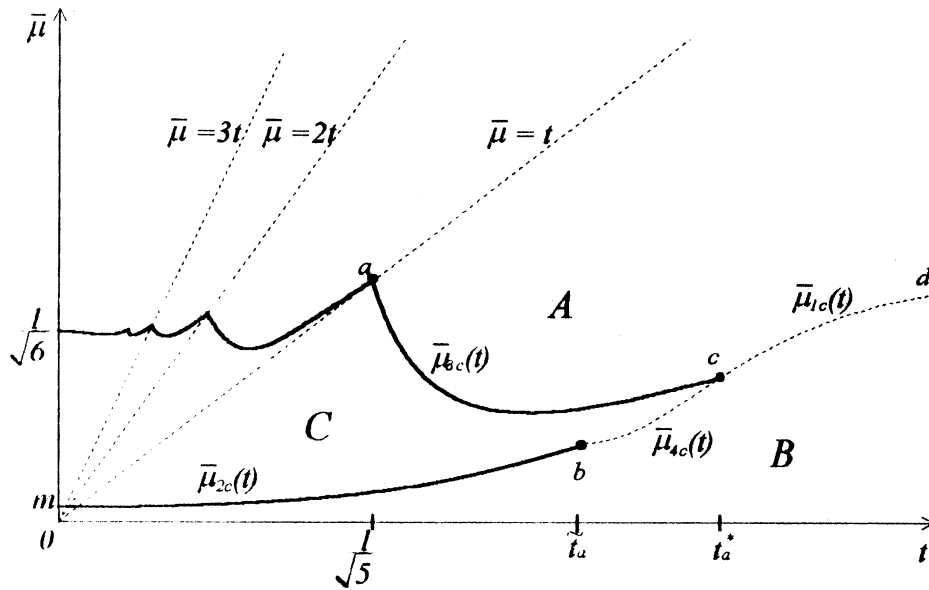


Рис. 16. Фазовый портрет модели НИЛ при значении константы связи $G_c < G < (1.225...) G_c$.

2. При $\tilde{t}_a < t < T_a$ (см. (75)) фазовый портрет модели, по-прежнему, состоит из вышеуказанных трех фаз. При этом фазы **A** и **C** отделены друг от друга критической кривой $\bar{\mu}_{3c}(t)$, а массивные фазы **B** и **C** разделяются кривой фазовых переходов первого рода $\bar{\mu}_{4c}(t)$ (кривая bc на рис.16), которая неявно задается уравнением (62), где для $v_{\bar{\mu}t}^0(x)$ мы должны воспользоваться выражением (67). В этом случае мы также отметим наличие на фазовом портрете (см. рис.16) трикритической точки b , в которой критическая кривая фазовых переходов второго рода $\bar{\mu}_{2c}(t)$ непрерывно переходит в критическую кривую фазовых переходов первого рода $\bar{\mu}_{4c}(t)$.

3. При $t > t_a^1$ (47) мы имеем две фазы **A** и **B**, разделенные критической кривой фазовых переходов первого рода $\bar{\mu}_{1c}(t)$ (кривая cd на рис.16), которая задается выражениями (53) и (54). При этом вместо функции (55) мы должны использовать (см. (67))

$$v_0(x) = -\frac{x^2}{12} + \frac{ax^2}{2} - 2a^2 \ln\left(1 + \frac{x^2}{4a}\right) + \frac{x^4}{8} \ln\left(1 + \frac{4a}{x^2}\right). \quad (77)$$

Подставляя (77) в (П.4) мы получаем выражение, отличное от (П.7) только знаком первого слагаемого ($1/6 \rightarrow -1/6$). Таким образом, как несложно показать, асимптотика (57) останется в силе и в случае $G > G_c$.

4. Наконец, рассмотрим интервал $T_a < t < t_a^1$, где мы имеем трикритическую точку c при некотором значении $t = t_a^*$ (см. рис.16), переходя через которую, критическая кривая фазовых переходов первого рода $\bar{\mu}_{4c}(t)$ плавно переходит в критическую кривую фазовых переходов первого рода $\bar{\mu}_{1c}(t)$, и более того, в этой точке заканчивается критическая кривая фазовых переходов второго рода $\bar{\mu}_{3c}(t)$. При этом модель НИЛ может находиться в трех фазах **A**, **B** и **C** так, как это показано на рис.16.

