ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 98–29
ОТФ

Л.Д. Соловьев

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЗОНОВ С ТОКОВЫМИ МАССАМИ КВАРКОВ

Протвино 1998

УДК 539.1.01 М–24

Аннотация

Соловьев Л.Д. Релятивистская модель мезонов с токовыми массами кварков: Препринт ИФВЭ 98–29. – Протвино, 1998. – 22 с., 6 табл., библиогр.: 17.

Предложена релятивистская квантовая модель мезонов, в которой токовые кварк и антикварк описываются уравнениями Дирака, а вклад глюонного поля на больших расстояниях описывается квантованной прямолинейной струной Намбу-Гото. Токовые массы кварков и натяжение струны являются основными параметрами модели. Вклад глюонного поля на малых расстояниях, не возрастающий с ростом спина мезона, учитывается феноменологически. Модель хорошо описывает спектр мезонов от пиона до Υ-мезона, лежащих на главных реджевских траекториях (т.е. являющихся низшими радиальными возбуждениями на языке потенциальной модели), и позволяет определить токовые массы кварков. Получены релятивистские волновые функции составных мезонов, из которых, в частности, следует, что спиновая структура мезонов, составленных из легких кварков, существенно отличается от предсказаний нерелятивистской кварковой модели. Получены предсказания масс новых мезонов и проделано сравнение с потенциальной моделью Годфрея-Исгура [1].

Abstract

Soloviev L.D. Relativistic Model of Mesons with Current Quark Masses: IHEP Preprint 98–29. – Protvino, 1998. – p. 22, tables 6, refs.: 17.

We consider a relativistic quantum model of mesons, in which current quarks and antiquarks obey the Dirac equations and the gluon field contribution at large distances is described by the straight-line Nambu-Goto quantum string. The current quark masses and the string tension are the main parameters of the model. The gluon field contribution at small distances not growing with the meson spin is taken into account phenomenologically. The model describes well the meson mass spectrum from pion to Υ lying on the main Regge trajectories (i.e. lowest radial excitations in terms of the potential model) and allows one to obtain the current quark masses. The relativistic wave functions of composite mesons are obtained, which show, in particular, that the spin structure of light-quark mesons is substantially different from predictions of the nonrelativistic quark model. Masses of new mesons are obtained and the comparison with the Godfrey-Isgur model [1] is made.

Памяти Ю.Д. Прокошкина

Потенциальная кварковая модель мезонов (например, в работе [1] и цитированных там работах) имеет два недостатка: она нерелятивистская (или приближенно релятивистская) и использует составляющие массы кварков, которые в отличие от токовых не являются фундаментальными параметрами теории.

В этой работе рассматривается модель мезонов, которая не имеет указанных недостатков и может быть более непосредственным следствием квантовой хромодинамики. Она основана на квантовании вращающейся прямолинейной релятивистской струны, на концах которой находятся кварк и антикварк со спинами 1/2 и произвольными токовыми массами.

Струна в модели обеспечивает невылетание кварков и обладает энергией и угловым моментом. Поэтому она объединяет два различных механизма потенциальной модели — потенциал невылетания и составляющие массы кварков.

Мы ограничимся простейшей конфигурацией струны — прямолинейной, что, как показано в работе, соответствует мезонам, лежащим на главных реджевских траекториях. Для описания дочерних траекторий (т.е. высших радиальных возбуждений на языке потенциальной модели) нужно рассматривать вибрации струны.

Помимо струнного механизма в модели феноменологически учитывается взаимодействие кварков на малых расстояниях. В спектральном условии это взаимодействие может давать вклад, не растущий с ростом спина мезона. В большинстве случаев его достаточно учесть лишь как константу, и только для тяжелых кварка и антикварка входит небольшой член, убывающий с ростом спина.

Представление о том, что глюонное поле между кварком и антикварком, находящимися на большом расстоянии, стягивается в тонкую трубку, описываемую струной Намбу-Гото, является весьма распространенным. Вычисления на решетке не противоречат этому механизму невылетания кварков.

Идея описания мезонов с помощью прямолинейной струны с кварками на концах использовалась во многих работах (см. [2,3] и цитированные там работы), однако важно одновременно учесть массы и спины кварков и проделать последовательное квантование, что сделано в [2,3] и в данной работе.

Заметим, что стандартное квантование полной струны, содержащее аномалию в четырехмерном пространстве-времени [4], отнюдь не исключает безаномального квантования отдельных конфигураций струны, важных для описания мезонов. Вопрос о квантовании бесконечного числа высших мод струны в модели мезонов вообще может быть снят необходимостью более точного учета глюонного поля (в высших приближениях модели). Вопрос о квантовании полной струны с массивными кварками на концах открыт.

Данная работа посвящена формулировке и обсуждению следствий модели (теоретические детали можно найти в работах [5,2,3]). В разделе 1 рассмотрена кинематика прямолинейной струны (простейшей релятивистской протяженной системы) и выписаны классический лагранжиан и гамильтониан модели. В разделе 2 проделано ее каноническое квантование, учтено взаимодействие кварков на малых расстояниях, найдены релятивистские волновые функции мезонов и проанализирована их спиновая структура. В частности, оказалось, что средний спин кварков в поляризованных мезонах, состоящих из легких кварков, вдвое меньше, чем в нерелятивистской кварковой модели, и что в спиновых эффектах сильно нарушается $SU(3)$-симметрия ароматов.

В разделе 3 вычислены массы мезонов, имеющих различный кварковый состав, различные спины и четности. Из сравнения с экспериментом, включая результаты, полученные на установках ГАМС и ВЕС в ИФВЭ, определены параметры модели, в частности, токовые массы кварков. При этом для нахождения масс u- и d-кварков использовалось линейное приближение киральной $SU(3)$-симметрии [6,7], поскольку формулы модели для измеренных величин недостаточно чувствительны к этим массам. Получены предсказания масс еще не обнаруженных мезонов (в частности, масса B_c-мезона 6,40 ГэВ) и проделано сравнение с результатами потенциальной кварковой модели Годфрея-Исгура [1]. Выводы собраны в разделе 4. В приложение вынесены формулы спиновой структуры мезонов.

1. Классическая модель

Начнем с кинематики прямолинейной релятивистской струны

$$x^\mu(\tau,\sigma) = r^\mu(\tau) + f(\tau,\sigma)q^\mu(\tau), \tag{1}$$

где τ и σ — релятивистски-инвариантные параметры эволюции и положения точек на струне. При фиксированном τ это прямая в 4-мерном пространстве. Ее пространственная часть x^i является прямой при фиксированном времени x^0, если $q^0 = 0$.

Явно ковариантное описание вводит лишние с физической точки зрения переменные. Поэтому действие релятивистской системы инвариантно относительно преобразований, зависящих от τ. Для струны (1) такими преобразованиями являются: 1) сдвиг конца вектора r вдоль направления струны q: $r \to r + \alpha(\tau)q$; 2) изменение длины q: $q \to \beta(\tau)q$; 3) переход к другому эволюционному параметру: $\tau \to \tau(\tau')$, что для лагранжиана означает равенство $\mathcal{L}(\gamma(\tau)\dot{z}) = \gamma(\tau)\mathcal{L}(\dot{z})$, где $\dot{z}$ —

каждая производная по τ. Поэтому важны величины, являющиеся инвариантами этих преобразований. Это четыре ортонормированных вектора

$$v^0 = \dot{r}_\perp / bl,\ v^1 = \dot{n}/b,\ v^2_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} v^{0\nu} v^{3\rho} v^{1\sigma},\ v^3 \equiv n = q/(-q^2)^{1/2}, \tag{2}$$

где

$$\dot{r}^\mu_\perp = (g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu + v^{1\mu} v^{1\nu}) \dot{r}_\nu, \quad b = (-\dot{n}^2)^{1/2}, \tag{3}$$

