И Ф В Э
I H E P

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 97–87
ОНФ

Е.М. Болдырев

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ И В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Electronic addres: boldyrev@mx.ihep.su

Протвино 1997

УДК 681.3.06 М–24

Аннотация

Болдырев Е.М. Движение частицы в постоянном магнитном поле и в поле плоской, монохроматической электромагнитной волны: Препринт ИФВЭ 97–87. – Протвино, 1997. – 9 с., библиогр.: 4.

В работе получено решение уравнения движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле: суперпозиции постоянно однородного магнитного поля и поля плоской монохроматической эллиптически поляризованной электромагнитной волны как решение задачи Коши. Рассматривается случай резонанса. Проводится анализ полученного решения.

Abstract

Boldyrev E.M. Motion in Stationary Magnetic Field and Plane Monochromatic Electromagnetic Wave Field: IHEP Preprint 97–87. – Protvino, 1997. – p. 9, refs.: 4.

The paper presents the solution of equation of charged particle notion in the external electromagnetic field, i.e. the superposition of stationary-uniform magnetic field and that of plane electromagnetic elliptic-polarized wave as the solution of the initial value problem. The resonance case is considered. The analysis of this solution is considered.

Введение

Решение уравнения движения заряженной частицы во внешнем поле — суперпозиции постоянно однородного магнитного поля и поля плоской, монохроматической электромагнитной волны, поляризованной по кругу как задачи Коши — было получено в работе [1]. В настоящей работе аналогичное решение находится для случая плоской монохроматической, эллиптически поляризованной электромагнитной волны, которое как частные случаи включает и указанное выше решение, и решение для плоской монохроматической линейно поляризованной электромагнитной волны.

Задача имеет не только академический интерес, но и практическое значение, поскольку указанный тип волны с высокой точностью соответствует электромагнитному полю лазерного пучка, на основе которого функционируют такие системы как лазер на свободных электронах и как ондулятор (см. работу [2]). Для разработки указанных систем требуется тщательный анализ движения заряженной частицы в приведенной конфигурации полей.

Сама постановка задачи — исходная электромагнитная волна берется в самом общем виде, корректность решения и полученное решение, представленное в явной зависимости от начальных данных, от амплитуд поляризации, от комбинации знака заряда частицы и степени поляризации электромагнитной волны — позволяет применять полученное решение непосредственно в практических расчетах.

Условные обозначения. Постановка задачи

В настоящей работе (x,y,z,t) — координаты точки в четырехмерном пространстве. Трехмерный вектор V в этом пространстве будет, как обычно, обозначать $\vec{V}$; [x,y,z] — координаты этого вектора; $(\vec{a},\vec{b})$ — скалярное произведение векторов; $\vec{r}$ — радиус-вектор положения заряженной частицы; $\vec{r}_0$ — радиус-вектор ее начального положения; m — масса частицы; $\mathcal{E}$ — кинетическая энергия частицы; $\mathcal{E}_0$ — ее начальная энергия; $\vec{P}$ — импульс частицы; $\vec{P}_0$ — ее начальный импульс; $\vec{v}$ — скорость частицы; $|e|$ — величина заряда частицы; c — скорость света.

φ^W, φ^H — скалярные потенциалы электромагнитного поля волны и постоянного однородного магнитного поля. $\vec{A}^W, \vec{A}^H$ — векторные потенциалы этих полей; $\vec{A}_0^W$ — амплитуда (комплексная) электромагнитной волны; $\vec{n}$ — вектор направления распространения волны; $(\frac{\omega}{c}, \vec{k})$ — волновой 4-вектор. $\vec{E}^W$, $\vec{H}^W$ — напряженность электрического и магнитного полей волны; $\vec{H}$ — напряженность постоянного однородного магнитного поля (H — величина этого поля).

Для электромагнитного поля волны $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n}$. Условия калибровки для электромагнитного поля волны есть $\varphi^W = 0$ и $\mathrm{div}\vec{A}^W = 0$. $\vec{A}^W = \frac{1}{2}[\vec{A}_0^W e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} + \kappa.c.]$ (к.с. — комплексно-сопряженные члены). И согласно $\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{H} = rot\vec{A}$, $\vec{E}^W = \frac{1}{2}[\vec{E}_0^W e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} + \kappa.c.]$, где $\vec{E}_0^W = i\frac{\omega}{c}\vec{A}_0^W$ и $\vec{H}^W = [\vec{n}, \vec{E}^W]$.

Следуя стандартной процедуре для учета поляризации электромагнитной волны [3] (отметим, что в [4] эта процедура описана неверно), представим амплитуду напряженности волны в виде $\vec{E}_0^W = Re\vec{E}_0^W + iIm\vec{E}_0^W$ и введем два вещественных вектора $\vec{E}_0^{(1)} = Re\vec{E}_0^W cos\theta + Im\vec{E}_0^W sin\theta$ и $\vec{E}_0^{(2)} = Re\vec{E}_0^W sin\theta - Im\vec{E}_0^W cos\theta$, так чтобы $(\vec{E}_0^{(1)}, \vec{E}_0^{(2)}) = 0$, для этого надо выбрать угол θ, такой чтобы $tg2\theta = \frac{2(Re\vec{E}_0^W, Im\vec{E}_0^W)}{(Re\vec{E}_0^W)^2 - (Im\vec{E}_0^W)^2}$. Теперь выберем систему координат следующим образом: ось Ox направим вдоль вектора $\vec{E}_0^{(1)}$, тогда вектор $\vec{E}_0^{(2)}$ будет направлен либо вдоль оси Oy, либо против, это учитывается введением вектора $g\vec{E}_0^{(2)}$, где $g = \pm 1$ и при g=1 $\vec{E}_0^{(2)}$ имеет с осью Oy противоположное направление, а при g=-1 совпадает с осью Oy (т.е. g — степень поляризации волны); ось Oz направим вдоль направления распространения волны (и вдоль направления постоянного однородного магнитного поля). Введем допустимое преобразование координат: $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$, $\xi = t - \frac{z}{c}$. Тогда в этой системе напряженности электромагнитного поля исходной суперпозиции имеют вид

