



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 97–81
ОТФ

Л.Д. Соловьев

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАРКОВАЯ МОДЕЛЬ МЕЗОНОВ

Протвино 1997

Аннотация

Соловьев Л.Д. Релятивистская кварковая модель мезонов: Препринт ИФВЭ 97–81. – Протвино, 1997. – 24 с., 8 табл., библиогр.: 29.

Для описания мезонов, состоящих из кварка и антикварка с произвольными массами, предложена релятивистская квантовая модель, в которой кварки описываются уравнениями Дирака, а вклад глюонного поля учитывается в приближении прямолинейной струны. Модель хорошо описывает спектр мезонов и позволяет определить массы s , c , и b -кварков и релятивистские волновые функции составных мезонов.

Abstract

Soloviev L.D. Relativistic Quark Model of Mesons: IHEP Preprint 97–81. – Protvino, 1997. – p. 24, tables 8, refs.: 29.

A relativistic quantum model of mesons formed by quarks and antiquarks with arbitrary masses is proposed. The quarks are described by the Dirac equations and the gluon field contribution is approximated by a straight-line string. The model describes the meson mass spectrum and allows to estimate the s , c , and b -quark masses and to obtain the relativistic wave functions of composite mesons.

Наши основные представления о мезонах вытекают из простой кварковой модели, в которой кварк и антикварк, имеющие конституэнтные массы, связаны некоторым потенциалом. Однако понятие конституэнтной массы является сложным с точки зрения квантовой хромодинамики, поскольку эта масса описывает часть вклада глюонного поля (другая его часть проявляется в виде потенциала). Даже в этом случае движение кварков должно быть релятивистским, поскольку энергии возбуждений мезонов сравнимы с энергией основного состояния, что затрудняет количественное описание мезонов с помощью понятия потенциала [1].

В этой работе предложена релятивистская кварковая модель мезонов, которая может быть более непосредственным следствием квантовой хромодинамики (отдельные ее результаты опубликованы в работах [2, 3]). В этой модели кварки описываются релятивистскими уравнениями для частиц со спином $1/2$, в которые входят токовые массы кварков. Понятие потенциала не вводится. Вместо него учитывается весь вклад глюонного поля как вклад релятивистской прямолинейной струны с взаимодействием Намбу–Гото.

Представление о том, что глюонное поле между кварком и антикварком, находящимися на достаточно большом расстоянии друг от друга, стягивается в тонкую трубку, описываемую струной Намбу–Гото, является весьма распространенным. Вычисления на решетке дают поддержку этому механизму конфайнмента [4]. Мы предполагаем далее, что для мезонов, имеющих при данном спине и четности низшие массы, существенной является только простейшая конфигурация этой струны — прямолинейная. Прямолинейная струна может быть проквантована в обычном пространстве без нарушения релятивистской инвариантности [5, 6]. Более сложные конфигурации струны, допускающие релятивистское квантование, могут описывать более массивные мезонные состояния, называемые дочерними [7].

Таким образом, в классический лагранжиан нашей модели входят лагранжиан прямолинейной струны Намбу–Гото и лагранжианы Березина–Маринова [8], описывающие массивные кварки со спином $1/2$, движущиеся со скоростями концов струны ортогонально струне. Если пренебречь спинами кварков, то эта модель внутренне непротиворечива [9]. При учете спинов вводятся спиновые связи (необходимые для релятивистского описания спинов), которые должны сохраняться.

Сохранение спиновых связей соответствует спиновой суперсимметрии уравнения Дирака [8, 10, 11]. Поэтому в лагранжиан модели входит еще один член, называемый лагранжианом взаимодействия, который обеспечивает сохранение спиновых связей и непротиворечивость модели в классическом приближении.

Квантование модели, как всегда, является отдельным постулатом и вводит дополнительные квантовые члены (обращающиеся в нуль в классическом приближении) с феноменологическими параметрами. Эти параметры, а также параметр универсального натяжения струны и массы кварков образуют набор свободных параметров модели. При этом спектр модели хорошо описывает мезоны, состоящие из легких или тяжелых кварков и лежащие на главных реджевских траекториях и ближайших к ним траекториях, отличающихся пространственной или зарядовой четностью. Это позволяет определить все параметры модели, в том числе массы кварков $m_s = (224 \pm 7)$ МэВ, $m_c = (1413 \pm 9)$ МэВ и $m_b = (4710 \pm 26)$ МэВ.

Легкие u - и d -кварки дают в формулы спектра пренебрежимо малый вклад, поэтому их массы не могут быть определены с помощью одной этой модели. Однако, зная m_s и используя формулы киральной SU_3 -симметрии в линейном приближении, получаем $m_u = (6, 2 \pm 0, 2)$ МэВ и $m_d = (11, 1 \pm 0, 4)$ МэВ.

Модель позволяет получить релятивистские волновые функции составных мезонов. Можно также вычислить вклад энергии кварков и энергии струны (глюонов) в массу каждого мезона. Для пиона, например, вклад легких, но ультрарелятивистских кварков (скорость 0,93 c) в его массу составляет 29%. Для ρ -мезона это 12%, для φ -мезона вклад кварков составляет 60%, для J/ψ — 95% и для Υ — 97 ÷ 98%.

Для мезонов, состоящих из тяжелых кварков и имеющих малые спины, струнный механизм конфайнмента действует недалеко от своего порога и дает относительно меньший вклад, чем в присутствии хотя бы одного легкого кварка. Поэтому детальная структура таких мезонов может заметно зависеть от небольших неструнных поправок, которые в этой работе мы учитываем самым простым образом. Задача данной работы — выяснить, дает ли универсальный струнный механизм существенный вклад и в этом случае, а также определить массы тяжелых кварков, которые в пределах указанных ошибок не зависят от небольших неструнных поправок.

Мезоны с нулевыми спинами (псевдоскаляры и скаляры) описываются моделью наравне с другими мезонами. Релятивистские кварки в них создают ненулевой средний орбитальный момент, который компенсируется собственными спинами кварков.

В разделе 5 спектр модели сравнивается с экспериментальными данными [12]. Указаны недостающие данные для дальнейшей проверки модели и сделан ряд предсказаний.

В заключении сделаны основные выводы, а также кратко обсуждаются дочерние траектории и возможные кандидаты мезонов, не состоящих из кварка и антикварка.

Идея описания адронов с помощью струны с кварками на концах использовалась многими авторами [13-27]. Однако непротиворечивое введение кварков в соответствии с [8], каноническое квантование, определение релятивистской волновой функции мезонов и сравнение с экспериментом для всех главных траекторий проделаны, по-видимому, впервые.

1. Релятивистский лагранжиан

Итак, классический лагранжиан модели равен

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{стр}} + \sum \mathcal{L}_i + \mathcal{L}_{\text{вз}}, \quad (1)$$

где $\mathcal{L}_{\text{стр}}$ — лагранжиан Намбу-Гото прямолинейной струны; $\mathcal{L}_i$ — классический лагранжиан релятивистской частицы со спином $1/2$ [8]; имеющей скорость i -го конца струны, ортогональную направлению струны; $\mathcal{L}_{\text{вз}}$ — зависящий от спинорных переменных член, обеспечивающий сохранение спинорных связей. Здесь и в дальнейшем $\sum$ обозначает суммирование по $i = 1, 2$.

Для записи $\mathcal{L}_{\text{стр}}$ введем обозначения переменных прямолинейной струны. Ее координаты в 4-мерном пространстве-времени даются выражением

$$x^\mu(\tau, \sigma) = r^\mu(\tau) + f(\tau, \sigma)q^\mu(\tau), \quad (2)$$

где τ и σ — релятивистски-инвариантные параметры эволюции и положения. Производная по τ обозначается точкой. Обозначим

$$n = q/(-q^2)^{1/2}, \quad b = (-\dot{n}^2)^{1/2}, \quad v^1 = \dot{n}/b, \quad (3)$$

$$\dot{r}_\perp^\mu = (g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu + v^{1\mu} v^{1\nu}) \dot{r}_\nu, \quad (4)$$

$$l = (\dot{r}_\perp^2)^{1/2}/b, \quad v^0 = \dot{r}_\perp/b. \quad (5)$$

Смысл этих переменных очевиден. Будем отсчитывать положение точек на струне от ее мгновенного центра вращения

$$y = (-q^2)^{1/2}f - z, \quad z = \dot{r}v^1/b. \quad (6)$$

В этих обозначениях (штрих обозначает производную по σ)

$$\mathcal{L}_{\text{стр}} = -a \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} ((\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2)^{1/2} d\sigma = -ab \int_{y_1}^{y_2} (l^2 - y^2)^{1/2} dy. \quad (7)$$

Классический релятивистский лагранжиан i -го кварка равен [8]

$$\mathcal{L}_i = -m_i(\dot{x}_{iq}^2)^{1/2} - i((\dot{x}_{iq}^2)^{-1/2} \dot{x}_{iq} \xi_i - \xi_i^5) b \lambda_i - \frac{i}{2} (\xi_i \dot{\xi}_i - \xi_i^5 \dot{\xi}_i^5), \quad (8)$$

где m_i — масса покоя кварка и ξ_i^M , $M = \mu; 5$ и λ_i — антикоммутирующие между собой (при фиксированном i) спинорные переменные. С другими переменными (в том числе со спинорными переменными другого кварка) они коммутируют. Скорость i -го кварка совпадает со скоростью соответствующего конца струны, ортогональной направлению струны:

$$\dot{x}_{iq} = b(lv^0 + y_i v^1). \quad (9)$$

Переменные λ_j являются вспомогательными множителями Лагранжа. Коэффициенты при них должны обращаться в нуль для физических состояний и определяют спиновые связи. Выберем λ_i так, чтобы

$$\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1 \xi_2^M = \lambda_2 \xi_1^M = 0. \quad (10)$$

Алгебра Грассманна с такими свойствами может быть без труда реализована с помощью матриц достаточно большой размерности.