и скаляр

$$l = (\dot{r}^2_\perp)^{1/2}/b. \tag{4}$$

Величина b представляет собой скорость вращения струны и зависит от выбора τ. Однако условие

$$b \neq 0, \tag{5}$$

которое мы примем, является инвариантным в силу монотонности параметра эволюции. Тогда на струне имеется физически выделенная точка — ее мгновенный центр вращения, от которого удобно отсчитывать инвариантное положение точек на струне

$$y = (-q^2)^{1/2} f - \dot{r} v^1 / b. \tag{6}$$

Классический лагранжиан модели равен

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{стр}} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{\text{вз}}. \tag{7}$$

Здесь $\mathcal{L}_{\text{стр}}$ — лагранжиан Намбу-Гото прямолинейной струны

$$\mathcal{L}_{\text{стр}} = -ab \int\limits_{y_1}^{y_2} (l^2 - y^2)^{1/2} dy, \tag{8}$$

где a — параметр натяжения струны (параметр модели). $\mathcal{L}_i, i = 1, 2$ — классический лагранжиан релятивистской частицы с массой покоя m_i, спином ξ_i и скоростью i-го конца струны $\dot{x}_i$ [8]. Спиновые переменные каждой частицы антикоммутируют между собой (но коммутируют со спиновыми переменными другой частицы). Для ковариантного исключения нулевых компонент псевдовекторов ξ_i в лагранжиан вводятся спиновые переменные ξ^5_i и λ_i, из которых последняя не является динамической переменной (ее производная не входит в лагранжиан), и варьирование по ней приводит к спиновой связи между динамическими переменными. Классический лагранжиан кварка или антикварка имеет вид [8]

$$\mathcal{L}_i = -m_i (\dot{x}^2_i)^{1/2} - i((\dot{x}^2_i)^{-1/2} \dot{x}_i \xi_i - \xi^5_i) b \lambda_i - \frac{i}{2} (\xi_i \dot{\xi}_i - \xi^5_i \dot{\xi}^5_i). \tag{9}$$

Уравнения движения, которые следуют из нашего лагранжиана, должны совпадать с уравнениями, вытекающими из лагранжиана для полной струны, в которых сделан переход к прямолинейной струне (1). Это накладывает ограничение на скорости концов струны

$$\dot{x}_i = b(l v^0 + y_i v^1). \tag{10}$$

Инвариантные струнные векторы (2) и спины ξ_i образуют инвариантные (псевдо)скаляры

$$u_i^a = v^a \xi_i, \quad a = 0,1,2,3, \quad u_i^5 = \xi_i^5. \tag{11}$$

Вытекающие из (9) спиновые связи не должны противоречить уравнениям движения для динамических переменных. Это заставляет вводить в лагранжиан добавочный спиновый член $\mathcal{L}_{\text{вз}}$. Можно показать, что

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = -b(i \sum u_i^1 u_i^3 - \tilde{K}^{-1} u_1^1 u_1^2 u_2^1 u_2^2), \tag{12}$$

где

$$\tilde{K} = l\tilde{G}_l - \tilde{G}, \tag{13}$$

индекс l обозначает производную по l и $\tilde{G}$ — функция (16) с заменой l_2 на y_2 и $-l_1$ на y_1, обеспечивает совместимость спиновых связей и уравнений движения, что будет очевидно далее из гамильтоновых уравнений.

Находя экстремум лагранжиана по координатам концов струны y_i, перепишем лагранжиан модели в виде

$$\mathcal{L} = -bF(l,u,\lambda) - \frac{i}{2} \sum \xi_{iM} \dot{\xi}_i^M, \tag{14}$$

$$F = G(l) + i \sum F_{ia}(l) u_i^a \lambda_i + i \sum u_i^1 u_i^3 - K^{-1} u_1^1 u_1^2 u_2^1 u_2^2, \tag{15}$$

где $M = \mu, 5$, $K = lG_l - G$,

$$G(l) = a \int\limits_{-l_1}^{l_2} (l^2 - y^2)^{1/2} dy + \sum m_i (l^2 - l_i^2)^{1/2}, \tag{16}$$

$$l_i = (l^2 + \nu_i^2/4)^{1/2} - \nu_i/2, \qquad \nu_i = m_i/a, \tag{17}$$

$$F_{i0} = l(\nu_i l_i)^{-1/2}, \;\; F_{i1} = (-1)^i (l_i/\nu_i)^{1/2}, \;\; F_{i2} = F_{i3} = 0, \;\; F_{i5} = -1. \tag{18}$$

Перейдем к гамильтонову описанию. При этом удобно выбрать λ_i так, чтобы

$$\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1 \xi_2^M = \lambda_2 \xi_1^M = 0. \tag{19}$$

Импульсы, канонически сопряженные координатам r и q, равны

$$p = -\partial\mathcal{L}/\partial\dot{r}, \quad \pi = -\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}. \tag{20}$$

Импульс p сохраняется вследствие трансляционной инвариантности лагранжиана и является полным импульсом мезона. Масса мезона равна

$$m = \sqrt{p^2}. \tag{21}$$

Сохраняется также полный угловой момент

$$M^{\mu\nu} = r^{[\mu} p^{\nu]} + q^{[\mu} \pi^{\nu]} - i \sum \xi_i^\mu \xi_i^\nu \tag{22}$$

и полный спин мезона

$$J_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\nu M^{\rho\sigma}/2m = L_\mu + S_\mu, \tag{23}$$

где

$$L_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\nu q^\rho \pi^\sigma/m \tag{24}$$

орбитальный спин мезона и

$$S_\mu = \sum \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\nu \xi_i^\rho \xi_i^\sigma/2im \tag{25}$$

кварковый спин мезона.

Поскольку наша система инвариантна относительно трех зависящих от τ преобразований, между ее координатами и импульсами существуют три связи. Удобно наложить калибровочные условия

$$p\pi = 0, \quad \pi^2 = -1 \tag{26}$$

и исключить две связи $pq = 0$ и $\pi q = 0$, введя независимые переменные $k^{(a)}, L^{(a)}, \xi^{(a)}, z$ и p, через которые исходные переменные выражаются с помощью тетрады векторов $e_\alpha(p)$, $\alpha = 0, a$, $a = 1, 2, 3$

$$e_0 = p/m, \quad e_\alpha e_\beta = g_{\alpha\beta}. \tag{27}$$

Разложим по тетраде внутренний импульс π, орбитальный спин (24) и спиновые псевдовекторы ξ_i^μ

$$\pi = k^{(a)} e_a, \quad L = L^{(a)} e_a, \quad \xi_i^\mu = \xi_i^{(\alpha)} e_\alpha^\mu, \tag{28}$$

и будем рассматривать компоненты $k^{(a)}, L^{(a)}$ и $\xi_i^{(\alpha)}$ как независимые переменные. Независимыми являются также $\xi_i^5 \equiv \xi_i^{(5)}$. Независимой координатой вместо r является

$$z^\mu = r^\mu + \frac{1}{2}\epsilon_{abc} e_a^\nu \frac{\partial e_{b\nu}}{\partial p_\mu} J^{(c)} + \frac{i}{m}\sum \xi_i^{(0)} \xi_i^{(a)} e_a^\mu, \tag{29}$$

где

$$J^{(a)} = L^{(a)} + \sum S_i^{(a)}, \qquad S_i^{(a)} = \epsilon_{abc} \xi_i^{(b)} \xi_i^{(c)}/2i. \tag{30}$$

При этом координата q выражается через введенные переменные

$$q = \epsilon_{abc} k^{(a)} L^{(b)} e_c. \tag{31}$$

Для величин с индексом (a) будем использовать обозначения трехмерных векторов.

Введенные переменные не являются полностью независимыми:

$$\vec{k}^2 = 1, \quad \vec{k}\vec{L} = 0. \tag{32}$$

Эта зависимость легко учитывается введением сферической системы координат.