$$\vec{H} = [-gE_0^{(2)}\sin(\omega\xi - \theta), E_0^{(1)}\cos(\omega\xi - \theta), H],$$
$$\vec{E} = [E_0^{(1)}\cos(\omega\xi - \theta), gE_0^{(2)}\sin(\omega\xi - \theta), 0].$$

Для определения импульса $\vec{P}(t)$ заряженной частицы в таком внешнем поле, с последующим вычислением ее траектории $\vec{r}(t)$ имеем следующую задачу Коши (см. работу [3]):

$$\begin{aligned} &\frac{d\vec{P}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}], \\ &\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e(\vec{E}, \vec{v}), \\ &\vec{P}(t_0) = \vec{P}_0, \quad \mathcal{E}(t_0) = \mathcal{E}_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Введенное выше преобразование координат на множестве решений (1) индуцирует преобразование $x'(\xi) = x(t)$, $y'(\xi) = y(t)$, $z'(\xi) = z(t)$, $\xi = t - \frac{z(t)}{c}$, при этом $\frac{d}{dt} = \frac{\mathcal{E} - cP_z}{\mathcal{E}}\frac{d}{d\xi}$. Положим $e = g_e|e|$, $g_e = +1$ для положительно заряженной частицы и $g_e = -1$ для отрицательно заряженной частицы; $\omega_i = \frac{|e|E_0^{(i)}}{mc}$ (i=1,2), $\vec{\pi} = \frac{\vec{P}}{mc}$, $\vec{\pi}_0 = \frac{\vec{P}_0}{mc}$,

$\epsilon = \frac{\mathcal{E}}{mc^2}$, $\epsilon_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}$, $\alpha = \epsilon - \pi_z$, $\omega_h = \frac{|e|H}{\alpha mc}$. Тогда $\frac{d}{dt} = \frac{\alpha}{\epsilon}\frac{d}{d\xi}$ и (1) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d\pi_x}{d\xi} = g_e\omega_1 cos(\omega\xi - \theta) + g_e\omega_h\pi_y,\\
&\tfrac{d\pi_y}{d\xi} = g_e\omega_2 sin(\omega\xi - \theta) - g_e\omega_h\pi_x,\\
&\tfrac{d\pi_z}{d\xi} = g_e\tfrac{1}{\alpha}[\pi_x\omega_1 cos(\omega\xi - \theta) + g\pi_y\omega_2 sin(\omega\xi - \theta)],\\
&\tfrac{d\epsilon}{d\xi} = g_e\tfrac{1}{\alpha}[\pi_x\omega_1 cos(\omega\xi - \theta) + g\pi_y\omega_2 sin(\omega\xi - \theta)],\\
&\vec{\pi}(\xi_0) = \vec{\pi_0}, \quad \epsilon(\xi_0) = \epsilon_0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Из третьего и четвертого уравнений системы (2) непосредственно видно, что α есть интеграл этой системы, т.е. интеграл движения и, следовательно, $\alpha = \epsilon_0 - \pi_{0z}$. При этом $\vec{\pi}$ и $\vec{r}$ связаны соотношением

$$\vec{\pi} = \frac{\alpha}{c}\frac{d\vec{r}}{d\xi}. \tag{3}$$

С учетом (3) левые части первого и второго уравнений системы (2) соответственно можно представить в виде $\frac{d}{d\xi}[g_e\frac{\omega_1}{\omega}sin(\omega\xi - \theta) + g_e\frac{\alpha}{c}\omega_h y]$ и $-\frac{d}{d\xi}[gg_e\frac{\omega_2}{\omega}cos(\omega\xi - \theta) + g_e\frac{\alpha}{c}\omega_h x]$, и мы имеем еще два интеграла движения:

$$\begin{aligned}
&\Phi_x = \pi_{x0} - g_e\tfrac{\omega_1}{\omega}sin(\omega\xi_0 - \theta) - g_e\tfrac{\alpha}{c}\omega_h y_0,\\
&\Phi_y = \pi_{y0} + gg_e\tfrac{\omega_2}{\omega}cos(\omega\xi_0 - \theta) + g_e\tfrac{\alpha}{c}\omega_h x_0.
\end{aligned}$$

Из этих интегралов движения с учетом (3) для определения $x(\xi)$ и $y(\xi)$ имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{dx}{d\xi} = g_e\tfrac{c}{\alpha}\tfrac{\omega_1}{\omega}sin(\omega\xi - \theta) + g_e\omega_h y + \tfrac{c}{\alpha}\Phi_x,\\
&\tfrac{dy}{d\xi} = -gg_e\tfrac{c}{\alpha}\tfrac{\omega_2}{\omega}cos(\omega\xi - \theta) + g_e\tfrac{\alpha}{c}\omega_h x - \tfrac{c}{\alpha}\Phi_y.
\end{aligned} \tag{4}$$

Дифференцируя первое уравнение этой системы по ξ, с учетом второго уравнения для определения $x(\xi)$, имеем дифференциальное линейное неоднородное уравнение:

$$\tfrac{d^2x}{d\xi^2} + \omega_h^2 x = \tfrac{c}{\alpha}g_e\omega_h[(\tfrac{\omega_1}{\omega_h} - gg_e\tfrac{\omega_2}{\omega})cos(\omega\xi - \theta) + \Phi_y]. \tag{5}$$

При решении этого уравнения мы должны различать следующие четыре случая: $|\omega_h| \neq |\omega|$; $|\omega_h| = |\omega|$; $\omega_h = 0$; $\omega = 0$. Последние два случая рассматриваются как частные случаи первого случая.