Сделаем интерполяцию полученного фазового портрета модели в области $\bar{\Omega}_0$ на всю плоскость $(\bar{\mu}, t)$. Сначала напомним некоторые результаты работы [9], где была рассмотрена фазовая структура модели НИЛ при $\mu \neq 0$ и $L = \infty$ в плоскости переменных μ, M . Используя наши обозначения, их можно сформулировать так. При $t = 0$ и $\bar{\mu} < m < m_{1c} = 0.346\dots$, где $m_{1c} \equiv M_{1c}/2\pi\bar{\lambda}_0$ (см. [9]), модель находится в массивной фазе **B** (фермионы с массой $\Sigma_0(0) = M$). При этом, если $\bar{\mu} = m$, то мы имеем критическую точку фазового перехода второго рода из фазы **B** в фазу **C**, для которой величина химпотенциала изменяется в интервале $m < \bar{\mu} < 1/\sqrt{6}$. В точке $\bar{\mu} = 1/\sqrt{6}$ мы имеем фазовый переход второго рода из фазы **C** в фазу **A**.

Теперь заметим, что кривая $\tilde{\mu} = x_0(t)$, заданная неявно уравнением (35), не зависит от величины химпотенциала $\bar{\mu}$ и определена при всех $t \geq 0$. При том часть ее, лежащая в $\bar{\Omega}_0$, совпадает с критической кривой $\bar{\mu}_{2c}(t) = x_0(t)$ (см. (60) и рис.16), а точка с координатами $(m, 0)$ является критической точкой модели (см. [9]) и удовлетворяет уравнению (35). Поэтому естественно предположить, что целиком вся кривая $\tilde{\mu}$ ($\equiv \bar{\mu}_{2c}(t) = x_0(t)$) есть критическая кривая модели НИЛ, в том числе и для точек $(\bar{\mu}, t) \notin \bar{\Omega}_0$ ³.

³При пересечении кривой $\bar{\mu}_{2c}(t)$ в области $\bar{\Omega}_0$ вторая производная по μ термодинамического потенциала (ТДП) модели терпит разрыв [17] в то время, как в точке $(m, 0)$ разрывны производные ТДП, начиная с третьей [9]. Поэтому на этой кривой должна существовать точка, в которой меняется характер фазовых переходов.

Критическая кривая $\bar{\mu}_{3c}(t)$ (76) выходит из области $\bar{\Omega}_0$ при $t = 1/\sqrt{5}$. В приложении 3 рассмотрена функция $\bar{\mu}_{3c}(t)$ для произвольных значений параметра t (см. (П.12)). В частности, установлено, что $\lim_{t \rightarrow 0} \bar{\mu}_{3c}(t) = 1/\sqrt{6}$. Таким образом, на рис.16 изображен фазовый портрет модели НИЛ для всех точек плоскости $(\bar{\mu}, t)$ в случае $a > a_{1c} = 0.453\dots$ (т. е. при $m < m_{1c} = 0.346\dots$), где критическая кривая фазовых переходов второго рода $\bar{\mu}_{3c}(t)$ как функция параметра t задается выражением (П.12).

В конце этого раздела отметим, что фазовые диаграммы на плоскостях $(\bar{\mu}, t)$ и (μ, λ) связаны между собой линейными масштабными преобразованиями (24) или (65). Поэтому на плоскости (μ, λ) фазовый портрет модели будет иметь такой же вид, как и на рис.13,14 и 16. Также заметим, что с помощью (17) и (24) несложно получить следующее соотношение:

$$G = \frac{12a}{12a+1}G_c \quad \text{при} \quad G < G_c = \frac{4\pi^2}{\Lambda^2}. \quad (78)$$

Таким образом, подставляя в (78) значение параметра a_* (46), установим, что на рис.13 изображен фазовый портрет при значении константы связи $0 < G < g_*G_c$, где

$$g_* = \frac{12a_*}{12a_*+1} = 0.917\dots \quad (79)$$

Соответственно на рис.14 мы имеем случай, когда константа связи принимает значение $g_*G_c < G < G_c$. Аналогично с помощью (64) и (65) получим

$$G = \frac{12a}{12a-1}G_c \quad \text{при} \quad G > G_c. \quad (80)$$

Тем самым при $G_c < G < g_{1c}G_c$, где

$$g_{1c} = \frac{12a_{1c}}{12a_{1c}-1} = 1.225\dots, \quad (81)$$

мы имеем ситуацию, изображенную на рис.16.