Гамильтониан нашей системы есть (оставшаяся после наложения условий (26)) ее функция связи [9]

$$H = b(\sqrt{\vec{J}^2} - K(l(m)) + i\sum(\frac{1}{m_i}g_{\alpha\alpha}p_i^{(\alpha)}\xi_i^{(\alpha)} - \xi_i^{(5)})\lambda_i), \tag{33}$$

где b произвольно (и связано с выбором τ) и

$$K(l) = lG_l(l) - G(l). \tag{34}$$

Величина l здесь и в дальнейшем является функцией массы мезона, определяемой равенством

$$G_l(l) = m, \tag{35}$$

где слева стоит производная по l функции G (16), (17). Величины

$$p_i^{(0)} = m_i F_{i0}(l(m)), \quad p_i^{(a)} = m_i F_{i1}(l(m))k^{(a)}, \tag{36}$$

где F_{i0} и F_{i1} как функции l представлены в (18), (17), являются тетрадными компонентами энергии и импульса кварка и антикварка, т.е. энергией и импульсом кварка и антикварка в системе покоя мезона. Их скорости при этом равны

$$v_i = l_i(m)/l(m). \tag{37}$$

Соотношение (35) при этом можно переписать в виде

$$m = E_0 + p_1^{(0)} + p_2^{(0)}, \tag{38}$$

где

$$E_0 = al\int_{-l_1}^{l_2}(l^2 - y^2)^{-1/2}dy \tag{39}$$

есть вклад струны в массу мезона (при $l = l(m)$).

Уравнения движения нашей системы имеют вид

$$\dot{Z} = \partial Z/\partial\tau + \{Z, H\}, \tag{40}$$

где Z — любая из динамических переменных. При этом ненулевые скобки Пуассона имеют вид

$$\{p^\mu, z^\nu\} = g^{\mu\nu} \tag{41}$$

$$\{L^{(a)}, L^{(b)}\} = \epsilon_{abc}L^{(c)}, \quad \{L^{(a)}, k^{(b)}\} = \epsilon_{abc}k^{(c)} \tag{42}$$

$$\{\xi_i^{(M)}, \xi_i^{(N)}\} = ig^{MN}, \tag{43}$$

(g^{MN} диагональна, $g^{55} = -1$). Варьирование гамильтониана по b и λ_i приводит к связям

$$\phi_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \tag{44}$$

где

$$\phi_i = p_i \xi_i - m_i \xi_i^{(5)}, \quad i = 1, 2, \tag{45}$$

$$\phi_3 = \sqrt{\vec{J}^2} - K(l(m)). \tag{46}$$

Условия (44) следует использовать после того, как вычислены скобки в (40). Им должны удовлетворять и начальные условия. Для непротиворечивости системы необходимо, чтобы функции (45),(46) сохранялись, т.е. имели нулевые скобки Пуассона с гамильтонианом (33). Нетрудно проверить, что это действительно имеет место. Существенно, что в H и ϕ_3 входит полный спин $\vec{J}$, имеющий нулевую скобку Пуассона с $\vec{\xi}_i \vec{k}$ и другими переменными в $\phi_{1,2}$. Это обстоятельство обеспечено введением $\mathcal{L}_{\text{вз}}$ в исходный лагранжиан. Без этого члена в ϕ_3 входили бы компоненты орбитального спина и скобки ϕ_3 с $\phi_{1,2}$ были бы отличны от нуля.

2. Квантовая модель

Для канонического квантования модели нужно заменить независимые переменные на операторы, скобки Пуассона — на коммутаторы для коммутирующих и антикоммутаторы для некоммутирующих переменных, и наложить операторные связи на волновые функции:

$$[p^\mu, z^\nu]_- = i g^{\mu\nu}, \tag{47}$$

$$[L^{(a)}, L^{(b)}]_- = i\epsilon_{abc} L^{(c)}, \quad [L^{(a)}, k^{(b)}]_- = i\epsilon_{abc} k^{(c)}, \tag{48}$$

$$[\xi_i^{(M)}, \xi^{(N)}]_+ = -g^{MN} \tag{49}$$

(остальные коммутаторы равны нулю),

$$\phi_i \Psi = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{50}$$

Квантовая теория релятивистски-инвариантна, так как операторы импульса и углового момента (22) удовлетворяют алгебре Пуанкаре.

Выберем представление, в котором p^μ и $k^{(a)}$ диагональны. Операторы ξ, удовлетворяющие (49), выражаются через матрицы Дирака [8]. Для антикварков эти матрицы удобно использовать в зарядово-сопряженном представлении. Будем считать антикварком вторую частицу. Тогда

$$\xi_1^{(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^5 \gamma^\mu \otimes I, \quad \xi_1^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^5 \otimes I, \tag{51}$$

$$\xi_2^{(\mu)} = \xi_1^{(\mu)c} = I \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^{5c} \gamma^{\mu c}, \quad \xi_2^{(5)} = \xi_1^{(5)c} = I \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^{5c}, \tag{52}$$

где индекс c обозначает зарядовое сопряжение, которое для матрицы

$$O = O_1 \otimes O_2 \tag{53}$$

определяется формулами

$$O^c = O_2^c \otimes O_1^c, \quad O_i^c = CO_iC^{-1}, \tag{54}$$

где C — матрица зарядового сопряжения.

Волновая функция $\Psi_{\alpha\beta}(\vec{k})$ является биспинором. Опустим в ней δ-функцию, описывающую движение мезона как целого, и будем использовать для нее матричную запись, когда транспонированные γ-матрицы второй частицы действуют на нее справа. Тогда первые два уравнения (50) имеют вид

$$(\hat{p}_1 - m_1)\Psi = 0, \qquad \Psi(\hat{p}_2 + m_2) = 0, \tag{55}$$

где $\hat{p}_i = g_{\alpha\alpha} p_i^{(\alpha)} \gamma^\alpha$ и компоненты импульсов кварков как функции m, m_1, m_2 и $\vec{k}$ даются формулами (36). Третье уравнение (50), связывающее массу мезона с его спином, рассмотрим в следующем разделе. Нормированное условием

$$\int Sp \Psi^\dagger \Psi d\vec{k} = 1 \tag{56}$$

решение уравнений (55) имеет вид

$$\Psi = N \begin{pmatrix} -b_2 \varphi \vec{\sigma}\vec{k} & \varphi \\ b_1 b_2 \vec{\sigma}\vec{k}\varphi\vec{\sigma}\vec{k} & -b_1 \vec{\sigma}\vec{k}\varphi \end{pmatrix}, \tag{57}$$

где φ — двумерная матрица, нормированная аналогично (56),

$$b_i = l_i/(l + \sqrt{\nu_i l_i}), \quad N = ((1+b_1^2)(1+b_2^2))^{-1/2}. \tag{58}$$

Для легкого кварка $b_i \simeq 1$, для тяжелого $b_i \simeq 0$. Оператор полного спина мезона (30) имеет вид

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma} \otimes I + I \otimes \frac{1}{2}\vec{\Sigma}^c, \tag{59}$$

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \vec{\Sigma}^c = \begin{pmatrix} \sigma_2\vec{\sigma}\sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2\vec{\sigma}\sigma_2 \end{pmatrix} = -\vec{\Sigma}^*. \tag{60}$$

Выберем в качестве $\varphi = \varphi_{jMlS}$ собственные функции $\vec{j}^2, j^{(3)}, \vec{L}^2, \vec{s}^2$, где малыми буквами обозначены двумерные блоки (59), (60). Для каждого $j \neq 0$ имеем 4 независимые функции φ_{jMlS} и, соответственно, Ψ_{jMlS}. При этом Ψ_{jMlS} являются собственными функциями $\vec{J}^2$ и $J^{(3)}$ с собственными значениями $j(j+1)$ и M. Введем для них обозначения:

$$\Psi_0 = \Psi_{jMj0}, \ \ \Psi_1 = \Psi_{jMj1}, \ \ \Psi_\pm = \Psi_{jM,j\pm1,1}. \tag{61}$$

Удобно также использовать вместо $\Psi_\pm$ их линейные комбинации

$$\Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2j+1}}\left(\sqrt{j+1}\Psi_- + \sqrt{j}\Psi_+\right), \tag{62}$$

$$\Psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \left(\sqrt{j}\Psi_- - \sqrt{j+1}\Psi_+ \right). \qquad (63)$$

Формулы (61)–(63) будем использовать и для φ. Используя свойства сферических функций, можно показать, что

$$\Psi_{0,3} = \begin{pmatrix} -b_2\varphi_{3,0} & \varphi_{0,3} \\ b_1 b_2 \varphi_{0,3} & -b_1\varphi_{3,0} \end{pmatrix}, \quad \Psi_{1,2} = \begin{pmatrix} -b_2\varphi_{2,1} & \varphi_{1,2} \\ -b_1 b_2 \varphi_{1,2} & b_1\varphi_{2,1} \end{pmatrix}. \qquad (64)$$