В первых двух случаях имеем общий интеграл уравнения (5) — $x(\xi, C_1, C_2)$, после чего из (4) определяем $y(\xi, C_1, C_2)$ и далее, используя (3), находим $\pi_x(\xi, C_1, C_2)$ и $\pi_y(\xi, C_1, C_2)$. $\pi_z(\xi, C_1, C_2, C_z')$ (C_z' аддитивна) и $z(\xi, C_1, C_2, C_z', C_z)$ (здесь аддитивна C_z) находим элементарным интегрированием из третьего уравнения системы (2). Поскольку в задаче Коши (2) только три уравнения являются независимыми ([4]), для определения четырех произвольных констант C_1, C_2, C_z', C_z имеем согласно начальным условиям шесть уравнений, но из них только четыре независимых, что и позволяет решением четырех уравнений относительно четырех неизвестных определить указанные константы и решить тем самым задачу.

В третьем случае первые два уравнения в (2) независимы, и, следовательно, система решается элементарным интегрированием без использования интегралов движения Φ_x и Φ_y; все шесть констант интегрирования аддитивны и без особого труда находятся из начальных условий задачи Коши (2).

В четвертом случае интегрирование уравнений и определение констант подробно описано в соответствующей литературе (см., к примеру, [4]) и в настоящей работе не делается. По указанной причине нет необходимости и в анализе этого решения.

Решение задачи

Указанные решения имеют вид

Случай $|\omega_h| \neq |\omega|$

$$
\begin{aligned}
&x = C_{11}cos\omega_h(\xi-\xi_0) + C_{12}sin\omega_h(\xi-\xi_0) + C_{13}cos(\omega\xi-\theta) + C_{14},\\
&y = C_{21}cos\omega_h(\xi-\xi_0) + C_{22}sin\omega_h(\xi-\xi_0) + C_{23}sin(\omega\xi-\theta) + C_{24},\\
&z = C_{31}cos[\omega_h(\xi-\xi_0) - (\omega\xi-\theta)] + C_{32}cos[\omega_h(\xi-\xi_0) + (\omega\xi-\theta)] +\\
&\quad C_{33}sin[\omega_h(\xi-\xi_0) - (\omega\xi-\theta)] + C_{34}sin[\omega_h(\xi-\xi_0) + (\omega\xi-\theta)] +\\
&\quad C_{35}sin2(\omega\xi-\theta) + C_{36}(\xi-\xi_0) + C_{37};\\
&\pi_x = C'_{11}cos\omega_h(\xi-\xi_0) + C'_{12}sin\omega_h(\xi-\xi_0) + C'_{13}sin(\omega\xi-\theta),\\
&\pi_y = C'_{21}cos\omega_h(\xi-\xi_0) + C'_{22}sin\omega_h(\xi-\xi_0) + C'_{23}cos(\omega\xi-\theta),\\
&\pi_z = C'_{31}cos[\omega_h(\xi-\xi_0) - (\omega\xi-\theta)] + C'_{32}cos[\omega_h(\xi-\xi_0) + (\omega\xi-\theta)] +\\
&\quad C'_{33}sin[\omega_h(\xi-\xi_0) - (\omega\xi-\theta)] + C'_{34}sin[\omega_h(\xi-\xi_0) + (\omega\xi-\theta)] +\\
&\quad C'_{35}cos2(\omega\xi-\theta)] + C'_{36}.
\end{aligned}
$$

Случай $|\omega_h| = |\omega|$

$$
\begin{aligned}
&x = R_{11}(\xi-\xi_0)sin(\omega\xi-\theta) + R_{12}cos\omega(\xi-\xi_0) + R_{13}sin\omega(\xi-\xi_0) + R_{14},\\
&y = R_{21}(\xi-\xi_0)cos(\omega\xi-\theta) + R_{22}cos\omega(\xi-\xi_0) + R_{23}sin\omega(\xi-\xi_0) + R_{24},\\
&z = R_{31}(\xi-\xi_0)^3 + R_{32}(\xi-\xi_0)^2 + R_{33}(\xi-\xi_0) + R_{34}(\xi-\xi_0)cos2(\omega\xi-\theta) +\\
&\quad R_{35}cos2\omega(\xi-\xi_0) + R_{36}sin2\omega(\xi-\xi_0) + R_{37};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\pi_x = R'_{11}(\xi-\xi_0)cos(\omega\xi-\theta) + R'_{12}cos\omega(\xi-\xi_0) + R'_{13}sin\omega(\xi-\xi_0),\\
&\pi_y = R'_{21}(\xi-\xi_0)sin(\omega\xi-\theta) + R'_{22}cos\omega(\xi-\xi_0) + R'_{23}sin\omega(\xi-\xi_0),\\
&\pi_z = R'_{31}(\xi-\xi_0)^2 + R'_{32}(\xi-\xi_0) + R'_{33}(\xi-\xi_0)sin2(\omega\xi-\theta) +\\
&\quad R'_{34}cos2(\omega\xi-\theta) + R'_{35}sin2(\omega\xi-\theta) + R'_{36}.
\end{aligned}
$$