Для записи последнего члена в лагранжиане введем в дополнение к трем ортонормированным векторам v^0, v^1 и $v^3 \equiv n$ (5), (3) четвертый

$$v_\mu^2 = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} v^{0\nu} v^{3\rho} v^{1\sigma} \quad (\epsilon_{0123} = 1) \quad (11)$$

и с их помощью определим инвариантные спиновые переменные

$$u_i^a = v^a \xi_i, \quad a = 0, 1, 2, 3, \quad u_i^5 = \xi_i^5. \quad (12)$$

Тогда член $\mathcal{L}_{\text{ВЗ}}$, обеспечивающий сохранение спиновых связей в (8), имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{ВЗ}} = -b(i \sum u_i^1 u_i^3 - K^{-1} u_1^1 u_1^2 u_2^1 u_2^2), \quad (13)$$

где

$$K = lG_l - G, \quad (14)$$

индекс l обозначает производную по l и

$$G(l) = a \int_{y_1}^{y_2} (l^2 - y^2)^{1/2} dy + \sum m_i (l^2 - y_i^2)^{1/2}. \quad (15)$$

Из экстремума лагранжиана по y_i следует, что

$$y_i = (-1)^i l_i + k_i \lambda_i + r_i u_1^1 u_1^2 u_2^1 u_2^2, \quad (16)$$

$$l_i = (l^2 + \nu_i^2/4)^{1/2} - \nu_i/2, \quad \nu_i = m_i/a, \quad (17)$$

где k_i и r_i — известные выражения. При подстановке экстремального значения y_i (16) в лагранжиан члены с k_i и r_i обращаются в нуль, и классический лагранжиан мезона имеет вид

$$\mathcal{L} = -bF(l, u, \lambda) - \frac{i}{2} \sum \xi_{iM} \dot{\xi}_i^M, \quad (18)$$

$$F = G(l) + i \sum F_{ia}(l) u_i^a \lambda_i + i \sum u_i^1 u_i^3 - K^{-1} u_1^1 u_1^2 u_2^1 u_2^2, \quad (19)$$

где

$$G(l) = a \int_{-l_1}^{l_2} (l^2 - y^2)^{1/2} dy + \sum m_i (l^2 - l_i^2)^{1/2}, \quad (20)$$

l_i даются (17) и

$$F_{i0} = l(\nu_i l_i)^{-1/2}, \quad F_{i1} = (-1)^i (l_i/\nu_i)^{1/2}, \quad F_{i2} = F_{i3} = 0, \quad F_{i5} = -1. \quad (21)$$

2. Связи и гамильтониан

Импульсы, канонически сопряженные координатам r и q , равны

$$p = -\partial\mathcal{L}/\partial\dot{r}, \quad \pi = -\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}. \quad (22)$$

Сохраняющийся благодаря трансляционной инвариантности импульс p является полным импульсом мезона,

$$m = \sqrt{p^2} \quad (23)$$

есть его масса. Сохраняется также полный угловой момент

$$M^{\mu\nu} = r^{[\mu}p^{\nu]} + q^{[\mu}\pi^{\nu]} - i \sum \xi_i^\mu \xi_i^\nu \quad (24)$$

и полный собственный угловой момент (полный спин) мезона

$$J_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\nu M^{\rho\sigma} / 2m = L_\mu + S_\mu, \quad (25)$$

где

$$L_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\nu q^\rho \pi^\sigma / m \quad (26)$$

есть орбитальный спин и

$$S_\mu = \sum \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\nu \xi_i^\rho \xi_i^\sigma / 2im \quad (27)$$

есть собственно кварковый спин мезона.

Лагранжиан (18) описывает протяженную релятивистскую систему. Для релятивистского описания, как обычно, введены лишние, с физической точки зрения, переменные, которые исключаются благодаря репараметризационной симметрии лагранжиана. Лагранжиан (18) инвариантен относительно преобразований, зависящих от трех функций τ . Поэтому координаты и импульсы (22) подчиняются трем уравнениям (связям) (помимо спиновых), которые записываются в виде равенства нулю трех функций (также называемых связями) [11]

$$\varphi_1 = pq, \quad \varphi_2 = \pi q, \quad (28)$$

$$\varphi_3 = \sqrt{q^2 \pi_1^2} - l F_l(l, u, \lambda) + F(l, u, \lambda), \quad (29)$$

где l есть функция p, u и λ , определяемая равенством

$$F_l(l, u, \lambda) = \sqrt{p_1^2}. \quad (30)$$

Здесь

$$p_1 = p + l^{-1} \sum (F_{(0i)} u_i^2 + F_{(2i)} u_i^0) v^2, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \pi_1^\mu = (g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / p p_1) \{ \pi_\nu - (-q^2)^{-1/2} \sum [(F_{(0i)} u_i^1 + F_{(1i)} u_i^0) v_\nu^0 + \\ + (-F_{(1i)} u_i^2 + F_{(2i)} u_i^1) v_\nu^2] \}. \end{aligned} \quad (32)$$

Индекс (ai) обозначает производную по u_i^a . В эти выражения входят скорости v , которые нужно выразить через импульсы и координаты с помощью равенств

$$v^0 = p_1/\sqrt{p_1^2}, \quad v^1 = \pi_1/\sqrt{-\pi_1^2} \quad (33)$$

и определения v^2 (11). Прделав эти вычисления, получаем

$$\varphi_3 = \sqrt{-J^2 - K(l(m))} + i \sum F_{ia}(l(m)) c_i^a \lambda_i, \quad (34)$$

где J — спин мезона, $l(m)$ — функция m

$$G_l(l) = m, \quad (35)$$

$$c_i^a = n^a \xi_i, \quad a = 0, 1, \quad c_i^5 = \xi_i^5, \quad (36)$$

$$n^0 = p/m, \quad n^1 = \pi_\perp/\sqrt{-\pi_\perp^2}, \quad (37)$$

$$\pi_{\perp\mu} = (g_{\mu\nu} - n_\mu^0 n_\nu^0 + n_\mu^3 n_\nu^3) \pi^\nu, \quad n_\mu^3 = (g_{\mu\nu} - n_\mu^0 n_\nu^0) n^\nu. \quad (38)$$

Канонический гамильтониан, соответствующий нашему релятивистскому лагранжиану, равен нулю, поэтому гамильтониан системы есть линейная комбинация ее связей [28]:

$$H = \sum_{i=1}^3 d_i \varphi_i, \quad (39)$$

где d_i — произвольны ($d_3 = b$). Динамика системы определяется уравнением движения

$$\dot{Z} = \partial Z / \partial \tau + \{Z, H\}, \quad (40)$$

где Z — любая из динамических переменных, и скобками Пуассона канонических переменных

$$\{p^\mu, r^\nu\} = \{\pi^\mu, q^\nu\} = g^{\mu\nu}, \quad \{\xi_i^M, \xi_i^N\} = i g^{MN} \quad (41)$$

(остальные скобки равны нулю, g^{MN} — диагональна, $g^{55} = -1$) и связями

$$\varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (42)$$

которые полагаются равными нулю после того, как вычислены скобки в (40). Начальные данные удовлетворяют связям.