Пространственная четность этих функций

$$P\Psi(\vec{k}) = \gamma^0 \Psi(-\vec{k})\gamma^0 \qquad (65)$$

равна

$$P\Psi_{jMlS} = -(-1)^l \Psi_{jMlS}, \;\; P\Psi_{0,1} = -(-1)^j \Psi_{0,1}, \;\; P\Psi_{2,3} = (-1)^j \Psi_{2,3}. \qquad (66)$$

Зарядово-сопряженная волновая функция

$$\Psi^c(\vec{k}) = C\Psi^T(-\vec{k})C^T \qquad (67)$$

при $m_1 = m_2$ удовлетворяет уравнениям Дирака (55), при этом

$$\Psi^c_{jMlS} = (-1)^{l+S}\Psi_{jMlS}, \;\; \Psi^c_{0,2,3} = (-1)^j \Psi_{0,2,3}, \;\; \Psi^c_1 = -(-1)^j \Psi_1. \qquad (68)$$

Скорость легких кварков в мезонах близка к 1 (скорости света). Эти мезоны нельзя описывать с помощью сохраняющихся орбитального момента и кваркового спина. Зная волновые функции $\Psi_n \quad (n = 0, 1, 2, 3, +, -)$, можно вычислить средние значения орбитального момента и спинов кварков в поляризованных мезонах. Соответствующие формулы приведены в приложении.

В табл. 1 и 2 представлена спиновая структура некоторых мезонов, полученная с помощью этих формул. $\pi^+(u\bar{d})$- и $K^+(u\bar{s})$-мезоны описываются волновыми функциями Ψ_0 при $j = 0$, $\rho^+(u\bar{d})$ и $K^{\star +}(u\bar{s})$ — функциями Ψ_- при $j = 1$. В таблицах приведены значения средних проекций спинов кварка $S_1^{(3)}$ и антикварка $S_2^{(3)}$, их суммы $S^{(3)}$ и проекции орбитального момента $L^{(3)}$, отнесенных к проекции спина мезона $J^{(3)} = M$, а также средние значения скалярных произведений векторов орбитального и кваркового спинов. Сравниваются три случая: нерелятивистский предел, когда скорости кварков равны 0 (сумма их масс равна массе мезона), реальный случай, соответствующий реальным токовым массам кварков, найденным в следующем разделе с помощью спектрального условия, и ультрарелятивистский предел, когда скорости кварков равны 1 (их массы равны 0).

Спиновая структура мезонов, состоящих из легких кварков, существенно отличается от нерелятивистской. Так, среднее значение проекции полного спина кварков в поляризованных ρ- и $K^\star$-мезонах примерно вдвое меньше нерелятивистского значения.

Таблица 1. Спиновая структура некоторых мезонов. Представлены средние значения спиновых величин в состояниях поляризованных мезонов с третьей проекцией полного спина $J^{(3)} = M$. ([нр] — нерелятивистский предел (скорость кварка равна 0), [р] — реальный случай, [ур] — ультрарелятивистский предел (скорость кварка равна 1).

<table>
<tr><th></th><th colspan="3">$\overline{S_1^{(3)}}/M$</th><th colspan="3">$\overline{S_2^{(2)}}/M$</th><th colspan="3">$\overline{S^{(3)}}/M$</th><th colspan="3">$\overline{L^{(3)}}/M$</th></tr>
<tr><th></th><th>[нр]</th><th>[р]</th><th>[ур]</th><th>[нр]</th><th>[р]</th><th>[ур]</th><th>[нр]</th><th>[р]</th><th>[ур]</th><th>[нр]</th><th>[р]</th><th>[ур]</th></tr>
<tr><td>$\rho^+, u\bar{d}$</td><td rowspan="2">1/2</td><td>0,22</td><td rowspan="2">1/6</td><td rowspan="2">1/2</td><td>0,23</td><td rowspan="2">1/6</td><td rowspan="2">1</td><td>0,45</td><td rowspan="2">1/3</td><td rowspan="2">0</td><td>0,55</td><td rowspan="2">2/3</td></tr>
<tr><td>$K^{*+}, u\bar{s}$</td><td>0,22</td><td>0,42</td><td>0,63</td><td>0,37</td></tr>
</table>

Таблица 2. Продолжение табл.1. Средние значения не зависят от поляризации мезона.

<table>
<tr><th></th><th colspan="3">$\overline{\vec{S}^2}$</th><th colspan="3">$\overline{\vec{L}^2}$</th><th colspan="3">$\overline{\vec{S}\vec{L}}$</th></tr>
<tr><th></th><th>[нр]</th><th>[р]</th><th>[ур]</th><th>[нр]</th><th>[р]</th><th>[ур]</th><th>[нр]</th><th>[р]</th><th>[ур]</th></tr>
<tr><td>$\pi^+, u\bar{d}$</td><td rowspan="2">0</td><td>0,83</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">0</td><td>0,83</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">0</td><td>-0,83</td><td rowspan="2">-1</td></tr>
<tr><td>$K^+, u\bar{s}$</td><td>0,79</td><td>0,79</td><td>-0.79</td></tr>
<tr><td>$\rho^+, u\bar{d}$</td><td rowspan="2">2</td><td>1,68</td><td rowspan="2">5/3</td><td rowspan="2">0</td><td>1,87</td><td rowspan="2">7/3</td><td rowspan="2">0</td><td>-0,77</td><td rowspan="2">-1</td></tr>
<tr><td>$K^{*+}, u\bar{s}$</td><td>1,70</td><td>1,17</td><td>-0,43</td></tr>
</table>

Легкие релятивистские кварки всегда приводят к ненулевому среднему значению квадрата орбитального момента, минимальная величина которого для пионной траектории близка к 1.

Спиновая структура мезонов отличается и от ультрарелятивистского предела, когда пренебрегают массами легких кварков. Это связано с тем, что в поляризационные формулы токовые массы кварков входят в степени 1/2 и дают заметный вклад. В этом отличие поляризационных формул от спектрального условия, в которое массы легких кварков входят в степени 3/2. Измерение поляризационной структуры, в принципе, позволило бы непосредственно определить массы легких кварков.

Мы видим также, что для описания спиновой структуры мезонов с ненулевым спином нельзя пользоваться $SU(3)$-симметрией ароматов. Так, среднее значение проекции спина $\bar{s}$-кварка в $K^{\star+}$-мезоне почти в два раза больше проекции спина $\bar{d}$-кварка в ρ^+-мезоне, средние значения квадратов орбитальных моментов в этих мезонах отличаются более чем на 50% и т.д. Это связано с упомянутой выше корневой зависимостью спиновых эффектов от массы странного кварка.

Нет сомнения, что эти общие релятивистские свойства поляризационных эффектов проявляются и в нуклонах и должны учитываться при анализе так называемого спинового кризиса.

3. Сравнение с экспериментом

Рассмотрим теперь третье уравнение (50). Классическое приближение для ϕ_3 дается формулой (46). В квантовом случае мы учтем в нем также неструнный вклад, происходящий от взаимодействий на малых расстояниях, и запишем это уравнение в виде

$$(\sqrt{\vec{J}^2} - K - \sum_n a_n P_n)\Psi = 0, \tag{69}$$

где P_n — проектор на состояние Ψ_n:

$$P_n \Psi_m = \delta_{mn} \Psi_n, \tag{70}$$

и a_n — феноменологический параметр, зависящий от масс кварков и, вообще говоря, от j (или от m, эти величины связаны уравнением (69)).