Следует отметить, что часть рис.16, расположенная в области $\bar{\Omega}_0$, качественно правильно отражает критические свойства модели при значениях константы связи $G > g_{1c}G_c$. Однако для нахождения фазовой структуры теории НИЛ при таких константах связи вне области $\bar{\Omega}_0$ требуются дополнительные исследования, которые мы планируем провести в скором времени.

Заключение

Предлагаемая работа посвящена исследованию совместного влияния нетривиальной топологии пространства-времени вида $R^3 \times S^1$ и ненулевой плотности частиц на основное состояние модели НИЛ. Здесь рассмотрен случай только периодических граничных условий (11) для полей. Основные результаты представлены на рис.13, 14 и 16, где изображены фазовые диаграммы модели для различных значений константы связи G . В настоящей статье детально рассмотрена теория НИЛ

при $0 < G < G_{1c} = (1.225\dots) G_c$ (см. (81)), где $G_c = 4\pi^2/\Lambda^2$ (Λ параметр обрезания). Случай $G > G_{1c}$ исследован только для значений химпотенциала μ и параметра $\lambda = 1/L$ (L – радиус компактификации), принадлежащих области Ω_0 (22), и представлен на рис.16.

Мы показали, что при достаточно больших значениях λ существуют значения химического потенциала $\mu_{1c}(\lambda)$ (см. (53)) (выражение (53) определяет функцию $\bar{\mu}_{1c}(t)$, которая связана с функцией $\mu_{1c}(\lambda)$ линейными преобразованиями (24) или (65)), при которых в системе восстанавливается киральная симметрия с помощью фазового перехода первого рода.

При сравнительно малых значениях λ модель описывает три различные фазы. В этом случае при $\mu < \Sigma_0(\lambda)$, где $\Sigma_0(\lambda)$ — масса фермионов при нулевом значении химического потенциала, наблюдается фаза со спонтанным нарушением киральной симметрии. В соответствующем ей вакууме плотность числа частиц равна нулю, и в нем могут существовать только фермионы с не зависящей от μ массой, равной $\Sigma_0(\lambda)$. При $\mu = \Sigma_0(\lambda)$ происходит фазовый переход второго рода в фазу, в которой также есть СНС, но в основном состоянии здесь уже плотность частиц отлична от нуля. Массы одночастичных фермионных возбуждений такого вакуума зависят от μ (т.е. от плотности частиц). Наконец, при дальнейшем увеличении μ в точке $\mu = \mu_{3c}(\lambda)$ (см. (61) или (П.12)) наступает фазовый переход второго рода в фазу с симметричным основным состоянием и с безмассовыми фермионами. Также отметим существование трикритических точек b и c на фазовой диаграмме (μ, λ) (см. рис.14 и 16).

Таким образом, мы видим, что локальные свойства квантовых систем существенно зависят от глобальных топологических свойств пространства-времени.

Авторы признательны профессорам И.Л.Бухбиндеру, А.Н.Валлу, С.Д.Одинцову, а также доктору Т.Инагаки за полезные обсуждения и критические замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Список литературы

- [1] *Nambu Y., Jona-Lasinio G.*// Phys. Rev. 1961. V.122, p. 345.
- [2] *Вакс В.Г., Ларкин А.И.*// ЖЭТФ. 1961. Т. 40, с. 282, 1392. *Арбузов Б.А., Тавхелидзе А.Н., Фаустов Р.Н.*// ДАН СССР. 1961. Т. 139. С. 345.
- [3] *Лифшиц Е.М., Л.П. Питаевский Л.П.* Статистическая физика. Т. 2. — М: Наука, 1978.
- [4] *Semenoff G., Wijewardhana L.*// Phys. Rev. Lett. 1989. V.63, p. 2633. *Dorey N., Mavromatos N.*// Phys. Lett. 1990. V.B250, p. 107. *Kovner A., Rosenstein B.*// Phys. Rev. 1990. V.B42, p. 4748. *Carena M., Clark T.E., Wagner C.E.M.*// Nucl. Phys. 1991. V.B356, p. 117.
- [5] *Волков М.К.*// ЭЧАЯ. 1986. Т. 17. С. 433.// ЭЧАЯ. 1993. Т. 24, с. 81.