Связи φ_i сохраняются, что следует из симметрии лагранжиана. Однако из (39), (34) и произвольности λ_i (с учетом (10)) вытекают дополнительные спиновые связи

$$\varphi_{3+i} = F_{ia} c_i^a = 0, \quad i = 1, 2. \quad (43)$$

Для их сохранения должны обращаться в нуль их скобки Пуассона с гамильтонианом (39). Это действительно имеет место. Их скобки с $\varphi_{1,2}$ равны нулю из симметрии лагранжиана, скобки с $\sqrt{-J^2 - K(l(m))}$ равны нулю, поскольку равны

нулю скобки J с каждым релятивистским скаляром. Нетрудно проверить, что для $a, b = 0, 1, 3, 5$

$$\{c_i^a, c_i^b\} = ig_{ab}, \quad g_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (44)$$

поэтому

$$\{\varphi_{3+i}, d_3 i \varphi_{3+i} \lambda_i\} = -g^{ab} F_{ia} F_{ib} d_3 \lambda_i, \quad (45)$$

и необходимым условием сохранения являются равенства

$$g^{ab} F_{ia} F_{ib} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (46)$$

Коэффициенты F_{ia} (20) им удовлетворяют. Наконец,

$$\{\varphi_{3+i}, d_3 i \varphi_{3+j} \lambda_j\} = 0, \quad i \neq j \quad (47)$$

в силу (41) (и (10), если бы в (43) входили члены с $a = 3$).

Таким образом, гамильтониан (39) и связи (42), (43) можно переписать в виде

$$H = \sum_{i=1}^5 h_i \phi_i, \quad (48)$$

$$\phi_i = F_{ia} c_i^a, \quad i = 1, 2, \quad (49)$$

$$\phi_3 = \sqrt{-J^2} - K(l(m)), \quad G_l(l) = m, \quad (50)$$

$$\phi_4 = pq, \quad \phi_5 = \pi q. \quad (51)$$

В заключение этого раздела заметим, что

$$m_i F_{i0} = m_i l (\nu_i l_i)^{-1/2} \quad (52)$$

есть энергия i -го кварка в системе покоя мезона и

$$v_i = l_i / l \quad (53)$$

есть величина его скорости (в единицах c). Масса мезона в (50) может быть представлена как сумма вкладов струны и кварков

$$m = E_0 + \sum E_i, \quad (54)$$

$$E_0 = al \int_{-l_1}^{l_2} (l^2 - y^2)^{-1/2} dy, \quad E_i = m_i l (\nu_i l_i)^{-1/2}. \quad (55)$$

В этих формулах $l = l(m)$ из (50).

3. Переход к независимым переменным

Удобно уменьшить произвол в гамильтониане (48), введя калибровочные условия

$$p\pi = 0, \quad \pi^2 = -1 \quad (56)$$

и независимые переменные $k^{(a)}, L^{(a)}, \xi_i^{(M)}, p, z$. Из сохранения калибровочных условий $h_{4,5} = 0$. Первоначальные переменные π, q, ξ_i^M, p, r , при выполнении условий (51), (56), выражаются через них с помощью тетрады векторов $e_\alpha(p), \alpha = 0, a, a = 1, 2, 3$:

$$e_0 = p/m, \quad e_\alpha e_\beta = g_{\alpha\beta}. \quad (57)$$

Прежде всего разложим по тетраде четырехмерные спины (25)-(27):

$$A = A^{(a)}e_a, \quad A = L, J, S \quad (58)$$

и будем рассматривать три компоненты орбитального спина $L^{(a)}$ как независимые переменные. Тогда формулы связи первоначальных и новых переменных имеют вид

$$\pi = k^{(a)}e_a, \quad q = \epsilon_{abc}k^{(a)}L^{(b)}e_c, \quad (59)$$

$$\xi_i^\mu = \xi_i^{(\alpha)}e_\alpha^\mu, \quad \xi_i^5 = \xi_i^{(5)}, \quad (60)$$

$$z^\mu = r^\mu + \frac{1}{2}\epsilon_{abc}e_a^\nu \frac{\partial e_{b\nu}}{\partial p_\mu} J^{(c)} + \frac{i}{p^2} \sum (p\xi_i)\xi_i^\mu, \quad (61)$$

$$J^{(a)} = L^{(a)} + \sum S_i^{(a)}, \quad S_i^{(a)} = \epsilon_{abc}\xi_i^{(b)}\xi_i^{(c)}/2i. \quad (62)$$

Для нахождения скобок Пуассона независимых переменных проще всего воспользоваться методом симплектической формы и ее редукции при наложении условий (51), (56) [6, 29]. В результате получаем

$$\{p^\mu, z^\nu\} = g^{\mu\nu}, \quad (63)$$

$$\{L^{(a)}, L^{(b)}\} = \epsilon_{abc}L^{(c)}, \quad \{L^{(a)}, k^{(b)}\} = \epsilon_{abc}k^{(c)}, \quad (64)$$

$$\{\xi_i^{(M)}, \xi_i^{(N)}\} = ig^{MN} \quad (65)$$

(остальные скобки равны нулю). Справедливы также равенства

$$\{J^{(a)}, Z^{(b)}\} = \epsilon_{abc}Z^{(c)}, \quad \{L^{(a)}, S_i^{(b)}\} = 0, \quad (66)$$

где $Z = J, L, S_i, k, q$ или ξ_i . Для величин с индексом (a) будем использовать обозначения трехмерных векторов

$$(Z^{(a)}) = \vec{Z}. \quad (67)$$

Введенные переменные не являются полностью независимыми:

$$\vec{k}^2 = 1, \quad \vec{k}\vec{L} = 0. \quad (68)$$

Однако эта зависимость обычным образом учитывается введением переменных сферической системы координат. Оставшиеся связи в новых переменных записываются в виде

$$\phi_i = F_{i0}\xi_i^{(0)} - F_{i1}\vec{k}\vec{\xi} - \xi_i^{(5)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (69)$$

$$\phi_3 = \sqrt{\vec{J}^2} - K(l(m)), \quad G_l(l) = m. \quad (70)$$

Коэффициенты $F_{ia}(l(m))$ определены в (20), (17).

4. Квантование и волновые функции

Каноническое квантование проводится заменой независимых переменных на операторы, их скобок Пуассона на коммутаторы (антикоммутаторы для нечетных переменных) и наложением операторных связей на волновые функции:

$$[p^\mu, z^\nu]_- = ig^{\mu\nu}, \quad (71)$$

$$[L^{(a)}, L^{(b)}]_- = i\epsilon_{abc}L^{(c)}, \quad [L^{(a)}, k^{(b)}]_- = i\epsilon_{abc}k^{(c)}, \quad (72)$$

$$[\xi_i^{(M)}, \xi^{(N)}]_+ = -g^{MN} \quad (73)$$

(остальные коммутаторы равны нулю),

$$\phi_i\Psi = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (74)$$

Соотношения (62), (68) выполняются и для операторов. При этом

$$[J^{(a)}, Z^{(b)}]_- = i\epsilon_{abc}Z^{(c)}, \quad Z = J, L, S_i, k, \xi_i. \quad (75)$$

Квантовая теория является релятивистски-инвариантной, поскольку операторы импульса и углового момента (24), (58), (62) удовлетворяют алгебре Пуанкаре. Теория не зависит от выбора тетрады (57), поскольку она инвариантна относительно поворотов в пространстве индексов (a), генераторами которых являются $J^{(a)}$.

Два первых уравнения (74) с операторами (69) являются уравнениями Дирака для кварков, и мы не будем рассматривать для них каких-либо дополнительных квантовых поправок. Для третьего же уравнения такие поправки следует рассмотреть. В самом деле, классический лагранжиан естественно было считать четным элементом алгебры Грассманна каждого спина. Этим же свойством обладает и связь (70). Теперь это ограничение отпадает. Кроме того, могут входить операторы, которые в классическом приближении при выполнении связей (69) обращались в нуль.

Для квантовой системы с двумя спинами 1/2, орбитальным спином и фиксированным полным спином и импульсом имеются 4 ротационно-инвариантных набора состояний (два для нулевого полного спина), следовательно, существуют четыре проектора на эти состояния. Поскольку сумма проекторов равна единичному

оператору, то должны существовать, помимо единичного, три оператора, коммутирующих с операторами Дирака. Такими операторами являются:

$$O^0 = 1, \quad O^n = o_1^n o_2^n, \quad n = 1, 2, 3, \quad (76)$$

$$o_i^1 = -2\sqrt{2}\xi_i^{(0)}\xi_i^{(5)}(\vec{\xi}_i\vec{k}), \quad (77)$$

$$o_i^2 = \sqrt{2}(\vec{J}^2)^{-1/2}\xi^{(a)}(\delta_{ab} - k^{(a)}k^{(b)})J^{(b)}, \quad (78)$$

$$o_i^3 = \sqrt{2}(\vec{J}^2)^{-1/2}\vec{\xi}_i(\vec{k} \times \vec{J}). \quad (79)$$

При нулевом полном спине $o_i^2 = o_i^3 = O^2 = O^3 = 0$. Поскольку оператор $\xi_i^{(5)}$, удовлетворяющий (73), можно выбрать в виде

$$\xi_i^{(5)} = -2i\sqrt{2}\xi^{(0)}\xi^{(1)}\xi^{(2)}\xi^{(3)}, \quad (80)$$

то операторы o_i^n удовлетворяют алгебре матриц Паули (при ненулевом полном спине)

$$o_i^n o_i^m = \delta_{nm} + i\epsilon_{nmt} o_i^t. \quad (81)$$

Поэтому операторы O^n коммутируют между собой, имеют единичные квадраты и удовлетворяют алгебре

$$O^n O^m = \delta_{nm} - (\epsilon_{nmt})^2 O^t. \quad (82)$$

В качестве ϕ_3 будем рассматривать оператор

$$\phi_3 = \sqrt{\vec{J}^2} - K(l(m)) - \sum_n b_n O^n, \quad (83)$$

$n = 0, 1, 2, 3$, где b_n — параметры, за исключением случая смешивания в следующем разделе.