Случай $\omega_h = 0$

$$
\begin{aligned}
&x = W_{11}(\xi-\xi_0) + W_{12}cos(\omega\xi-\theta) + W_{13},\\
&y = W_{21}(\xi-\xi_0) + W_{22}sin(\omega\xi-\theta) + W_{23},\\
&z = W_{31}(\xi-\xi_0) + W_{32}sin2(\omega\xi-\theta) + W_{33}cos(\omega\xi-\theta) + W_{34}sin(\omega\xi-\theta) + W_{35},\\
&\pi_x = W'_{11}sin(\omega\xi-\theta) + W'_{12},\\
&\pi_y = W'_{21}cos(\omega\xi-\theta) + W'_{22},\\
&\pi_z = W'_{31}cos2(\omega\xi-\theta) + W'_{32}cos(\omega\xi-\theta) + W'_{33}sin(\omega\xi-\theta) + W'_{34}.
\end{aligned}
$$

Случай $\omega = 0$

$$
\begin{aligned}
&x = H_{11} cos\omega_h(\xi - \xi_0) + H_{12} sin\omega_h(\xi - \xi_0) + H_{13},\\
&y = H_{21} cos\omega_h(\xi - \xi_0) + H_{22} sin\omega_h(\xi - \xi_0) + H_{23},\\
&z = H_{31}(\xi - \xi_0) + H_{32},\\
&\pi_x = H'_{11} cos\omega_h(\xi - \xi_0) + H'_{12} sin\omega_h(\xi - \xi_0),\\
&\pi_y = H'_{21} cos\omega_h(\xi - \xi_0) + H'_{22} sin\omega_h(\xi - \xi_0),\\
&\pi_z = H'_{31}.
\end{aligned}
$$

Во всех случаях

$$\epsilon = (\pi_z - \pi_{0z}) + \alpha.$$

Коэффициенты, которые будем называть амплитудами (хотя это и не совсем корректно), $C_{ij}, C'_{ij}, R_{ij}, R'_{ij}, W_{ij}, W'_{ij}, H_{ij}, H'_{ij}$ даны в приложении. Численные значения индексов i,j непосредственно видны из приведенного решения.

Анализ решения

Как видно из самого решения и из выражения амплитуд, движение заряженной частицы в указанной суперпозиции полей происходит довольно сложным образом и не является в общем случае простой суперпозицией движений в поле электромагнитной волны и постоянном однородном магнитном поле, а поэтому анализ решения, а он, как это видно, сводится к анализу амплитуд, достаточно объемный, если его рассматривать в зависимости от всех тех постоянных, от которых зависят амплитуды.

В настоящей работе мы ограничимся таким анализом, который представляет несомненный физический интерес, а именно, существованием начальных и прочих условий, при которых частица движется в одной плоскости $x = const$, или $y = const$ (без ограничения общности ограничимся последней плоскостью), и асимптотики для $\omega \gg 1$.

Будем говорить: выражение имеет нулевой порядок, если оно равно $O(\frac{1}{\omega^0})$ (т.е. не зависит от ω); имеет первый порядок, если оно равно $O(\frac{1}{\omega^1})$ и т.п.

Далее из явного выражения амплитуд их можно условно рассматривать как независимые, так и такие, которые выражаются через независимые амплитуды. В дальнейшем значения амплитуд в частных случаях будем выписывать только для независимых амплитуд, за исключением выражений для асимптотики, поскольку указанная зависимость в общем случае не сохраняет порядок амплитуд.

Отметим, что круговая поляризация имеет место, когда $\omega_1 = \omega_2$ и в случаях $|\omega_h| \neq |\omega|$ и $|\omega_h| = |\omega|$ полученное решение совпадает с решением в [1].

Случай $|\omega_h| \neq |\omega|$

В этом случае мы имеем девять независимых амплитуд. Для того чтобы частица двигалась в плоскости $y = const$, необходимо, чтобы $\Omega_{\omega\omega_h} = 0$ и достаточно положить $\pi_{0x} = g_e \frac{\omega_1}{\omega} sin(\omega\xi_0 - \theta)$ и $\pi_{0y} = 0$. Отсюда сразу следует, что в данном случае для круговой поляризации подобное движение невозможно. В этом случае имеем

$$C_{13} = -g_e \frac{c}{\alpha} \frac{\omega_1}{\omega^2}, \quad C_{14} = x_0 + g_e \frac{c}{\alpha} \frac{\omega_1}{\omega^2} cos(\omega\xi_0 - \theta), \quad C_{24} = y_0,$$
$$C_{35} = -\frac{1}{8} \frac{c}{\alpha^2} \frac{\omega_1^2}{\omega^3}, \quad C_{36} = \frac{c}{\alpha}\pi_{0z} + \frac{1}{4} \frac{c}{\alpha^2} \frac{\omega_1^2}{\omega^2} cos2(\omega\xi_0 - \theta),$$
$$C_{37} = z_0 + \frac{1}{8} \frac{c}{\alpha^2} \frac{\omega_1^2}{\omega^3} sin2(\omega\xi_0 - \theta).$$

Остальные независимые амплитуды равны нулю. Для указанной асимптотики с точностью до нулевого порядка имеем

$$C_{11} = H_{11}, \quad C_{12} = H_{12}, \quad C_{14} = H_{13}, \quad C_{21} = H_{21},$$
$$C_{22} = H_{22}, \quad C_{24} = H_{23}, \quad C_{36} = H_{31}, \quad C_{37} = H_{32},$$
$$C'_{11} = H'_{11}, \quad C'_{12} = H'_{12}, \quad C'_{21} = H'_{21}, \quad C'_{22} = H'_{22}, \quad C'_{36} = H'_{31}.$$

Остальные амплитуды в этом приближении равны нулю, и тем самым мы имеем движение в постоянном однородном магнитном поле. С точностью до членов первого порядка, если $\pi_{0x} = \pi_{0y} = 0$, для пространственных компонент мы опять имеем колебательный процесс с частотой ω_h, но для импульсов имеем суперпозицию двух колебательных процессов: с частотой ω и ω_h (ср. работу [1]).