- [6] *Weinberg S.*// Phys. Rev. 1976. V.D13. p. 974.
- [7] *Клименко К.Г.*// ТМФ. 1991. Т. 89, с. 211. *Klimenko K.G.*// Z.Phys. 1992. V.C54, p. 323. *Klimenko K.G., Vshivtsev A.S., Magnitsky B.V.*// Nuovo Cim. 1994. V. A107, p. 439. *Gusynin V.P., Miransky V.A., Shovkovy I.A.*// Phys. Rev. Lett. 1994. V. 73. P. 3499.// Phys. Lett. 1995. V. B349, p. 477.
- [8] *Kawati S., Miyata H.*// Phys. Rev. 1981. V. D23, p. 3010. *Fuchs J.*// Z.Phys. 1984. V. C22, p. 83. *Bernard V., Meissner U.-G., Zahed I.*// Phys. Rev. 1987. V. D36, p. 819. *Christov Chr.V., Goeke K.*// Acta Phys. Pol. 1991. V. B22, p. 187. *Ebert D., Kalinovsky Yu.L., Münchow L., Volkov M.K.*// Int. J. Mod. Phys. 1993. V. A8, p. 1295.
- [9] *Вшивцев А.С., Клименко К.Г.*// Письма в ЖЭТФ. 1996. Т. 64, с. 313.
- [10] *Ebert D., Volkov M.K.*// Phys. Lett. 1991. V. B272, p. 86. *Klevansky S.P., Lemmer R.H.*// Phys. Rev. 1989. V. D39, p. 3478. *Faber M., Ivanov A.N., Nagy M., Troitskaya N.I.*// Mod. Phys. Lett. 1993. V. A8, p. 335. *Shovkovy I.A., Turkowski V.M.*// Phys. Lett. 1995. V. B367, p. 213.
- [11] *Биррелл Н., Девис П.*// Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. — М.: Мир, 1984.
- [12] *Inagaki T., Muta T., Odintsov S.D.*// Mod. Phys. Lett. 1993. V. A8, p. 2117. //Progr. Theor. Phys. Suppl. 1997. V. 127. *Elizalde E., Leseduarde S., Odintsov S.D.*// Phys. Rev. 1994. V. D49, p. 5551. // Phys. Lett. 1995. V. B347, p. 33. *Kim D.K., Koh I.G.*// Phys. Rev. 1995. V. D51, p. 4573. *Forkel H.*// Phys. Lett. 1992. V. B280, p. 5. //Nucl. Phys. 1995. V. A581, p. 557.
- [13] *Вшивцев А.С., Клименко К.Г., Магницкий Б.В.*// Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 61, с. 871.
- [14] *Dolan L., Jackiw R.*// Phys. Rev. 1974. V. D9, p. 3320.
- [15] *Базаров И.П., Геворкян Э.В., Николаев П.Н.*// Термодинамика и статистическая физика. — М.: Изд-во МГУ, 1986.
- [16] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.*// Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981, т. 1. с. 651.
- [17] *Вшивцев А.С., Клименко А.К., Клименко К.Г.*// ЯФ. (1998).
- [18] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.*// Статистическая физика. — М.: Наука, 1976, т. 1, с. 196.
- [19] *Бейтмен Г., Эрдейи А.*// Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1965, т. 1. с. 52.

Рукопись поступила 22 сентября 1997 г.

Представление функции $I(\Sigma)$ в виде ряда

В работе [14] показано, что производная функции $I(\Sigma)$ (15) по переменной Σ^2 имеет вид

$$\frac{dI(\Sigma)}{d(\Sigma^2)} = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \Sigma^2} \left[\exp(L\sqrt{x^2 + \Sigma^2}) - 1 \right]}. \quad (П.1)$$

Там же получено следующее представление интеграла, стоящего в правой части (П.1):

$$\frac{dI(\Sigma)}{d(\Sigma^2)} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2L\Sigma} + \frac{1}{2} \ln \frac{L\Sigma}{4\pi} + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty \left[n^{-1} - [n^2 + L^2\Sigma^2 / (4\pi^2)]^{-1} \right] \right\}, \quad (П.2)$$