Выберем представление, в котором p^μ и $k^{(a)}$ диагональны. Операторы ξ , удовлетворяющие (73), реализуются γ -матрицами Дирака [8]. При этом для античастиц их надо использовать в зарядово-сопряженном представлении. Пусть антикварком является вторая частица. Тогда

$$\xi_1^{(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^5\gamma^\mu \otimes I, \quad \xi_1^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^5 \otimes I, \quad (84)$$

$$\xi_2^{(\mu)} = \xi_1^{(\mu)c} = I \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^{5c}\gamma^{\mu c}, \quad \xi_2^{(5)} = \xi_1^{(5)c} = I \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^{5c}, \quad (85)$$

где индекс c обозначает зарядовое сопряжение, которое для матрицы

$$O = O_1 \otimes O_2 \quad (86)$$

определяется формулами

$$O^c = O_2^c \otimes O_1^c, \quad O_i^c = C O_i C^{-1}, \quad (87)$$

где C — матрица зарядового сопряжения:

$$C\gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu T}, \quad C\gamma^5 C^{-1} = \gamma^{5T}, \quad C^T = C^\dagger = C^{-1} = -C. \quad (88)$$

В дальнейшем будем использовать представление

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ C &= i\gamma^0\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (89)$$

Волновая функция $\Psi_{\alpha\beta}$ является биспинором. Будем использовать для нее матричную запись, когда транспонированная матрица второй частицы действует на нее справа. Тогда первые два уравнения (74) имеют вид

$$(F_{10}\gamma^0 - F_{11}\vec{\gamma}\vec{k} - 1)\Psi = 0, \quad (90)$$

$$\Psi(F_{20}\gamma^0 - F_{21}\vec{\gamma}\vec{k} + 1) = 0. \quad (91)$$

Матрицу Ψ можно записать через спиноры

$$\Psi = u(1)\bar{v}(2), \quad \bar{v} = u^T C. \quad (92)$$

Нормированное условием

$$\int Sp\Psi^\dagger\Psi d\vec{k} = 1 \quad (93)$$

решение уравнений (90,91) имеет вид

$$\Psi = N \begin{pmatrix} -b_2\varphi\vec{\sigma}\vec{k} & \varphi \\ b_1b_2\vec{\sigma}\vec{k}\varphi\vec{\sigma}\vec{k} & -b_1\vec{\sigma}\vec{k}\varphi \end{pmatrix}, \quad (94)$$

где φ — двумерная матрица,

$$\varphi = \varphi(1)\chi^T(2), \quad \chi = -i\sigma_2\varphi, \quad (95)$$

$$b_i = l_i/(l + \sqrt{\nu_i l_i}), \quad N = ((1 + b_1^2)(1 + b_2^2))^{-1/2}. \quad (96)$$

Оператор полного спина мезона (62) имеет вид

$$\vec{L} = \vec{L} + \vec{S} = \vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma} \otimes I + I \otimes \frac{1}{2}\vec{\Sigma}^c, \quad (97)$$

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \vec{\Sigma}^c = \begin{pmatrix} \sigma_2\vec{\sigma}\sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2\vec{\sigma}\sigma_2 \end{pmatrix} = -\vec{\Sigma}^*. \quad (98)$$

Выберем в качестве φ собственные функции $\vec{j}^2, j^{(3)}, \vec{L}^2, \vec{s}^2$, где малыми буквами обозначены двумерные блоки (97), (98):

$$\varphi = \varphi_{jms}(\vec{k}), \quad (99)$$

$$\vec{j}^2\varphi = j(j+1)\varphi, \quad j^{(3)}\varphi = M\varphi, \quad (100)$$

$$\vec{L}^2\varphi = l(l+1)\varphi, \quad \vec{s}^{(2)}\varphi = S(S+1)\varphi, \quad (101)$$

где j, l — целые неотрицательные, $S = 0, 1$ и $l = j \pm S, j$. (При получении этих формул можно сначала положить $\varphi = \varphi' i \sigma_2$. Тогда оператор спина для φ' имеет обычный вид, и φ'_{jMLS} находится с помощью обычных коэффициентов Клебша-Гордона. После этого $\varphi_{jMLS} = \varphi'_{jMLS} i \sigma_2$). Таким образом, для каждого j имеем 4 независимые функции Ψ_{jMLS} . Рассмотрим также линейные комбинации этих функций, соответствующие

$$\varphi_0 = \varphi_{jMj0}, \quad \varphi_1 = \varphi_{jMj1}, \quad (102)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \left(\sqrt{j+1} \varphi_{jM,j-1,1} + \sqrt{j} \varphi_{jM,j+1,1} \right), \quad (103)$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \left(\sqrt{j} \varphi_{jM,j-1,1} - \sqrt{j+1} \varphi_{jM,j+1,1} \right). \quad (104)$$

Используя свойства сферических функций, можно показать, что

$$\vec{\sigma} \vec{k} \varphi_0 = \varphi_0 \vec{\sigma} \vec{k} = \varphi_3, \quad \vec{\sigma} \vec{k} \varphi_3 = \varphi_3 \vec{\sigma} \vec{k} = \varphi_0, \quad (105)$$

$$\vec{\sigma} \vec{k} \varphi_1 = -\varphi_1 \vec{\sigma} \vec{k} = -\varphi_2, \quad \vec{\sigma} \vec{k} \varphi_2 = -\varphi_2 \vec{\sigma} \vec{k} = -\varphi_1. \quad (106)$$

Подставляя эти функции в (94), получаем четыре независимые волновые функции Ψ_n , являющиеся собственными функциями полного спина и его проекции

$$\vec{J}^2 \Psi_n = j(j+1) \Psi_n, \quad J^{(3)} \Psi_n = M \Psi_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \quad (107)$$

$$\Psi_0 = N \begin{pmatrix} -b_2 \varphi_3 & \varphi_0 \\ b_1 b_2 \varphi_0 & -b_1 \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad \Psi_1 = N \begin{pmatrix} -b_2 \varphi_2 & \varphi_1 \\ -b_1 b_2 \varphi_1 & b_1 \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (108)$$

$$\Psi_2 = N \begin{pmatrix} -b_2 \varphi_1 & \varphi_2 \\ -b_1 b_2 \varphi_2 & b_1 \varphi_1 \end{pmatrix}, \quad \Psi_3 = N \begin{pmatrix} -b_2 \varphi_0 & \varphi_3 \\ b_1 b_2 \varphi_3 & -b_1 \varphi_0 \end{pmatrix}. \quad (109)$$

Пространственная четность этих функций

$$P \Psi(\vec{k}) = \gamma^0 \Psi(-\vec{k}) \gamma^0 \quad (110)$$

равна

$$P \Psi_{jMLS} = -(-1)^l \Psi_{jMLS}, \quad P \Psi_{0,1} = -(-1)^j \Psi_{0,1}, \quad P \Psi_{2,3} = (-1)^j \Psi_{2,3}. \quad (111)$$

Зарядово-сопряженная волновая функция

$$\Psi^c(\vec{k}) = C \Psi^T(-\vec{k}) C^T \quad (112)$$

при $m_1 = m_2$ удовлетворяет уравнениям Дирака (90), (91). При этом

$$\Psi_{jMLS}^c = (-1)^{l+S} \Psi_{jMLS}, \quad \Psi_{0,2,3}^c = (-1)^j \Psi_{0,2,3}, \quad \Psi_1^c = -(-1)^j \Psi_1. \quad (113)$$

Оператор спектра мезонов ϕ_3 (83) P - и C -четен, поэтому мезоны характеризуются спин-четностью j^{PC} в соответствии с (111), (113). Мезоны, не имеющие определенной C - (или G)-четности, рассматриваются в следующем разделе.