Отметим, что в предельном случае малых частот имеем колебательный процесс с частотой ω, который в случае круговой поляризации представляет собой винтовое движение с указанной частотой.

Случай $|\omega_h| = |\omega|$

В этом случае имеем четырнадцать независимых амплитуд. Отличие от нуля амплитуды R_{11} делает движение в этом случае принципиально отличным от движения в первом случае. Однако необходимым условием для того, чтобы частица двигалась в плоскости $y = const$, есть именно условие $R_{11} = 0$, т.е. условие $\Omega_- = 0$ или $\omega_1 = gg_e\omega_2$, откуда с необходимостью следует, чтобы случай $|\omega_1| \neq |\omega_2|$ был исключен, и мы фактически имеем случай круговой поляризации, и тогда при выполнении дополнительных условий $\pi_{0x} = g_e \frac{\omega_1}{\omega} sin(\omega\xi_0 - \theta), \pi_{0y} = 0$ имеем

$$R_{12} = -g_e \frac{c}{\alpha} \frac{\omega_1}{\omega^2} cos(\omega\xi_0 - \theta), \quad R_{13} = g_e \frac{c}{\alpha} \frac{\omega_1}{\omega^2} sin(\omega\xi_0 - \theta),$$
$$R_{33} = \frac{c}{\alpha}\pi_{0z} + \frac{1}{4} \frac{c}{\alpha^2} \frac{\omega_1^2}{\omega^2} cos2(\omega\xi_0 - \theta),$$
$$R_{35} = -\frac{1}{8} \frac{c}{\alpha^2} \frac{\omega_1^2}{\omega^2} sin2(\omega\xi_0 - \theta), \quad R'_{12} = g_e \frac{\omega_1}{\omega} sin(\omega\xi_0 - \theta), \quad R'_{13} = g_e \frac{\omega_1}{\omega} cos(\omega\xi_0 - \theta).$$

Остальные независимые амплитуды равны нулю.

Об асимптотике в этом случае вообще говорить не приходится, поскольку здесь ω, фактически являясь лармоновой частотой, сравнима с ω_i (i=1,2). Однако можно сказать, что с точностью до членов первого порядка при выполнении условий $\Omega_- = 0$ и очень большом продольном импульсе, при остальных независимых амплитудах в этом приближении равных нулю, мы имеем

$$R_{12} = H_{11}, \quad R_{13} = H_{12}, \quad R_{14} = H_{13}, \quad R_{22} = H_{21},$$
$$R_{23} = H_{22}, \quad R_{24} = H_{23}, \quad R_{33} = H_{31}, \quad R_{37} = H_{32},$$

т.е. траектории частицы такие же, как и траектории в постоянном однородном магнитном поле. Но для импульсов подобное не имеет места, и на движение в постоянном однородном магнитном поле накладываются осцилляции электромагнитной волны.

Случай $\omega_h = 0$

Здесь мы имеем одиннадцать независимых амплитуд. Для того чтобы частица двигалась в плоскости $y = const$, необходимо, чтобы $\omega_2 = 0$, и, принимая еще дополнительно $\pi_{0y} = 0$, мы видим, что амплитуды $W_{11}, W_{12}, W_{13}, W'_{11}$ остаются без изменения, а остальные, отличные от нуля независимые, равны

$$
\begin{aligned}
&W_{23} = y_0,\\
&W_{31} = \tfrac{c}{\alpha}[\pi_{0z} - g_e \tfrac{1}{\alpha}\tfrac{\omega_1}{\omega}\pi_{0x} sin(\omega\xi_0 - \theta) - \tfrac{1}{4}\tfrac{1}{\alpha}\tfrac{\omega_1^2}{\omega^2} cos2(\omega\xi_0 - \theta) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\omega_1^2}{\omega^2}],\\
&W_{32} = -\tfrac{1}{8}\tfrac{c}{\alpha^2}\tfrac{\omega_1^2}{\omega^3},\\
&W_{35} = z_0 + g_e \tfrac{c}{\alpha^2}\tfrac{\omega_1}{\omega^2}\pi_{0x} cos(\omega\xi_0 - \theta) - \tfrac{3}{8}\tfrac{c}{\alpha^2}\tfrac{\omega_1^2}{\omega^3} sin2(\omega\xi_0 - \theta).
\end{aligned}
$$

В этом случае также представляет интерес существование таких начальных и прочих условий, при которых мы имеем винтовое движение, а именно:

$$\pi_{0x} = g_e \tfrac{\omega_1}{\omega} sin(\omega\xi_0 - \theta), \quad \pi_{0y} = -g g_e \tfrac{\omega_2}{\omega} cos(\omega\xi_0 - \theta).$$

Амплитуды $W_{12}, W_{13}, W_{22}, W_{23}, W_{32}, W'_{11}, W'_{21}$ остаются без изменения, а остальные амплитуды, отличные от нуля, имеют вид

$$W_{31} = \tfrac{c}{\alpha}[\pi_{0z} + \tfrac{1}{4}\tfrac{1}{\alpha}\tfrac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega^2} cos2(\omega\xi_0 - \theta)], \quad W_{35} = z_0 + \tfrac{1}{8}\tfrac{c}{\alpha^2}\tfrac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega^2} sin2(\omega\xi_0 - \theta)],$$

т.е. чисто винтовое движение имеем только для случая круговой поляризации.