где постоянная Эйлера $\gamma = 0.577\dots$. Проинтегрируем обе части этого равенства по переменной Σ^2 (интегрирование суммы будем производить почленно) в пределах от 0 до Σ^2 и учтем, что $I(0) = \frac{\pi^2}{6L^2}$ [16]. В результате имеем

$$I(\Sigma) = \frac{\pi^2}{6L^2} - \frac{\pi\Sigma}{2L} + \frac{\Sigma^2}{8} - \frac{\Sigma^2}{8} \ln \frac{L^2\Sigma^2}{16\pi^2} - \frac{\gamma\Sigma^2}{4} + \frac{L^2\Sigma^4}{16\pi^2} \sum_{n=1}^\infty \left\{ n \left[n + \sqrt{n^2 + L^2\Sigma^2 / (4\pi^2)} \right]^2 \right\}^{-1}. \quad (П.3)$$

Представление функции $\bar{\mu}_{1c}(t)$ в виде ряда

Используя (53), можно выражение (52) для функции $\bar{\mu}_{1c}(t)$ представить в виде

$$\bar{\mu}_{1c}^3(t) = \frac{6}{t} [v_0(0) - v_0(x_0(t))] + \frac{6}{t} [j(x_0(t)) - j(0)], \quad (П.4)$$

где

$$j(x) = \frac{2t}{\pi} \int_0^\infty du \cdot u^2 \ln \left[1 - \exp\left(\frac{2\pi}{t} \sqrt{x^2 + u^2}\right) \right]. \quad (П.5)$$

Несложно показать, что

$$\frac{dj(x)}{dx} = x \cdot i(x). \quad (П.6)$$

Подставляя в правую часть этого равенства выражение (31) и учитывая (П.1), можно проинтегрировать полученную сумму в пределах от 0 до $x_0(t)$. В результате получится представление в виде ряда для разности $j(x_0(t)) - j(0)$. Следовательно, из (П.4) и (55) имеем

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{1c}^3(t) = & -3 \frac{x_0^2}{t} \left(a + \frac{1}{6} \right) + 12 \frac{a^2}{t} \ln \left(1 + \frac{x_0^2}{4a} \right) - \frac{3x_0^4}{4t} \ln \left(1 + \frac{4a}{x_0^2} \right) + \\ & + 3t^3 \left\{ \frac{1}{6} \frac{x_0^2}{t^2} - \frac{2}{3} \frac{x_0^3}{t^3} + \frac{1}{8} \frac{x_0^4}{t^4} (3 - 4\gamma) - \frac{1}{4} \frac{x_0^4}{t^4} \ln \frac{x_0^2}{4t^2} + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^\infty \frac{8 \frac{x_0^6}{t^6} n^2 + 9 \frac{x_0^8}{t^8}}{6n \left[12n^2 \frac{x_0^2}{t^2} + 3 \frac{x_0^4}{t^4} + 8n^4 + 8n \left(n^2 + \frac{x_0^2}{t^2} \right) \sqrt{n^2 + \frac{x_0^2}{t^2}} \right]} \right\}, \quad (П.7) \end{aligned}$$

удобное для нахождения различных асимптотик и численных оценок функции $\bar{\mu}_{1c}(t)$. Здесь $x_0 \equiv x_0(t)$.

Свойства функции $\bar{\mu}_{3c}(t)$ вне области $\bar{\Omega}_0$

Для потенциала $v_{\bar{\mu}t}(x)$ (66) имеем уравнение стационарности в виде

$$\frac{\partial v_{\bar{\mu}t}(x)}{\partial x} \equiv x \cdot \tilde{\varphi}(x) = 0, \quad (П.8)$$

где

$$\tilde{\varphi}(x) \equiv f(x) - i(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \Theta \left(\bar{\mu} - \sqrt{x^2 + t^2 n^2} \right) t \left(\bar{\mu} - \sqrt{x^2 + t^2 n^2} \right). \quad (П.9)$$

Функцию $\bar{\mu}_{3c}(t)$ определим как решение уравнения

$$\tilde{\varphi}(0) = -\frac{1+t^2}{6} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \Theta(\bar{\mu} - tn) t (\bar{\mu} - tn) = 0. \quad (П.10)$$

Если $\bar{\mu} \in \bar{\Omega}_k$ ($kt \leq \bar{\mu} < (k+1)t$) (26), то в сумме (П.10) отличны от нуля только $k+1$ первых членов, после суммирования которых нетрудно получить следующее выражение:

$$\bar{\mu}_{3c}(t) \Big|_{\bar{\Omega}_k} \equiv \bar{\mu}_{(k)}(t) = \frac{[6k(k+1)+1]t^2+1}{6(2k+1)t}, \quad (П.11)$$