Конкретный вид операторов P_n для нас здесь не существенен (он рассмотрен в [3]). Важно лишь, что поскольку при $j \neq 0$ существуют 4 независимых решения уравнений Дирака (55), то существуют 4 независимых оператора, коммутирующих с операторами Дирака, из которых и строятся проекторы P_n. Они должны сохранять пространственную и (для $m_1 = m_2$) зарядовую четности. Их выбор эквивалентен выбору состояний Ψ_n. Будем считать, что мезоны с определенной C-четностью (а также мезоны из легких кварков благодаря сохранению изотопического спина) описываются функциями $\Psi_{0,1,\pm}$, а мезоны, у которых нет C- или G-четности, — функциями $\Psi_\pm$ (они далеки друг от друга по массе и, по-видимому, не смешиваются) и смесью функций Ψ_0 и Ψ_1 (при $j = 0$ есть только одно состояние Ψ_0).

Что же касается параметров a_n, то предположение о том, что они происходят от взаимодействий на малых расстояниях, практически фиксирует их зависимость от j: они не могут возрастать с ростом j. Сравнение с экспериментом показывает, что a_n можно считать не зависящими от спина во всех случаях, кроме траектории Ψ_- для тяжелых кварков и антикварков. В этом случае в соответствии с экспериментом выберем

$$a_- = A + \left(\frac{16 m_1 m_2}{(m_1 + m_2) m (4\vec{J}^2 + 1)} \right)^2 B, \tag{71}$$

где A и B не зависят от J. Вклад второго члена в этой формуле значительно меньше первого.

Таким образом, для каждого состояния Ψ_n мы получаем свою реджевскую траекторию

$$\sqrt{j(j+1)} = K(l(m)) + a_n. \tag{72}$$

Для странных, очарованных и прелестных мезонов при $n = 0$ эта формула сохраняется для $j = 0$, а для $j \neq 0$ параметр a_0 заменяется на $a_0 - d$, где d — параметр смешивания; при $n = 1$ параметр a_1 заменяется на $a_1 + d$. Мезоны при этом описываются волновыми функциями

$$\Phi_0 = \cos\alpha\Psi_0 + \sin\alpha\Psi_1, \tag{73}$$

$$\Phi_1 = -\sin\alpha\Psi_0 + \cos\alpha\Psi_1, \tag{74}$$

где

$$d = -b\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}(a_0 - a_1 \pm \sqrt{(a_0-a_1)^2 + 4b^2}), \tag{75}$$

и верхний знак выбирается при отрицательном и нижний — при положительном $a_0 - a_1$.

Траектория (72) определяется функцией K и феноменологическим параметром (параметрами) a_n. Функция $K = K(m, a, m_1, m_2)$ зависит от массы мезона и основных параметров модели. Она определяется формулами (34), (16)–(17), которые можно переписать в виде

$$K = \frac{1}{2a}(xm - \sum m_i^2 t_i), \tag{76}$$

$$m = x\sum(\mathrm{arctg}t_i + t_i^{-1}), \tag{77}$$

$$t_i = [(x^2/m_i^2 + 1/4)^{1/2} - 1/2]^{1/2}, \tag{78}$$

и мы обозначили $x = al$.

Для малых масс кварков $m_i << m$

$$K = \frac{m^2}{2\pi a}\left(1 - \frac{4}{3\pi}\sum\left(\frac{\pi m_i}{m}\right)^{3/2} + O\left(\left(\frac{\pi m_i}{m}\right)^{5/2}\right)\right). \tag{79}$$

Для тяжелых кварков, когда $D = m - m_1 - m_2 << m_i$

$$K = \frac{1}{a}\left(\frac{2}{3}D\right)^{3/2}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)^{1/2}\left(1 + O\left(\frac{D}{m_i}\right)\right). \tag{80}$$

Как видно из (79), массы легких кварков дают очень малый вклад в спектральное условие (72) и не могут быть из него определены. Поэтому для их определения воспользуемся формулами линейного приближения киральной $SU(3)$-модели [6,7]

$$m_u/m_d = 0,55, \quad m_s/m_d = 20,1, \tag{81}$$

которые выражают массы легких кварков через массу странного кварка, определяемую с помощью данной модели.

Значения масс мезонов, вычисленные из (72), и параметры модели, собраны в табл. 3, 4, 5.

Наибольшее число известных мезонов [10] находятся в состояниях Ψ_-, где легчайшими являются векторные мезоны (табл. 3). Они позволяют определить основные параметры модели — массы кварков и натяжение струны.

Для определения массы b-кварка с помощью формулы (71) данных недостаточно. Можно опустить второй член в этой формуле и найти m_b и другие параметры с помощью метода минимума χ^2 [3] (при этом $a_- = A$ не зависит от масс кварков). С другой стороны, можно сделать гипотезу

$$A(u\bar{b}) = A(b\bar{b}), \tag{82}$$

которая экспериментально выполняется для c-кварка

$$A(u\bar{c}) = A(c\bar{c}), \tag{83}$$

и вычислить m_b из экспериментальных масс мезонов. Тогда ошибкой в m_b следует считать ошибку модели, которая не учитывает взаимодействий мезонов и возможного сдвига их масс вследствие этих взаимодействий. В работе [1] эта ошибка оценена в 10 МэВ. Оказывается, что если для m_b удвоить эту ошибку, то результаты обоих вычислений m_b — как средние значения, так и ошибки — практически совпадут (в работе [3] для m_b получено (4710 ± 26) МэВ).

Из табл. 3, в частности, видно, что мезоны с высокими спинами, обнаруженные группой ГАМС [11-16], хорошо описываются моделью.

Предсказание для $b\bar{c}, 1^-$-мезона сделано при простейшем предположении о $a_-(b\bar{c})$. Другие предположения ($a_-(b\bar{c}) = a_-(b\bar{b})$ или $a_-(b\bar{c}) = a_-(c\bar{c})$) дают его массу на 100 МэВ ниже. Мезоны с более высокими спинами практически не зависят от этих предположений.

В табл. 4 собраны массы мезонов в состояниях $\Psi_{0,1}(\Phi_{0,1})$, где низшими являются псевдоскалярные и псевдовекторные мезоны. Данные о партнерах псевдовекторных мезонов отсутствуют, поэтому для состояний без смешивания рассмотрим гипотезу

$$a_1 = a_0. \tag{84}$$

Она хорошо выполняется экспериментально для легких, s- и c-кварков. Если она выполняется и для b-кварков, то, зная массу $\chi_{b1}(1P)$, можно вычислить массу еще не обнаруженного псевдоскалярного $b\bar{b}$-мезона, $\eta_b(1S), 0^{-+}$. Она оказывается равной 9,50 ГэВ, что на 0,10 ГэВ больше, чем в потенциальной модели [1], и выше, чем масса $\Upsilon(1S)$.

Если воспользоваться константой $a_0(b\bar{b})$, найденной из (84), и с помощью линейной экстраполяции между константами $a_0(b\bar{u})$ и $a_0(b\bar{b})$ найти константу $a_0(b\bar{c})$, то можно предсказать массу псевдоскалярного B_c-мезона. Она оказывается равной 6,40 ГэВ, что на 0,13 ГэВ выше, чем в потенциальной модели [1].

Мы учитываем смешивание только для странных мезонов и пренебрегаем им для очарованных и прелестных мезонов. Угол смешивания для странных мезонов в формулах (73)–(75) равен 36°.

Наконец, табл. 5 содержит массы мезонов в состояниях Ψ_+, где низшими являются скалярные частицы. Из нее, в частности, видно, что обнаруженный группами ГАМС [11,12] и ВЕС [17] в ИФВЭ мезон $X(1920)$ вполне мог бы быть партнером скалярного мезона $a_0(980)$.

Таблица 3. Массы мезонов (в МэВ) в состояниях Ψ_- и их параметры ([к] — кварковый состав, $x = al$ — аргумент в формулах для массы и спина, m — предсказание модели для массы, $m_Э$ — экспериментальная масса (из [10], если нет ссылки), $m_П$ — предсказание потенциальной модели [1], [н] — название мезона.)