Асимптотика в нулевом приближении имеет совсем простой вид — это прямолинейное равномерное движение. С точностью до членов первого порядка амплитуды $W_{11}, W_{21}, W'_{11}, W'_{12}, W'_{21}, W'_{22}$ остаются без изменения, а остальные, отличные в этом приближении от нуля, амплитуды имеют вид

$$
\begin{aligned}
&W_{13} = x_0, \quad W_{23} = y_0,\\
&W_{31} = \tfrac{c}{\alpha}[\pi_{0z} - g_e \tfrac{1}{\alpha}\tfrac{\omega_1}{\omega}\pi_{0x} sin(\omega\xi_0 - \theta) + g g_e \tfrac{1}{\alpha}\tfrac{\omega_2}{\omega}\pi_{0y} cos(\omega\xi_0 - \theta)],\\
&W_{35} = z_0, \quad W'_{32} = -g g_e \tfrac{1}{\alpha}\tfrac{\omega_2}{\omega}\pi_{0y}, \quad W'_{33} = g_e \tfrac{1}{\alpha}\tfrac{\omega_1}{\omega}\pi_{0x},\\
&W'_{34} = \pi_0 z - g_e \tfrac{1}{\alpha}\tfrac{\omega_1}{\omega}\pi_{0x} sin(\omega\xi_0 - \theta) + g g_e \tfrac{1}{\alpha}\tfrac{\omega_2}{\omega}\pi_{0y} cos(\omega\xi_0 - \theta).
\end{aligned}
$$

Заключение

Мы получили решение задачи в виде безразмерных комплексов $\vec{\pi}$ и ϵ, но из их определения переход к импульсу и энергии вполне очевиден.

Для того чтобы вновь перейти от переменных (x,y,z,ξ) к переменным (x, y, z, t), необходимо решить нелинейное уравнение $\xi + \frac{z(\xi)}{c} = t$. Как показывают рассуждения в работе [4], решение $\xi = \xi(t, z)$ этого уравнения существует, и оно без труда находится численным методом. При рассмотренной асимптотике это решение находится просто, поскольку в этом случае вдоль z-оси частица фактически движется равномерно.

В заключение автор выражает благодарность А.П.Воробьеву за обсуждение и сделанные замечания.

Список литературы

[1] Болдырев Е.М. Движение частицы в постоянном магнитном поле и в поле плоской электромагнитной волны.//ЖТФ. 1997, т.67, вып.2.

[2] Dattoli G., Torre A. Free-electron laser theory. CERN 89-03 1989.

[3] Левич В.Г. Курс теоретической физики. Т.1. Москва, 1968.

[4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. Москва, 1973.

Рукопись поступила 22 декабря 1997 г.

Приложение

$$\Omega_{\omega_h\omega} = \frac{\omega\omega_h}{\omega_h^2-\omega^2}\left(\frac{\omega_1}{\omega_h} - gg_e\frac{\omega_2}{\omega}\right), \quad \Omega_{\omega\omega_h} = \frac{\omega\omega_h}{\omega_h^2-\omega^2}\left(\frac{\omega_1}{\omega} - gg_e\frac{\omega_2}{\omega_h}\right).$$
$$\Omega_+ = \frac{1}{\omega}(\omega_1 + gg_e\omega_2), \quad \Omega_- = \frac{1}{\omega}(\omega_1 - gg_e\omega_2).$$