Скорость легких кварков в мезонах (53) близка к 1. Такие мезоны нельзя описывать с помощью сохраняющихся орбитального и собственного спинового моментов. Так, пион 0^{-+} или $a_0(980)0^{++}$, состоящие из легких кварков, имеют волновые функции Ψ_0 и Ψ_3 (108),(109) с $b_i \approx 0$ и $j = 0$:

$$\Psi_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi_{0011} & \varphi_{0000} \\ \varphi_{0000} & \varphi_{0011} \end{pmatrix}, \quad \Psi_3 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi_{0000} & \varphi_{0011} \\ \varphi_{0011} & \varphi_{0000} \end{pmatrix}, \quad (114)$$

для которых средние значения квадратов орбитального и собственного спинов равны

$$\overline{L^2} = 1, \quad \overline{S^2} = 1 \quad (115)$$

(вместо нулей нерелятивистской кварковой модели). При этом

$$\overline{L\vec{S}} = -1. \quad (116)$$

Для состояний 1^{--}

$$\Psi_2 : \overline{L^2} = 2, \quad \overline{S^2} = 2, \quad \overline{L\vec{S}} = -1, \quad (117)$$

$$\Psi_3 : \overline{L^2} = 3, \quad \overline{S^2} = 1, \quad \overline{L\vec{S}} = -1, \quad (118)$$

в то время как для ρ -мезона в нерелятивистской модели $\vec{L}^2 = 0$, $\vec{S}^2 = 2$, $\vec{L}\vec{S} = 0$.

Таким образом, структура мезонов в данной модели существенно отличается от того, что вытекает из нерелятивистской модели. Если в нерелятивистской модели пиона кварки в среднем покоятся относительно друг друга, а их спины направлены в противоположные стороны, то здесь релятивистские кварки вращаются относительно некоторого центра, создавая в среднем единичный орбитальный момент. Их спины в среднем направлены в одну сторону, противоположную направлению среднего орбитального момента. У ρ -мезона нерелятивистской модели кварки также покоятся, а их спины направлены в одну сторону. В данной модели кварки в состоянии Ψ_2 создают средний орбитальный момент $\sqrt{2}$, а спины кварков направлены в среднем в одну сторону под углом 120° к среднему орбитальному моменту и т.д.

Для тяжелых кварков, когда сумма их масс близка к массе мезона, $b_i \approx 0$,

$$\Psi_{jMLS} \approx \begin{pmatrix} 0 & \varphi_{jMLS} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (119)$$

и мы получаем волновые функции нерелятивистской теории.

5. Спектр масс и сравнение с экспериментом

Массовый спектр состояний определяется третьим уравнением (74). В операторе ϕ_3 (83) в используемом представлении

$$O^n = o^n \otimes o^{nc}, \quad (120)$$

$$o^1 = \vec{\Sigma} \vec{k}, \quad o^2 = (\vec{J}^2)^{-1/2} \gamma^0 \vec{\Sigma}_k \vec{J}, \quad o^3 = (\vec{J}^2)^{-1/2} \gamma^0 \vec{\Sigma}(\vec{k} \times \vec{J}). \quad (121)$$

Действие этих операторов на волновые функции (108), (109) следует из свойств сферических функций

$$\begin{aligned} o^1 \Psi_0 &= -\Psi_0 o^{1cT} = \Psi_3, & o^1 \Psi_1 &= \Psi_1 o^{1cT} = -\Psi_2, \\ o^2 \Psi_0 &= -\Psi_0 o^{2cT} = \Psi_1, & o^2 \Psi_2 &= \Psi_2 o^{2cT} = \Psi_3, \\ o^3 \Psi_0 &= -\Psi_0 o^{3cT} = i\Psi_2, & o^3 \Psi_1 &= \Psi_1 o^{3cT} = -i\Psi_3, \end{aligned} \quad (122)$$

(остальные соотношения получаются из (81)). Отсюда

$$\begin{aligned} O^1 \Psi_{0,3} &= -\Psi_{0,3}, & O^1 \Psi_{1,2} &= \Psi_{1,2}, \\ O^2 \Psi_{0,1} &= -\Psi_{0,1}, & O^2 \Psi_{2,3} &= \Psi_{2,3}, \\ O^3 \Psi_{0,2} &= -\Psi_{0,2}, & O^3 \Psi_{1,3} &= \Psi_{1,3}. \end{aligned} \quad (123)$$

Спектральное уравнение (74) запишем в виде

$$(\sqrt{\vec{J}^2} - K - \sum_n a_n P_n) \Psi = 0, \quad (124)$$

где P_n — проектор на состояние Ψ_n :

$$P_n \Psi_m = \delta_{mn} \Psi_n, \quad (125)$$

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{4}(1 - O^1 - O^2 - O^3), & P_1 &= \frac{1}{4}(1 + O^1 - O^2 + O^3), \\ P_2 &= \frac{1}{4}(1 + O^1 + O^2 - O^3), & P_3 &= \frac{1}{4}(1 - O^1 + O^2 + O^3). \end{aligned} \quad (126)$$

Заметим, что состояния $\Psi_{2,3}$ при $j \neq 0$ не различаются пространственной и зарядовой четностью (при $j = 0$ $\Psi_2 = 0$). Их выбор определяется выбором проекторов P_n .

С помощью операторов (121) можно построить другой набор проекторов, которые выделяют вместо $\Psi_{2,3}$ волновые функции $\Psi_{\mp} \equiv \Psi_{jM,j\mp 1,1}$, связанные с ними формулами (103), (104). Поскольку

$$o_{12}^2 = o_1^2 + o_2^2 = o^2 \otimes I + I \otimes o^{2c}, \quad (127)$$

$$o_{12}^2 \Psi_{0,1} = 0, \quad o_{12}^2 \Psi_{2,3} = 2\Psi_{3,2}, \quad (128)$$

то для этого достаточно заменить в (124) $a_2P_2 + a_3P_3$ на $a_-P_- + a_+P_+$, где

$$P_{\mp} = \frac{\pm 1}{4(2j+1)}(2\sqrt{\vec{J}^2}o_{12}^2 + O^1 - O^3 \pm (2j+1)(1+O^2)). \quad (129)$$

В общем случае можно добавить в уравнении (124) член bo_{12}^2 с параметром b , смешивающий состояния Ψ_2 и Ψ_3 . Однако появление такого линейного по каждому из кварков члена в волновом уравнении не представляется естественным, и мы не будем этого делать.

Другое дело, смешивание странных, очарованных и прелестных мезонов, не имеющих зарядовой четности, в состояниях Ψ_0 и Ψ_1 , при $j \neq 0$ отличающихся только зарядовой четностью. Смешивание этих состояний осуществляет оператор

$$\Delta = \frac{1}{2}(o_1^1 o_2^3 - o_1^3 o_2^1) = \frac{1}{2}(o^1 \otimes o^{3c} - o^3 \otimes o^{1c}), \quad (130)$$

квадратичный по кваркам, эрмитов и пространственно-четный. Из (122)

$$\Delta\Psi_0 = i\Psi_1, \quad \Delta i\Psi_1 = \Psi_0, \quad \Delta\Psi_{2,3} = 0. \quad (131)$$

Поэтому спектральное уравнение имеет вид

$$(\sqrt{\vec{J}^2} - K - \sum_n a_n P_n - b\Delta)\Psi = 0, \quad (132)$$

где $b = 0$ для $q_1\bar{q}_2-$, $s\bar{s}-$, $c\bar{c}-$ и $b\bar{b}-$ мезонов (здесь и в дальнейшем $q_1, q_2 = u$ или d). Это уравнение диагонализуется подстановкой

$$\Phi_0 = \cos\alpha\Psi_0 + \sin\alpha\ i\Psi_1, \quad (133)$$

$$\Phi_1 = -\sin\alpha\Psi_0 + \cos\alpha\ i\Psi_1. \quad (134)$$

Спектральные условия для этих состояний имеют вид

$$\Phi_0 : \sqrt{j(j+1)} - K - a_0 - d = 0, \quad (135)$$

$$\Phi_1 : \sqrt{j(j+1)} - K - a_1 + d = 0, \quad (136)$$

$$d = btg\alpha = \frac{1}{2}(a_0 - a_1 \pm \sqrt{(a_0 - a_1)^2 + 4b^2}), \quad (137)$$

где верхний знак выбирается при отрицательном $a_0 - a_1$ и нижний — при положительном.

Таким образом, для каждого состояния $\Psi_n(\Phi_n)$ мы получаем свою реджевскую траекторию (т.е. зависимость спина j от квадрата массы мезона m^2), которая определяется функцией K и феноменологическим параметром a_n

$$\sqrt{j(j+1)} = K + a_n, \quad (138)$$

где для случая смешивания a_0 заменяется на $a_0 - d$ и a_1 на $a_1 + d$,

$$K = \frac{1}{2a}(\mu m - \sum m_i^2 t_i), \quad (139)$$

$$m = \mu \sum (\arctg t_i + t_i^{-1}), \quad (140)$$

$$t_i = [(\mu^2/m_i^2 + 1/4)^{1/2} - 1/2]^{1/2}, \quad (141)$$

и мы обозначили $\mu = al$. Заданная параметрически функция $K(m, a, m_1, m_2)$ зависит от массы мезона m , универсального параметра натяжения струны a и масс кварков m_1 и m_2 , составляющих мезон.