которое задает функцию $\bar{\mu}_{3c}(t)$ внутри области $\bar{\Omega}_k$ плоскости $(\bar{\mu}, t)$. Таким образом, для всех точек $(\bar{\mu}, t) \notin \bar{\Omega}_0$ имеем

$$\bar{\mu}_{3c}(t) = \bar{\mu}_{(k)}(t) \quad \text{при} \quad t_k < t \leq t_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (П.12)$$

где t_k — значение параметра t , при котором график функции $\bar{\mu}_{(k)}(t)$ пересекается с левой границей области $\bar{\Omega}_k$, т.е. с прямой $\bar{\mu} = (k+1)t$:

$$t_k = \frac{1}{\sqrt{6(k+1)^2 - 1}}. \quad (П.13)$$

Также отметим, что $\bar{\mu}_{(k)}(t_k) = \bar{\mu}_{(k+1)}(t_k)$, следовательно, функция $\bar{\mu}_{3c}(t)$ (П.12) является непрерывной на всем интервале $t > 0$. Легко показать, что

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mu}_{(k)}(t)}{dt} \Big|_{t \rightarrow t_{k+}} &= \frac{2 - 6(k+1)}{6(2k+1)} < 0, \\ \frac{d\bar{\mu}_{(k+1)}(t)}{dt} \Big|_{t \rightarrow t_{k-}} &= \frac{2 + 6(k+1)}{6(2k+3)} > 0. \end{aligned}$$

Это означает, что в точках t_k , ($k = 0, 1, 2, \dots$) функция $\bar{\mu}_{3c}(t)$ не дифференцируема, а график ее имеет изломы. Для того чтобы выяснить свойства этой функции в точке $t = 0$, давайте используем в (П.10) формулу суммирования Пуассона [18]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \Phi(n) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \int_0^{\infty} \Phi(x) \cos(2\pi kx) dx. \quad (П.14)$$

В нашем случае $\Phi(n) = \Theta(\bar{\mu} - tn)(\bar{\mu} - tn)$, поэтому интегрирование в (П.14) легко осуществить, и уравнение (П.10) примет вид

$$\tilde{\varphi}(0) = -\frac{1+t^2}{6} + \bar{\mu}^2 + 8t^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi n \mu/t)}{(2\pi n)^2} \equiv 0. \quad (П.15)$$

Отсюда ясно, что функция $\bar{\mu}_{3c}(t)$, неявно заданная соотношением (П.15) (а также (П.10)), при $t \rightarrow 0$ стремится к числу $1/\sqrt{6}$.

Для того, чтобы решить вопрос о существовании производной функции $\bar{\mu}_{3c}(t)$ при $t \rightarrow 0$, продифференцируем соотношение (П.15) по t , считая, что величина $\bar{\mu}$ в нем зависит от t :

$$-\frac{t}{3} + 2\bar{\mu}\bar{\mu}' + 16t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi n \mu/t)}{(2\pi n)^2} - 2[t\bar{\mu}' - \bar{\mu}]B_1(\bar{\mu}/t) \equiv 0. \quad (П.16)$$

Здесь $B_1(x)$ — полином Бернулли — периодическая с периодом единица функция, которая на отрезке $[0, 1]$ имеет вид $B_1(x) = x - 1/2$. Для нее в (П.16) мы использовали известную формулу [19]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{n} = -\pi B_1(x).$$

При $t \rightarrow 0$ выражение (П.16) примет вид

$$\bar{\mu}'(t) \sim -B_1(\bar{\mu}/t). \quad (П.17)$$

Отсюда следует, что у $\bar{\mu}_{3c}(t)$ не существует производной в нуле в силу того, что правая часть (П.17) не имеет предела при $t \rightarrow 0$.

М.А.Вдовиченко, А.С.Вшивцев, К.Г.Клименко
Влияние химического потенциала на фазовую структуру модели Намбу-Йона-Лазинио
в неодносвязном пространстве.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы \LaTeX .
Редактор Н.В.Ежела. Технический редактор Н.В.Орлова.

Подписано к печати 29. 09. 97 г. Формат $60 \times 84/8$. Офсетная печать.
Печ.л. 3,6. Уч.-изд.л. 2,8. Тираж 150. Заказ 1126. Индекс 3649.
ЛР №020498 17.04.97.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