$$C_{11} = -g_e\frac{c}{\alpha\omega_h}[\pi_{0y} + \Omega_{\omega\omega_h}cos(\omega\xi_0-\theta)], \quad C_{12} = \frac{c}{\alpha\omega_h}[\pi_{0x} + g_e\Omega_{\omega_h\omega}sin(\omega\xi_0-\theta)],$$
$$C_{13} = g_e\frac{c}{\alpha}\frac{1}{\omega}\Omega_{\omega_h\omega}, \quad C_{14} = x_0 + g_e\frac{c}{\alpha\omega_h}[\pi_{0y} + gg_e\frac{\omega_2}{\omega}cos(\omega\xi_0-\theta)],$$
$$C_{21} = g_eC_{12}, \quad C_{22} = -g_eC_{11},$$
$$C_{23} = -\frac{c}{\alpha}\frac{1}{\omega}\Omega_{\omega\omega_h}, \quad C_{24} = y_0 - g_e\frac{c}{\alpha\omega_h}[\pi_{0x} - g_e\frac{\omega_1}{\omega}sin(\omega\xi_0-\theta)],$$
$$C_{31} = -\frac{1}{2}g_e\frac{1}{\alpha}\frac{\omega_1-gg_e\omega_2}{(\omega_h-\omega)^2}\omega_hC_{12}, \quad C_{32} = -\frac{1}{2}g_e\frac{1}{\alpha}\frac{\omega_1+gg_e\omega_2}{(\omega_h+\omega)^2}\omega_hC_{12},$$
$$C_{33} = \frac{1}{2}g_e\frac{1}{\alpha}\frac{\omega_1-gg_e\omega_2}{(\omega_h-\omega)^2}\omega_hC_{11}, \quad C_{34} = \frac{1}{2}g_e\frac{1}{\alpha}\frac{\omega_1+gg_e\omega_2}{(\omega_h+\omega)^2}\omega_hC_{11},$$
$$C_{35} = \frac{1}{8}\frac{c}{\alpha^2}\frac{1}{\omega}\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{\omega_h^2-\omega^2},$$
$$C_{36} = \frac{c}{\alpha}\pi_{0z} + g_e\frac{c}{\alpha^2}\Omega_{\omega_h\omega}\pi_{0x}sin(\omega\xi_0-\theta) + \frac{c}{\alpha^2}\Omega_{\omega\omega_h}\pi_{0y}cos(\omega\xi_0-\theta) +$$
$$\frac{1}{4}\frac{c}{\alpha^2}\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{\omega_h^2-\omega^2}cos2(\omega\xi_0-\theta) + \frac{1}{2}\frac{c}{\alpha^2}(\Omega^2_{\omega\omega_h} + \Omega^2_{\omega_h\omega}),$$
$$C_{37} = z_0 + g_e\frac{c}{\alpha^2}\frac{1}{\omega_h^2-\omega^2}(\omega_h\Omega_{\omega\omega_h} + \omega\Omega_{\omega_h\omega})\pi_{0x}cos(\omega\xi_0-\theta) -$$
$$\frac{c}{\alpha^2}\frac{1}{\omega_h^2-\omega^2}(\omega_h\Omega_{\omega_h\omega} + \omega\Omega_{\omega\omega_h})\pi_{0y}sin(\omega\xi_0-\theta) -$$
$$\frac{1}{8}\frac{c}{\alpha^2}\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{\omega}\frac{3\omega^2+\omega_h^2}{(\omega_h^2-\omega^2)^2}sin2(\omega\xi_0-\theta),$$
$$C'_{11} = \frac{\alpha}{c}\omega_hC_{12}, \quad C'_{12} = -\frac{\alpha}{c}\omega_hC_{11}, \quad C'_{13} = -\frac{\alpha}{c}\omega C_{13},$$
$$C'_{21} = -g_e\frac{\alpha}{c}\omega_hC_{11}, \quad C'_{22} = -g_e\frac{\alpha}{c}\omega_hC_{12}, \quad C'_{23} = \frac{\alpha}{c}\omega C_{23},$$
$$C'_{31} = \frac{1}{2}g_e\frac{1}{c}\omega_h\frac{\omega_1-gg_e\omega_2}{\omega_h-\omega}C_{11}, \quad C'_{32} = \frac{1}{2}g_e\frac{1}{c}\omega_h\frac{\omega_1+gg_e\omega_2}{\omega_h+\omega}C_{11}, \quad C'_{33} = \frac{1}{2}g_e\frac{1}{c}\omega_h\frac{\omega_1-gg_e\omega_2}{\omega_h-\omega}C_{12},$$
$$C'_{34} = \frac{1}{2}g_e\frac{1}{c}\omega_h\frac{\omega_1+gg_e\omega_2}{\omega_h+\omega}C_{12}, \quad C'_{35} = 2\frac{\alpha}{c}\omega C_{35}, \quad C'_{36} = \frac{\alpha}{c}C_{36}.$$

$$R_{11} = \frac{1}{2}g_e\frac{c}{\alpha}\Omega_-, \quad R_{12} = -g_e\frac{c}{\alpha}\frac{1}{\omega}[\pi_{0y} + gg_e\frac{\omega_2}{\omega}cos(\omega\xi_0-\theta)],$$
$$R_{13} = \frac{c}{\alpha}\frac{1}{\omega}[\pi_{0x} - \frac{1}{2}g_e\Omega_-sin(\omega\xi_0-\theta)], \quad R_{14} = -R_{12} + x_0,$$
$$R_{21} = g_eR_{11}, \quad R_{22} = \frac{c}{\alpha}\frac{1}{\omega}[g_e\pi_{0x} - \frac{\omega_1}{\omega}sin(\omega\xi_0-\theta)],$$
$$R_{23} = \frac{c}{\alpha}\frac{1}{\omega}[\pi_{0y} - \frac{1}{2}\Omega_-cos(\omega\xi_0-\theta)], \quad R_{24} = -R_{22} + y_0,$$