Для малых масс кварков $m_i \ll m$

$$K = \frac{m^2}{2\pi a} \left(1 - \frac{4}{3\pi} \sum \left(\frac{\pi m_i}{m} \right)^{3/2} + O \left(\left(\frac{\pi m_i}{m} \right)^{5/2} \right) \right). \quad (142)$$

Для тяжелых кварков, когда $D = m - m_1 - m_2 \ll m_i$

$$K = \frac{1}{a} \left(\frac{2}{3} D \right)^{3.2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^{1/2} \left(1 + O \left(\frac{D}{m_i} \right) \right). \quad (143)$$

Таким образом, одна простая формула (138) описывает 4 реджевские траектории для каждой пары кварк-антикварк. Если пренебречь разностью масс u - и d -кварков (и не рассматривать t -кварк), то получаем 40 траекторий мезонов. Если ограничиться спинами не более 4, то это 180 различных мезонов. Кратко рассмотрим те из них, которые лучше известны экспериментально [12].

Векторные траектории. Начнем с мезонов, описываемых волновой функцией Ψ_2 . Для этих мезонов $P = C = (-1)^j$ (как обычно, C относится к нейтральным мезонам), спин-четность низших состояний 1^{--} . На этих траекториях лежит наибольшее число мезонов, надежно установленных экспериментально. Это позволяет определить основные параметры модели a, m_1 и m_2 и параметры a_2 .

Массы u - и d -кварков слишком малы, чтобы их можно было определить без учета электромагнитного взаимодействия (как видно из (142), даже для ρ -мезона они дают вклад в функцию K менее 0,5%). Поэтому для их оценки использовалась формула линейного приближения киральной $SU(3)$ -модели [1]

$$m_u/m_d = 0,554 \pm 0,002, \quad m_s/m_d = 20,13 \pm 0,03. \quad (144)$$

Сравнение формулы (138) с экспериментом [12] для этих траекторий было проделано В.В.Брызгаловым и В.В.Ежелой. Поскольку модель не учитывает электромагнитного взаимодействия, значения экспериментальных ошибок в массах мезонов m были увеличены на 1% m . Результаты этого сравнения и найденные параметры представлены в табл. 1. При этом $P\{\chi^2/15 > 1,26\} = 0,21$.

Константа a_2 для этой траектории оказалась не зависящей от масс кварков. Согласие модели с экспериментом в пределах 1%, за исключением масс J/ψ - и Υ -мезонов, где отклонение составляет 2,3 и 2% соответственно.

Это отклонение может быть уменьшено до 1% за счет введения различных констант a_2 для разных кварков. Соответствующие значения параметров также приведены в табл. 1 (вариант 2). В этом варианте масса b -кварка меньше, чем в предыдущем. В дальнейшем приводятся предсказания для обоих вариантов.

Таблица 1. Массы мезонов и параметры векторных траекторий (массы в МэВ). $m_{\text{Э}}$ — экспериментальная масса, Δ = экспериментальная ошибка $+1\%m_{\text{Э}}$, $m_{\text{Т}}$ — теоретическая масса.

Частица	$m_{\text{Э}}$	Δ	$m_{\text{Т}}$	$\epsilon = \frac{m_{\text{Э}} - m_{\text{Т}}}{\Delta}$
$\rho(770)$	768,5	8,3	773	-0,54
$a_2(1320)$	1318,1	13,9	1320	-0,14
$\rho_3(1690)$	1691	21,9	1692	-0,03
$a_4(2040)$	2037	46,4	1994	0,93
$\rho_5(2350)$	2330	58,3	2255	1,29
$a_6(2450)$	2450	154	2488	-0,25
$K^*(892)$	891,59	9,2	895	-0,43
$K_2^*(1430)$	1425,4	15,6	1419	0,42
$K_3^*(1780)$	1770	27,7	1781	-0,40
$K_4^*(2045)$	2045	29,4	2077	-1,08
$\varphi(1020)$	1019, 413	10,2	1016	0,34
$f_2'(1525)$	1525	20,2	1517	0,37
$\varphi_3(1850)$	1854	25,5	1870	-0,62
$D^*(2010)$	2006,7	20,6	1996	0,54
$D_2^*(2460)$	2458,9	26,5	2442	0,64
$J/\psi(1S)$	3096,88	31,0	3171	-2,39
$\chi_{c2}(1P)$	3556,17	35,7	3520	1,01
B^*	5324,8	55,3	5266	1,05
$\Upsilon(1S)$	9460,37	94,8	9650	-2,00
$\chi_{b2}(1P)$	9913,2	99,7	9892	0,21
$\Sigma\epsilon^2 = 18,9, \quad N - n = 15, \quad \chi^2/15 = 1,26$				
$a = 0,176 \pm 0,002 \text{ ГэВ}^2, \quad a_2 = 0,88 \pm 0,01$				
$m_s = 224 \pm 7, \quad m_c = 1413 \pm 9, \quad m_b = 4710 \pm 26$				
$m_u = 6,2 \pm 0,2, \quad m_d = 11,1 \pm 0,4$				
Вариант 2. $a_2(c\bar{c}) = 0,95, \quad a_2(q\bar{b}) = a_2(b\bar{b}) = 0,4$				
$m_b = 4550 \pm 100$				

Используя найденные параметры, можно вычислить массы других состояний на этих траекториях. Пример такого вычисления представлен в табл. 2. Модель предсказывает спины и четности $D_s^*(2112)$ и $D_{sJ}(2573)$.

Таблица 2. Некоторые предсказания для векторных траекторий.

Кварковый состав, j^P	Теоретическая масса, МэВ	Данные эксперимента j^P
$c\bar{s}, 1^-$	2108	$D_s^*(2112), ?^?$
$c\bar{s}, 2^+$	2536	$D_{sJ}(2573), ?^?$

Псевдоскалярные траектории. Волновая функция $\Psi_0, P = -C = -(-1)^j$, спин-четность низших состояний 0^{-+} .

На этих траекториях лежат псевдоскалярные мезоны, массы которых особенно чувствительны к феноменологическим параметрам a_0 , так как в (138) $j = 0$. Оценка этих параметров из масс π и $\eta_c(1S)$ и некоторые предсказания представлены в табл. 3. Константа a_0 очень мала для легких кварков (малость массы пиона) и растет для тяжелых.

Таблица 3. Предсказания и параметры для псевдоскалярных траекторий, $q_1, q_2 = u$ или d .

Кварковый состав	j^{PC}	Теоретическая масса, МэВ	Данные эксперимента
$q_1 \bar{q}_2$	1^{+-}	1257	$b_1(1235), 1^{+-}$
	2^{-+}	1651	$\pi_2(1670), 2^{-+}$
	3^{+-}	1960	?
	4^{-+}	2230	?
$c\bar{c}$	1^{+-}	3520	?
	2^{-+}	3790	?
$a_0(q_1 \bar{q}_2) = -(1, 5 \pm 0, 1)10^{-2}, a_0(c\bar{c}) = -0, 159$			

Три известных мезона π, b_1 и π_2 лежат на одной траектории, что подтверждает однотипность их кварковой структуры, описываемой волновой функцией Ψ_0 при $j = 0, 1$ и 2 соответственно.

Менее определена ситуация с η и $\eta'(958)$ -мезонами. В табл. 4 представлены массы их партнеров по реджевским траекториям для разных возможностей их кваркового состава. К этой таблице можно добавить следующее спекулятивное обсуждение. Существует механизм, связанный с малой массой u - и d -кварков, благодаря которому одно из их нейтральных связанных состояний получает значительную энергетическую добавку по сравнению с другим (пионом). Если так возникает $\eta'(958), q\bar{q}$, отличающийся от π^0 добавлением ~ 800 МэВ энергии, то η — $s\bar{s}$ -мезон, для которого в силу приближенной $SU(3)$ -симметрии тот же механизм мог бы привести к возникновению его партнера $\eta'(\sim 1350), s\bar{s}, 0^{-+}$ с массой порядка 1300 МэВ ($\eta(1295), 0^{-+}, ?$). Если же партнером π^0 по механизму утяжеления является $\eta, q\bar{q}$, то для этого потребовалось бы добавить ~ 400 МэВ энергии. При этом $\eta'(958)$ был бы $s\bar{s}$ -мезоном, и его утяжеленный партнер $\eta'(\sim 1360), s\bar{s}, 0^{-+}$ имел бы массу того же порядка, что и в предыдущем случае.

Таблица 4. Массы партнеров η и $\eta'(958)$ при различных предположениях об их кварковом составе.