[k]	j^{PC}	x	m	$m_Э$	$m_П$	[н]
$d\bar{u}$	1^{--}	0,2450	771	$768,5 \pm 0,6$	770	$\rho(770)$
				$781,94 \pm 0,12$	780	$\omega(782)$
	2^{++}	0,4196	1319	$1318,1 \pm 0,7$	1310	$a_2(1320)$
				1275 ± 5		$f_2(1270)$
	3^{--}	0,5383	1692	1691 ± 5	1680	$\rho_3(1690)$
				1667 ± 4		$\omega_3(1670)$
	4^{++}	0,6346	1994	2060 ± 20[11,12]	2010	h/f_4 (2050)
				2010 ± 20[13]		$a_4(2040)$
	5^{--}	0,7179	2256	2330 ± 35[14,15]	2300	$\rho_5(2350)$
	6^{++}	0,7924	2490	2510 ± 30[16]		$r/f_6(2510)$
	7^{--}	0,8603	2703			
$s\bar{u}$	1^{-}	0,2600	893	$891,59 \pm 0,24$	900	$K^*(892)^{\pm}$
				$896,10 \pm 0,28$		$K^*(892)^0$
	2^{+}	0,4331	1418	$1425,4 \pm 1,3$	1430	$K_2^*(1430)^{\pm}$
				$1432,4 \pm 1,3$		$K_2^*(1430)^0$
	3^{-}	0,5509	1781	1770 ± 10	1790	$K_3^*(1780)$
	4^{+}	0,6465	2077	2045 ± 9	2110	$K_4^*(2045)$
	5^{-}	0,7293	2334			
$s\bar{s}$	1^{--}	0,2758	1013	$1019,413 \pm 0,008$	1020	$\phi(1020)$
	2^{++}	0,4469	1516	1525 ± 5	1530	$f_2'(1525)$
	3^{--}	0,5636	1870	1854 ± 7	1900	$\phi_3(1850)$
	4^{++}	0,6586	2160		2200	
	5^{--}	0,7408	2413		2470	
	6^{++}	0,8145	2640			
$c\bar{u}$	1^{-}	0,3031	2008	$2010,0 \pm 0,5$	2040	$D^*(2010)^{\pm}$
				$2006,7 \pm 0,5$		$D^*(2007)^0$
	2^{+}	0,4996	2460	$2458,9 \pm 2,0$	2500	$D_2^*(2460)^0$
				2459 ± 4		$D_2^*(2460)^{\pm}$
	3^{-}	0,6264	2777		2830	
	4^{+}	0,7269	3039		3110	
	5^{-}	0,8127	3269			
$c\bar{s}$	1^{-}	0,3244	2121	$2112,4 \pm 0,7$	2130	$D_s^{*\pm}, ?(?^?)$
	2^{+}	0,5163	2553	$2573,5 \pm 1,7$	2590	$D_{sJ}(2573)^{\pm}, ?(?^?)$
	3^{-}	0,6411	2861		2920	
	4^{+}	0,7405	3118		3190	
	5^{-}	0,8255	3344			

$c\bar{c}$	1^{--}	0,3309	3097	$3096,88 \pm 0,04$	3100	$J/\psi(1S)$
	2^{++}	0,6116	3557	$3556,17 \pm 0,13$	3550	$\chi_{c2}(1P)$
	3^{--}	0,7412	3825		3850	
	4^{++}	0,8415	4050		4090	
	5^{--}	0,9267	4250			
$b\bar{u}$	1^{-}	0,3629	5327	$5324,8 \pm 1,8$	5370	B^*
	2^{+}	0,5717	5716		5800	
	3^{-}	0,7131	5994		6110	
	4^{+}	0,8262	6224		6360	
	5^{-}	0,9228	6426			
$b\bar{s}$	1^{-}	0,3875	5432		5450	
	2^{+}	0,5920	5803		5880	
	3^{-}	0,7311	6073		6180	
	4^{+}	0,8427	6298		6430	
	5^{-}	0,9383	6497			
$b\bar{c}$	1^{-}	0,5169	6489		6340	
	2^{+}	0,7292	6780		6770	
	3^{-}	0,8681	7003		7040	
	4^{+}	0,9781	7195		7270	
	5^{-}	1,0717	7368			
	1^{--}	0,2274	9463	$9460,37 \pm 0,21$	9460	$\Upsilon(1S)$
$b\bar{b}$	2^{++}	0,8850	9912	$9913,2 \pm 0,6$	9900	$\chi_{b2}(1P)$
	3^{--}	1,0544	10106		10160	
	4^{++}	1,1791	10267		10360	
	5^{--}	1,2829	10411			

$a = 0,176 \pm 0,002$ ГэВ^2,

$m_s = 224 \pm 7,\ m_c = 1440 \pm 10,\ m_b = 4715 \pm 20,$

$m_u = 6,2 \pm 0,2,\ m_d = 11,1 \pm 0,4,$

$a_-(d\bar{u}) = a_-(s\bar{u}) = a_-(s\bar{s}) = 0,88 \pm 0,01,$

$a_-(c\bar{u}) = a_-(c\bar{s}) = A(c\bar{c}) = 0,90,\ B(c\bar{c}) = 1,43,$

$a_-(b\bar{u}) = a_-(b\bar{s}) = a_-(b\bar{c}) = A(b\bar{b}) = 0,77,\ B(b\bar{b}) = 3,14,$

Таблица 4. Массы мезонов в состояниях Ψ_0 и Ψ_1 (или Φ_0 и Φ_1 для мезонов, не имеющих зарядовой четности). Обозначения те же, что в табл. 3.

[k]	j^{PC}	x	m	$m_{э}$	$m_{П}$	[н]
$d\bar{u}$	0^{-+}	0,04311	138	$139,56995 \pm 0,00035$ $134,9764 \pm 0,0006$	150	$\pi^{\pm}$ π^0
	1^{+-}	0,4006	1259	1231 ± 10 1170 ± 20	1220	$b_1(1235)$ $h_1(1170)$
	1^{++}			1230 ± 40 $1282 \pm 0,7$	1240	$a_1(1260)$ $f_1(1285)$
	2^{-+}	0,5258	1653	1670 ± 20	1680	$\pi_2(1670)$
	2^{--}				1700	
	3^{+-}	0,6247	1963		2030	
	3^{++}				2050	
	4^{-+}	0,7093	2229		2330	
	4^{--}				2340	
	$5^{+\mp}$	0,7847	2466			
$s\bar{s}$	0^{-+}	0,09231	548	$547,45 \pm 0,19$	520	η
	1^{+-}	0,4307	1468		1470	
	1^{++}			$1426,8 \pm 2,3$ 1512 ± 4	1480	$f_1(1420)$ $f_1(1510)$
	2^{-+}	0,5532	1838		1890	
	2^{--}				1910	
	3^{+-}	0,6503	2135		2220	
	3^{++}				2230	
	4^{-+}	0,7338	2391		2510	
	4^{--}				2520	
	$5^{+\mp}$	0,8082	2621			
$c\bar{c}$	0^{-+}	0,2219	2980	$2979,8 \pm 2,1$	2970	$\eta_c(1S)$
	1^{+-}	0,6075	3548		3520	
	1^{++}			$3510,53 \pm 0,12$	3510	$\chi_{c1}(1P)$
	$2^{-\pm}$	0,7385	3819		3840	
	3^{+-}	0,8395	4045		4090	
	3^{++}				4100	
	$4^{-\pm}$	0,9250	4246			
	0^{-+}	0,3361	9501		9400	
$b\bar{b}$	1^{+-}	0,8655	9892		9880	
	1^{++}			$9891,9 \pm 0,7$		$\chi_{b1}(1P)$
	$2^{-\pm}$	1,0357	10083		10150	
	$3^{+\mp}$	1,1633	10245		10350	
	$4^{-\pm}$	1,2690	10390			