$$
\begin{aligned}
&R_{31} = \frac{1}{24}\frac{c}{\alpha^2}\omega^2\Omega_-^2,\\
&R_{32} = \frac{1}{4}\frac{c}{\alpha^2}\omega\Omega_-[g_e\pi_{0x}cos(\omega\xi_0-\theta) - \pi_{0y}sin(\omega\xi_0-\theta) - \frac{1}{4}\Omega_+ sin2(\omega\xi_0-\theta)],\\
&R_{33} = \frac{c}{\alpha}\pi_{0z} + \frac{1}{4}\frac{c}{\alpha^2}\Omega_+[-g_e\pi_{0x}sin(\omega\xi_0-\theta) + \pi_{0y}cos(\omega\xi_0-\theta) + \frac{1}{4}\Omega_+],\\
&R_{34} = -\frac{1}{16}\frac{c}{\alpha^2}\Omega_-\Omega_+,\\
&R_{35} = -\frac{1}{8}\frac{c}{\alpha^2}\frac{1}{\omega}\Omega_+[g_e\pi_{0x}cos(\omega\xi_0-\theta) + \pi_{0y}sin(\omega\xi_0-\theta) - \frac{1}{4}\Omega_- sin2(\omega\xi_0-\theta)],\\
&R_{36} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\omega}(R_{33} - \frac{c}{\alpha}\pi_{0z}) + \frac{1}{32}\frac{c}{\alpha^2}\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{\omega^3}cos2(\omega\xi_0-\theta), \quad R_{37} = z_0 - R_{35},\\
&R'_{11} = \frac{\alpha}{c}\omega R_{11}, \quad R'_{12} = \pi_{0x}, \quad R'_{13} = g_e[\pi_{0y} + \frac{1}{2}\Omega_+ cos(\omega\xi_0-\theta)],\\
&R'_{21} = -g_e\frac{\alpha}{c}\omega R_{11}, \quad R'_{22} = \pi_{0y}, \quad R'_{23} = -[g_e\pi_{0x} - \frac{1}{2}\Omega_+ sin(\omega\xi_0-\theta)],\\
&R'_{31} = 3\frac{\alpha}{c}R_{31}, \quad R'_{32} = 2\frac{\alpha}{c}R_{32}, \quad R'_{33} = -2\frac{\alpha}{c}\omega R_{34}, \quad R'_{34} = -\frac{\alpha}{c}R_{33} + \pi_{0z},\\
&R'_{35} = \frac{1}{16}\frac{1}{\alpha}\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{\omega^2}sin2(\omega\xi_0-\theta)] - 2\frac{\alpha}{c}\omega R_{35}, \quad R'_{36} = \frac{\alpha}{c}R_{33}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&W_{11} = \frac{c}{\alpha}[\pi_{0x} - g_e\frac{\omega_1}{\omega}sin(\omega\xi_0-\theta)],\\
&W_{12} = -g_e\frac{c}{\alpha}\frac{\omega_1}{\omega^2}, \quad W_{13} = x_0 + g_e\frac{c}{\alpha}\frac{\omega_1}{\omega^2}cos(\omega\xi_0-\theta),\\
&W_{21} = \frac{c}{\alpha}[\pi_{0y} + gg_e\frac{\omega_2}{\omega}cos(\omega\xi_0-\theta)],\\
&W_{22} = -gg_e\frac{c}{\alpha}\frac{\omega_2}{\omega^2}, \quad W_{23} = y_0 + gg_e\frac{c}{\alpha}\frac{\omega_2}{\omega^2}sin(\omega\xi_0-\theta),\\
&W_{31} = \frac{c}{\alpha}[\pi_{0z} - g_e\frac{1}{\alpha}\frac{\omega_1}{\omega}\pi_{0x}sin(\omega\xi_0-\theta) + gg_e\frac{1}{\alpha}\frac{\omega_2}{\omega}\pi_{0y}cos(\omega\xi_0-\theta) -\\
&\qquad \frac{1}{4}\frac{1}{\alpha}\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{\omega^2}cos2(\omega\xi_0-\theta) + \frac{1}{2}\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{\omega^2}],\\
&W_{32} = -\frac{1}{8}\frac{c}{\alpha^2}\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{\omega^3},\\
&W_{33} = -g_e\frac{1}{\alpha}\frac{\omega_1}{\omega^2}W_{11}, \quad W_{34} = -gg_e\frac{1}{\alpha}\frac{\omega_2}{\omega^2}W_{21},\\
&W_{35} = z_0 + g_e\frac{c}{\alpha^2}\frac{\omega_1}{\omega^2}\pi_{0x}cos(\omega\xi_0-\theta) + gg_e\frac{c}{\alpha^2}\frac{\omega_2}{\omega^2}\pi_{0y}sin(\omega\xi_0-\theta) -\\
&\qquad \frac{3}{8}\frac{c}{\alpha^2}\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{\omega^3}sin2(\omega\xi_0-\theta),\\
&W'_{11} = g_e\frac{\omega_1}{\omega}, \quad W'_{12} = \frac{\alpha}{c}W_{11},\\
&W'_{21} = -gg_e\frac{\omega_2}{\omega}, \quad W'_{22} = \frac{\alpha}{c}W_{21},\\
&W'_{31} = 2\frac{\alpha}{c}\omega W_{32}, \quad W'_{32} = -gg_e\frac{1}{c}\frac{\omega_2}{\omega}W_{21}, \quad W'_{33} = g_e\frac{1}{c}\frac{\omega_1}{\omega}W_{11}, \quad W'_{34} = \frac{\alpha}{c}W_{31}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&H_{11} = -g_e\frac{c}{\alpha}\frac{1}{\omega_h}\pi_{0y}, \quad H_{12} = \frac{c}{\alpha}\frac{1}{\omega_h}\pi_{0x}, \quad H_{13} = x_0 - H_{11}\\
&H_{21} = g_e H_{12}, \quad H_{22} = -g_e H_{11}, \quad H_{23} = y_0 - g_e H_{12},\\
&H_{31} = \frac{c}{\alpha}\pi_{0z}, \quad H_{32} = z_0,\\
&H'_{11} = \frac{\alpha}{c}\omega_h H_{12}, \quad H'_{12} = -\frac{\alpha}{c}\omega_h H_{11},\\
&H'_{21} = -g_e\frac{\alpha}{c}\omega_h H_{11}, \quad H'_{22} = -g_e\frac{\alpha}{c}\omega_h H_{12}, \quad H'_{31} = \frac{\alpha}{c}H_{31}.
\end{aligned}
$$

Е.М. Болдырев.
Движение частицы в постоянном магнитном поле и в поле плоской, монохроматической электромагнитной волны.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы LaTeX.
Редактор Н.В.Ежела. Технический редактор Н.В. Орлова

Подписано к печати 22.12.97. Формат $60 \times 84/8$. Офсетная печать.
Печ.л. 1,12. Уч.-изд.л. 0,86. Тираж 100. Заказ 76. Индекс 3649.
ЛР №020498 17.04.97.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 97–87, И Ф В Э, 1997