0^{-+}	$\eta', q\bar{q}$	$\eta, s\bar{s}$	$\eta, q\bar{q}$	$\eta', s\bar{s}$	Данные эксперимента
1^{+-}	1575	1470	1360	1630	?
2^{-+}	1900	1840	1730	1970	?
3^{+-}	2180	2130	2030	2230	?
a_0	-0,83	-0,035	-0,27	-0,46	

Дочерние состояния, возникающие при учете высших мод струны, сдвинуты по квадрату массы на $4\pi a$ [7] (без учета кварков). При этом $\pi_1(1300)$ мог бы быть дочерним состоянием пиона, а $\eta(1440)$ — дочерним состоянием η .

Во всяком случае, было бы важно для выяснения природы η и $\eta'(958)$ получить экспериментальную информацию о нейтральных мезонах 1^{+-} в интервале масс 1300-1700 МэВ, 2^{-+} в интервале 1700-2000 МэВ и 3^{+-} в интервале 2000-2300 МэВ.

Псевдовекторные траектории. Волновая функция Ψ_1 , $P=C=-(-1)^j$, спин-четность низших состояний 1^{++} .

Экспериментальные данные об этих мезонах довольно скудны. Поэтому рассмотрим гипотезу

$$a_1 = a_0. \quad (145)$$

Соответствующие предсказания собраны в табл. 5. Там же приведена для дальнейшего использования константа $a_1(b\bar{b})$, полученная из массы $\chi_{b1}(1P)$, 1^{++} .

Таблица 5. Предсказания и параметры для псевдовекторных траекторий в предположении $a_1 = a_0$.

Кварковый состав	j^{PC}	Теоретическая масса, МэВ	Данные эксперимента
$q_1\bar{q}_2$	1^{++}	1260	$a_1(1260), f_1(1285), 1^{++}$
	2^{--}	1650	?
$s\bar{s}$	1^{++}	1470	$f_1(1420)$ или $f_1(1510), 1^{++}$
	2^{--}	1840	?
$c\bar{c}$	1^{++}	3520	$\chi_{c1}(1P), 3520, 1^{++}$
	2^{--}	3730	?
$a_1(s\bar{s}) = a_0(\eta, s\bar{s}), a_1(b\bar{b}) = -0, 14(-1, 93, \text{вариант } 2)$			

Для $a_0(s\bar{s})$ использована константа из табл. 4, соответствующая $\eta, s\bar{s}$. Константа, соответствующая $\eta', s\bar{s}$, приводит к массе 1^{++} -состояния 1630 МэВ, что хуже соответствует эксперименту.

Гипотеза (145) выполняется для $q_1\bar{q}_2$ -, $s\bar{s}$ - и $c\bar{c}$ -мезонов. Если она выполняется и для $b\bar{b}$, то, зная $a_1(b\bar{b})$, можем вычислить массу псевдоскалярного $b\bar{b}$ -мезона $\eta_b(1S)$, 0^{-+} :

$$m(\eta_b(1S), 0^{-+}) = (9515 \pm 55) \text{ МэВ} \quad ((9650 \pm 100) \text{ МэВ, вариант } 2). \quad (146)$$

Смешивание траекторий. Не имеющие зарядовой четности мезоны с ненатуральной спин-четностью $0^-, 1^+, 2^-, \dots$ лежат на смешанных траекториях Φ_0 и Φ_1 (133), (134).

Как и ранее, определим константы a_0 из масс псевдоскалярных мезонов K, D, D_s, B и B_s^0 . Константы a_1 и d определяются из масс мезонов с высшими спинами. Результаты собраны в табл. 6.

Таблица 6. Предсказания и параметры для странных, очарованных и прелестных мезонов с ненатуральной спин-четностью.

Кварк. состав	j^P	Теор.масса, МэВ		Данные эксп.	
		Траект. Φ_0	Траект. Φ_1	Траект. Φ_0	Траект. Φ_1
$s\bar{q}$	1^+	<u>1430</u>	<u>1310</u>	$\frac{K_1(1400)}{K_2(1820)}$	$\frac{K_1(1270)}{K_2(1770)}$
	2^-	1800	1700	$K_2(1820)$	$K_2(1770)$
	3^+	2080	2010	?	?
$c\bar{q}$	$(1) 1^+$	<u>2420</u>	2480	$\frac{D_1(2420)}{?}$	?
	$(2) 1^+$	2470	<u>2420</u>	?	$\frac{D_1(2420)}{?}$
	$(1) 2^-$	2740	2790	?	?
	$(2) 2^-$	2790	2750	?	?
$c\bar{s}$	1^+	2580	-	$D_{s1}(2536)$	-
$b\bar{q}$	1^+	5800	-	?	-
		5640 (вар.2)	-	?	-
$b\bar{s}$	1^+	5870	-	?	-
		5710 (вар.2)	-	?	-
$a_0(s\bar{q}) = -0, 10, \ a_1(s\bar{q}) = 0, \ d(s\bar{q}) = 0, 1$ $a_0(c\bar{q}) = -0, 33, \ a_1(c\bar{q}) = 0(\text{гипотеза}), \ (1)d(c\bar{q}) = 0, 25, \ (2)d(c\bar{q}) = 0, 09$ $a_0(c\bar{s}) = -0, 30, \ a_0(b\bar{q}) = -0, 56, \ a_0(b\bar{s}) = -0, 51$ $d(c\bar{s}) = d(b\bar{q}) = d(b\bar{s}) = 0(\text{гипотеза})$					

Экспериментальные данные здесь довольно скудны, модель же содержит дополнительный параметр смешивания. Для $s\bar{q}$ -мезонов подчеркнутые данные, по существу, использованы для определения констант a_1 и d . Предсказаниями являются массы для $s\bar{q}$ -мезонов 2^- , одна из которых не очень хорошо соответствует эксперименту ($K_2(1770)$ тяжелее предсказания на 4%).

Для $c\bar{q}$ -мезонов пришлось предположить, что $a_1(c\bar{q}) = 0$. Основанием для этого явилось то, что соответствующая константа для $s\bar{q}$ оказалась равной нулю. Далее, пришлось рассмотреть две возможности отнесения $D_1(2420)$ к траекториям, что дает различные значения параметра смешивания. Предсказания же масс практически не зависят от значений этого параметра.

Для $c\bar{s}, 1^+$ -мезона смешиванием практически можно пренебречь.

Для $b\bar{q}$ и $b\bar{s}$ -мезонов предсказания также сделаны без учета смешивания. Они чувствительны к величине массы b -кварка.

Скалярные траектории. Волновая функция Ψ_3 , $P = C = (-1)^j$, спин-четность низших состояний 0^{++} .

Константы траекторий особо чувствительны к массам скалярных мезонов. Беря для них массы $a_0(980)(q_1\bar{q}_2)$, $K_0^*(1430)(s\bar{q})$, $f_0(980)(s\bar{s})$, $\chi_{c0}(1P)(c\bar{c})$ и $\chi_{b0}(1P)(b\bar{b})$, получаем константы траекторий и предсказания, собранные в табл. 7. Согласие с экспериментом удовлетворительное.

Таблица 7. Предсказания и параметры для скалярных траекторий.

Кварковый состав	j^{PC}, j^P	Теоретическая масса, МэВ	Данные эксперимента
$q_1 \bar{q}_2$	1^{--}	1590	$\rho(1700), \omega(1600)$
	2^{++}	1920	?
	3^{--}	2190	?
$s \bar{q}$	1^-	1730	$K^*(1680)$
	2^+	2150	?
$s \bar{s}$	1^{--}	1650	$\phi(1680)$
	2^{++}	2000	$f_2(2010)$
$c \bar{c}$	1^{--}	3780	$\psi(3770)$
	2^{++}	4025	?
$b \bar{b}$	1^{--}	10110	$\Upsilon(2S), 10023, 3$
		10070 (вар.2)	
		10282	$\chi_{b2}(2P), 10268, 5$
	2^{++}	10210 (вар.2)	
$a_3(q_1 \bar{q}_2) = 0,875, \quad a_3(s \bar{q}) = -1,58, \quad a_3(s \bar{s}) = -0,52$ $a_3(c_1 \bar{c}) = -1,23, \quad a_3(b \bar{b}) = -1,40 \quad (-3,14, \text{вариант } 2)$			

Предположение о том, что $f_0(1370)$ или $f_0(1500)$ являются $0^{++} s \bar{s}$ -состояниями, хуже согласуется с экспериментом. Если это глюболы, описываемые двойной прямой струной, то они лежат на траекториях

$$\sqrt{j(j+1)} = \frac{m_2}{4\pi a} + a_g, \quad (147)$$

и глюболы 2^{++} имеют массу 2700 и 2770 МэВ соответственно.

Наконец, приведем значения основных величин, характеризующих движение кварков и глюонной струны внутри псевдоскалярных и векторных мезонов (табл. 8).

Таблица 8. Кинематические параметры кварков и глюонной струны внутри покоящихся псевдоскалярных и векторных мезонов: $\omega = l^{-1}$ — частота классического вращения струны, $d = l_1 + l_2$ — классическое расстояние между кварками, v_i — скорость i -го кварка, E_i — его энергия, E_0 — энергия глюонной струны.