$s\bar{u}$	0^-	0,1209	494	$493,677 \pm 0,016$ $497,672 \pm 0,031$	470	$K^\pm$ K^0
	1^+	0,4390	1436	1402 ± 7	1380	$K_1(1400)$
		0,3978	1310	1273 ± 7	1340	$K_1(1270)$
	2^-	0,5576	1802	1816 ± 13	1810	$K_2(1820)$
		0,5261	1704	1773 ± 8	1780	$K_2(1770)$
	3^+	0,6528	2097		2150	
		0,6262	2014		2120	
	4^-	0,7351	2352		2440	
		0,7116	2279		2410	
	5^+	0,8087	2582			
		0,7875	2516			
$c\bar{u}$	0^-	0,2366	1869	$1869,3 \pm 0,5$ $1864,5 \pm 0,5$	1880	$D^\pm$ D^0
	1^+	0,5228	2516		2490	
	2^-	0,6465	2828			
$c\bar{s}$	0^-	0,2491	1972	$1968,5 \pm 0,6$	1980	$D_s^\pm$
	1^+	0,5350	2598		2570	
	2^-	0,6576	2903			
$b\bar{u}$	0^-	0,3364	5279	$5278,9 \pm 1,8$ $5279,2 \pm 1,8$	5310	$B^\pm$ B^0
	1^+	0,6153	5800			
	2^-	0,7495	6067			
$b\bar{s}$	0^-	0,3501	5368	$5369,3 \pm 2$	5390	B_s^0
	1^+	0,6290	5873			
	2^-	0,7624	6135			
$b\bar{c}$	0^-	0,4411	6403		6270	
	1^+	0,7516	6814			
	2^-	0,8876	7036			

$$a_0(d\bar{u}) = a_1(d\bar{u}) = -0,016,\ a_0(s\bar{s}) = a_1(s\bar{s}) = -0,034,$$
$$a_0(c\bar{c}) = a_1(c\bar{c}) = -0,084,\ a_0(b\bar{b}) = a_1(b\bar{b}) = -0,091,$$
$$a_0(s\bar{u}) = -0,10,\ \ a_1(s\bar{u}) = 0,\ d(s\bar{u}) = 0,10$$
$$a_0(c\bar{u}) = a_1(c\bar{u}) = -0,30,\ a_0(c\bar{s}) = a_1(c\bar{s}) = -0,27,$$
$$a_0(b\bar{u}) = a_1(b\bar{u}) = -0,55,\ a_0(b\bar{s}) = a_1(b\bar{s}) = -0,51,$$
$$a_0(b\bar{c}) = -0,41\ \ (\text{линейная экстраполяция } a_0(b\bar{u}) \text{ и } a_0(b\bar{b})),$$
$$d(c\bar{u}) = d(c\bar{s}) = d(b\bar{u}) = d(b\bar{s}) = d(b\bar{c}) = 0$$

Таблица 5. Массы мезонов в состояниях Ψ_+. Обозначения те же, что в Табл. 3.

[k]	j^{PC}	x	m	$m_Э$	$m_П$	[н]
$d\bar{u}$	0^{++}	0,3143	988	$983,5 \pm 0,9$	1090	$a_0(980)$
	1^{--}	0,5073	1594	1700 ± 20 1649 ± 24	1660	$\rho(1700)$ $\omega(1600)$
	2^{++}	0,6110	1920	$1924 \pm 14[11, 12, 17]$	2050	$X(1920)$
	3^{--}	0,6979	2193		2370	
	4^{++}	0,7746	2434			
$s\bar{u}$	0^{+}	(I) 0,4358 (II) 0,3493	(I) 1426 (II)1162	1429 ± 6	1240	$K_0^*(1430)$
	1^{-}	(I) 0,5927 (II) 0,5330	(I) 1910 (II)1726	1714 ± 20	1780	$K^*(1680)$
	2^{+}	(I) 0,6846 (II) 0,6339	(I) 2196 (II) 2038		2150	
	3^{-}	(I) 0,7639 (II) 0,7189	(I) 2442 (II) 2302		2460	
	4^{+}	(I) 0,8352 (II) 0,7943	(I) 2664 (II) 2537			
$s\bar{s}$	0^{++}	0,2726	1004	980 ± 10	1360	$f_0(980)$
	1^{--}	0,4922	1653	1680 ± 20	1880	$\varphi(1680)$
	2^{++}	0,6018	1986	2011^{+60}_{-80}	2440	$f_2(2010)$
	3^{--}	0,6918	2262		2540	
	4^{++}	0,7701	2505			
$c\bar{c}$	0^{++}	0,5357	3414	$3415,1 \pm 1,0$	3440	$\chi_{c0}(1P)$
	1^{--}	0,7319	3805	$3769,9 \pm 2,5$	3820	$\psi(3770)$
	2^{++}	0,8360	4037		4090	
	3^{--}	0,9224	4240			
	0^{++}	0,8340	9860	$9859,8 \pm 1,3$	9850	$\chi_{b0}(1P)$
$b\bar{b}$	1^{--}	1,0663	10121		10140	
	2^{++}	1,1905	10282	$10268,5 \pm 0,4$	10350	$\chi_{b2}(2P)$
	3^{--}	1,2930	10426			

$a_+(d\bar{u}) = -0,88$, (I)$a_+(s\bar{u}) = -1,59$, (II)$a_+(s\bar{u}) = -1,0$,
$a_+(s\bar{s}) = -0,52$, $a_+(c\bar{c}) = -1,06$, $a_+(b\bar{b}) = -1,35$

Массы странных мезонов $K_0^\star(1430), 0^+$ и $K^\star(1680), 1^-$ не лежат на одной реджевской траектории. Смешивание с мезонами Ψ_- или с $K^\star(1410), 1^-$ не исправляет положения. Так как зависимость $a_+(d\bar{u})$ от спина кажется очень маловероятной (она не проявляется даже для тяжелых кварков в этих состояниях), то в таблице приведены два варианта траектории: проходящей через $K_0^\star(1430), 0^+$ (I) и проходящей через $K^\star(1680), 1^-$ (II). Впрочем, это очень широкие резонансы, и их массы могут зависеть от условий их наблюдения, а векторный мезон мог бы смешиваться с дочерним состоянием Ψ_-.

В табл. 3–5 приведены также значения x, аргумента в формулах (76)–(78). С его помощью не только легко проверить вычисления масс, но и вычислить все характеристики структуры мезонов. В табл.6 приведены значения величин, характеризующих движение кварков и глюонной струны внутри некоторых мезонов (формулы (37)–(38), они верны и в квантовом случае). Видим, что струна дает 88% массы ρ-мезона, 72% массы пиона и только 0,2% массы $\Upsilon(1S)$ -мезона (22 МэВ). Однако во всех случаях струна дает определяющий вклад в "дефект" массы мезона $D = m - m_1 - m_2$. Струнный вклад быстро растет с ростом спина. Для $\chi_{b2}(1P)$ он составляет 324 МэВ, или 3,3%. Все кварки в мезонах, за исключением b, — релятивистские. Скорость b-кварка близка к $0,1c$.

Таблица 6. Кинематические параметры кварков и глюонной струны внутри покоящихся мезонов: v_i — скорость i-го кварка, E_i — его энергия, E_0 — энергия глюонной струны.

Частица, состав	v_1	v_2	E_1	E_2	E_0
$\rho^+, d\bar{u}$	0,98	0,99	53	39	679
$\pi^+, d\bar{u}$	0,88	0,93	23	16	99
$B^+, b\bar{u}$	0,07	0,99	4727	46	507
$J/\psi(1S), c\bar{c}$	0,22	0,22	1476	1476	146
$\Upsilon(1S), b\bar{b}$	0,05	0,05	4720	4720	22
$\chi_{b2}(1P), b\bar{b}$	0,18	0,18	4795	4795	324

Заключение

Рассмотренная модель согласуется со всеми известными симметриями теории. В киральном пределе (при малых массах кварков) формулы (72), (79) дают для пиона

$$\frac{m^2}{2\pi a} + a_0(d\bar{u}) + O\left(\left(\frac{m_d}{m}\right)^{3/2}\right) = 0, \qquad (85)$$

и m^2 линейно по массам кварков обращается в нуль, если этим свойством обладает $a_0(d\bar{u})$.

Три известных мезона π, b_1 и π_2 лежат на одной траектории, что подтверждает однотипность их кварковой структуры, описываемой волновой функцией Ψ_0 при $j = 0, 1$ и 2 соответственно. Это оказалось возможным потому, что в выражение для траектории (72) входит релятивистский спин $\sqrt{j(j+1)}$. Если заменить его на j, то эта формула при универсальном наклоне резко разойдется с экспериментом.