Частица состав	$\omega, \text{МэВ}$	$d, \text{ГэВ}^{-1}$	v_1, c	v_2, c	$E_1, \text{МэВ}$	$E_2, \text{МэВ}$	$E_0, \text{МэВ}$
$\pi, u \bar{d}$	3950	0,46	0,93	0,87	17	24	99
$\eta, s \bar{s}$	1890	0,38	0,36	0,36	240	240	67
$\eta_c(1S), c \bar{c}$	640	0,58	0,19	0,19	1440	1440	102
$K, u \bar{s}$	1450	0,97	0,97	0,44	28	250	220
$D, u \bar{c}$	710	1,6	0,99	0,17	39	1430	390
$B, u \bar{b}$	520	2,1	0,99	0,07	46	4720	510
$\varphi, s \bar{s}$	630	2,1	0,67	0,67	304	304	410
$J/\psi(1S), c \bar{c}$	420	1,3	0,27	0,27	1470	1470	230
$\Upsilon(1S), b \bar{b}$	290	0,89	0,13	0,13	4750	4750	160
$\Upsilon(1S), \text{вар.2}$	235	1,4	0,16	0,16	4610	4610	240
$\rho, u \bar{d}$	715	2,7	0,99	0,98	39	53	680
$K^*, u \bar{s}$	670	2,4	0,99	0,66	40	300	550
$D^*, u \bar{c}$	570	2,1	0,99	0,21	44	1440	520
$B^*, u \bar{b}$	530	2,0	0,99	0,07	46	4720	560

Частицы в ней сгруппированы по близким значениям глюонной энергии E_0 . Эта энергия велика в ρ, K^*, D^*, B и B^* , где она составляет 500-700 МэВ. Она меньше в $\eta_c(1S)$, $J/\psi(1S)$ и $\Upsilon(1S)$ — порядка 100-200 МэВ. Она минимальна по абсолютной величине в $\eta, s\bar{s}$ и π — меньше 100 МэВ. Все кварки в мезонах, за исключением b , релятивистские. Скорость b -кварка близка к 0, $1c$.

Заключение

При рассмотрении мезонных траекторий мы пренебрегали электромагнитным взаимодействием и разностью масс u - и d -кварков, поэтому, например, частицы ρ и ω считались одним и тем же состоянием $q_1\bar{q}_2, 1^{--}$. Точно так же не различались a_1 и f_1, a_2 и f_2 , b_1 и h_1 и т.д. В этом приближении в рамках единой модели с помощью 16 констант (4 основных и 12 феноменологических) удалось описать ~ 46 различных мезонов. Описание хуже для мезонов с малыми спинами, состоящих из тяжелого кварка и антикварка, где вклад струнного механизма относительно мал. Возможно, модель описывает еще три известных мезона: $\eta'(958)$, $D_1(2420)^0$ и $\chi_{b1}(1P)$. Для проверки этой возможности не хватает данных: нужны массы η -частицы 1^{+-} , еще одной частицы $D1^+$ или $D2^-$ и $\eta_b 0^{-+}$.

Многие состояния (порядка 17) могут быть дочерними состояниями, т.е. соответствовать высшим модам (колебаниям) струны. Важно исследовать эти моды с тяжелыми кварками на концах.

Наконец, ряд состояний: $f_0(1370)0^+(0^{++})$, $f_0(1500)0^+(0^{++})$, $f_J(1710)0^+$ (четный $^{++}$), $f_1(1420)0^+(1^{++})$ (или $f_1(1510)0^+(1^{++})$), $f_2(2300)0^+(2^{++})$, $f_2(2340)0^+(2^{++})$, возможно, не являются кварк-антикварковыми, а представляют собой глюболы или $q\bar{q}q\bar{q}$ -состояния.

Найденные релятивистские волновые функции составных мезонов могут быть использованы для расчета их электрослабых свойств в стандартной модели.

Основной же вывод, по-видимому, состоит в том, что струна дает основной вклад в описание конфайнмента всех кварков, независимо от их масс. Если это так, то с помощью струны можно строить релятивистскую модель адронов, учитывая неструнные детали взаимодействия кварков известными приближенными методами, что должно сократить число феноменологических констант, введенных в данной работе.

Автор благодарен В.В.Брызгалову и В.В.Ежеле за сотрудничество и Л.Г.Ландсбергу и А.В.Разумову за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] См., например, *Donoghue J.F., Golowich E. and Holstein B.R.* Dynamics of the Standard Model. Cambridge Univ.Press и содержащиеся там ссылки на оригинальные работы.
- [2] *Soloviev L.D.* – In: 10-th Int. Conf. "Problems of Quantum Field Theory". JINR. E-2-96-369. Dubna, 1996.
- [3] *Soloviev L.D.* – Preprint IHEP 97-7. Protvino, 1997.
- [4] *Hasenfranz P.* Proc. of the XXIII Int. Conf. on High Energy Physics. / Ed. S.C.Loken (World Scientific, Singapore). 1987.
Fukugita M. Lattice gauge theory using parallel processors. / Ed. X. Li, Z. Qiu and H. Ren (Gordon and Breach, NY).
Zerwas P.M. Proc. of the XXIV Int. Conf. on High Energy Physics. / Ed. R. Kotthaus and J.H. Kuhn (Springer-Verlag, Berlin).
- [5] *Пронько Г.П., Разумов А.В.* // ТМФ. 1983. Т.56. С.192.
- [6] *Бородулин В.И., Зорин О.Л., Пронько Г.П., Разумов А.В., Соловьев Л.Д.* // ТМФ. 1985. Т.65. С.119.
- [7] *Pron'ko G.P.* // Rev.Mat.Phys. 1990. V.2. № 3. P.355.
- [8] *Berezin F.A. and Marinov M.S.* // Ann. of Phys. 1977. V.104. P.336.
- [9] *Соловьев Л.Д.* // ТМФ. 1996. Т.106. № 2. С.209.
- [10] *Brink L., Deser S., Zumino B., Di Vecchia P., Howe P.* // PL. 1976. V.64B. No.4. P.435.
- [11] *Соловьев Л.Д.* – Препринт ИФВЭ 96-67. Протвино, 1996.
- [12] Review of Particle Physics. *Barnett R.M. et al.* // PR. 1996. V.D54. P.1.
- [13] *Nielsen H.B., Olesen P.* // NP. 1973. V.B61. P.45.
- [14] *Chodos A., Thorn C.B.* // NP. 1974. V.B72. P.509.
- [15] *G.'t Hooft.* // NP. 1974. V.B75. P.461.
- [16] *Förster D.* // NP. 1974. V.B81. P.84.
- [17] *Frampton P.* // PR. 1975. D12. P.583.
- [18] *Bars I.* // PRL. 1976. V.36. P.1521.
- [19] *Bars I., Hanson A.* // PR. 1976. V.D13. P.1744.

- [20] *R.C.Giles, S.-H.H.Tye.* // PR. 1977. V.D16. P.1079.
- [21] *Kikkawa K., Sato M.* // PRL. 1977. V.38. P.1309.
Kikkawa K., Kotani T., Sato M. // PR. 1978. V.D18. P.2606.
- [22] *Ida M.* // Progr.Theor.Phys. 1978. V.59. P.1661.
- [23] *Johnson K., Nohl C.* // PR. 1979. D19. P.291.
- [24] *Lizzi F., Rosenzweig C.* // PR. 1985. D31. 1685.
- [25] *Кобзарев И.Ю., Мартеньянов Б.В., Щепкин М.Г.* // ЯФ. 1986. Т.44. С.475.
Кобзарев И.Ю., Кондратюк Л.А., Мартеньянов Б.В., Щепкин М.Г.
ЯФ. 1987. Т.46. С.1552.
- [26] *Батунин А.В., Зорин О.Л.* – Препринт ИФВЭ 89-87. Серпухов, 1989.
- [27] *Barbashov B.M.* – In: Proc. of the Conf. “Strong Interactions at Long Distances”.
/ Ed. L.Jenkovsky. Hadronic Press. 1995. P.257.
- [28] *Дирак П.* Лекции по квантовой механике. – М.: Мир, 1968.
- [29] *Razumov A.V.* – Preprint IHEP 84-86. Serpukhov, 1984.

Рукопись поступила 9 декабря 1997 г.

Л.Д.Соловьев

Релятивистская кварковая модель мезонов.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы $\text{\LaTeX}$.

Редактор Н.В.Ежела.

Технический редактор Н.В.Орлова.

Подписано к печати	11.12.97.	Формат $60 \times 84/8$.	Офсетная печать.
Печ.л. 3,0.	Уч.-изд.л. 2,8.	Тираж 150.	Заказ 1175.
Индекс 3649.			
ЛР №020498 17.04.97.			

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