Согласие модели с экспериментальным спектром мезонов в целом вполне удовлетворительное (кроме отмеченных в предыдущем разделе $K_0^\star(1430), 0^+$ и $K^\star(1680), 1^-$-мезонов). Оно представляется даже несколько лучшим, чем у потенциальной модели [1]. Измерение масс тяжелых мезонов с точностью лучше 50 МэВ позволило бы систематически различить обе модели.

Близость предсказаний обеих моделей означает, что струнный механизм действительно учитывает два механизма потенциальной модели — потенциал невылетания и составляющие массы кварков.

Сравнение модели с экспериментом показывает, что ряд состояний $f_0(1370)0^+(0^{++})$, $G(1590)$ (или $f_0(1500))0^+(0^{++})$, $f_J(1710)0^+$ (четный $^{++}$), $f_1(1420)0^+(1^{++})$ (или $f_1(1510)0^+(1^{++})$), $f_2(2300)0^+(2^{++})$, $f_2(2340)0^+(2^{++})$, возможно, не являются кварк-антикварковыми, а представляют собой глюболы или $q\bar{q}q\bar{q}$-состояния.

Модель описывает релятивистскую спиновую структуру мезонов, которая существенно отличается от нерелятивистской. Эта структура чувствительна к величине масс легких кварков, и ее экспериментальное исследование представляется перспективным. По-видимому, такой же вывод можно будет сделать и для барионов после построения их релятивистской модели.

Мы не рассматривали дочерние траектории мезонов. Для легких кварков это сделать нетрудно. Важно было бы исследовать высшие моды (колебания) струны с тяжелыми кварками на концах.

Мы видим, что струну можно использовать для описания невылетания токовых кварков.

Важно развить вычислительные методы для описания неструнных эффектов малых расстояний, что позволило бы сократить число феноменологических констант модели.

Автор признателен П.А.Сапонову за помощь при вычислениях и А.М.Зайцеву и В.А.Рубакову за полезные обсуждения.

Приложение

ФОРМУЛЫ СПИНОВОЙ СТРУКТУРЫ

Обозначим

$$c = 2(b_1^2 + b_2^2)N^2, \quad c_1 = 4b_1^2 b_2^2 N^2, \quad c_2 = 2(b_2^2 - b_1^2)N^2, \tag{86}$$

где b_i и N даются формулами (58). В нерелятивистском пределе ($v_i = 0$, $m_1 + m_2 = m$) все эти величины равны 0. В ультрарелятивистском пределе ($v_i = 1$, $m_i = 0$) $c = c_1 = 1$, причем $c_1 = 1$, если хотя бы один кварк в мезоне ультрарелятивистский, и $c_2 = 0$ для равных масс кварка и антикварка. Тогда формулы спиновой структуры мезонов имеют вид

$$(\Psi_{0,3}, S_i^{(3)}\Psi_{0,3}) = 0, \quad (\Psi_{1,2}, S_i^{(3)}\Psi_{1,2}) = \frac{M}{2j(j+1)}, \tag{87}$$

$$(\Psi_-, S_i^{(3)}\Psi_-) = \frac{M}{2}\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{2j+1}(c + c_1 + (-1)^i c_2)\right), \tag{88}$$

$$(\Psi_+, S_i^{(3)}\Psi_+) = \frac{M}{2}\left(-\frac{1}{j+1} + \frac{1}{2j+1}(c + c_1 + (-1)^i c_2)\right), \tag{89}$$

$$\overline{S^{(3)}} = \overline{S_1^{(3)}} + \overline{S_2^{(3)}}, \quad \overline{L^{(3)}} = M - \overline{S^{(3)}}, \tag{90}$$

$$(\Psi_0, \vec{S}^2\Psi_0) = c, \quad (\Psi_{1,2}, \vec{S}^2\Psi_{1,2}) = 2, \quad (\Psi_3, \vec{S}^2\Psi_3) = 2 - c, \tag{91}$$

$$(\Psi_-, \vec{S}^2\Psi_-) = 2 - \frac{j}{2j+1}c, \quad (\Psi_+, \vec{S}^2\Psi_+) = 2 - \frac{j+1}{2j+1}c, \tag{92}$$

$$(\Psi_0, \vec{L}^2\Psi_0) = j(j+1) + c, \quad (\Psi_{1,2}, \vec{L}^2\Psi_{1,2}) = j(j+1), \tag{93}$$

$$(\Psi_3, \vec{L}^2\Psi_3) = j(j+1) + 2 - c, \tag{94}$$

$$(\Psi_-, \vec{L}^2\Psi_-) = j\left(j - 1 + c + \frac{2j+2}{2j+1}c_1\right), \tag{95}$$

$$(\Psi_+, \vec{L}^2\Psi_+) = (j+1)\left(j + 2 - c - \frac{2j}{2j+1}c_1\right), \tag{96}$$

$$\overline{\vec{L}\vec{S}} = \frac{1}{2}(j(j+1) - \overline{\vec{L}^2} - \overline{\vec{S}^2}). \tag{97}$$

Отличные от нуля недиагональные матричные элементы равны

$$(\Psi_2, S_i^{(3)}\Psi_3) = \frac{M}{2\sqrt{j(j+1)}}(1 - \frac{1}{2}(c + c_1 + (-1)^i c_2)), \tag{98}$$

$$(\Psi_+, \vec{S}^2\Psi_-) = \frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}c, \tag{99}$$

$$(\Psi_2, \vec{L}^2\Psi_3) = \sqrt{j(j+1)}(-2 + c + c_1). \tag{100}$$

Список литературы

[1] *Godfrey S. and Isgur N.*// Phys. Rev. 1985, v.D32, p.189.

[2] *Soloviev L.D.* Relativistic quantum model of confinement and the current quark masses. hep-ph/9803483.// Phys.Rev.D, 1 July 1998 (в печати).

[3] *Соловьев Л.Д.* Релятивистская кварковая модель мезонов: препринт ИФВЭ 97-81, Протвино 1997.// ТМФ. 1998, т.116, № 1 (в печати).

[4] *Goddard P., Goldstone J., Rebbi C. and Thorn C.B.*//Nucl.Phys. 1973, v.B56, p.109. *Грин М., Шварц Дж., Виттен Э.* Теория суперструн. — Т.1. М.: Мир, 1990.

[5] *Соловьев Л.Д.* Квантование релятивистского ротатора с массами и спинами: препринт ИФВЭ 96-67. Протвино, 1996.

[6] *Dashen R.* // Phys.Rev. 1969, v.183, p.1291.

[7] *Weinberg S.* // Trans.N.Y.Acad.Sci.1977, v.38, p.185.

[8] *Berezin F.A. and Marinov M.S.* // Ann. of Phys. 1977. v.104, p.336.

[9] *Дирак П.* Лекции по квантовой механике. — М.: Мир, 1968.

[10] Review of Particle Physics. *R.M.Barnett et al.* // Phys.Rev. 1996, v.D54, p.1.

[11] *Alde D. et al.*//Phys. Lett. 1989, v.216B, p.451; Sov.J.Nucl.Phys.1989, v.49, p.1021.

[12] *Alde D. et al.*//Phys.Lett. 1990, v.241B, p.600.

[13] *Алде Д. и др.*//ЯФ. 1996, т.59, с.1027.

[14] *Alde D. et al.*// Zeit. Phys. 1992. v.54, p.553.

[15] *Dover C.B.* Summary Talk on Second Biennial Conference LEAP-92, September Courmayear, Aosta Valey, Italy. 1992, p.14.

[16] *Binon F. et al.* // Lett.Nouvo Cim. 1984. v.39, p.41.

[17] *Beladidze G.M. et al.* // Zeit. Phys. 1992, v.54, p.367.

Рукопись поступила 29 апреля 1998 г.

Л.Д. Соловьев.
Релятивистская модель мезонов с токовыми массами кварков.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы LaTeX.
Редактор Н.В.Ежела. Технический редактор Н.В.Орлова.

Подписано к печати 13.05.98 г. Формат $60 \times 84/8$. Офсетная печать.
Печ.л. 2,7. Уч.-изд.л. 2,2. Тираж 150. Заказ 161. Индекс 3649.
ЛР №020498 17.04.97.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 98–29, И Ф В Э, 1998