ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 98–53
ОЛУ

Г.А. Шулаев

КРИТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ В МОДЕЛИ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ

Протвино 1998

УДК 538.953 М–24

Аннотация

Шулаев Г.А. Критические показатели в модели Гинзбурга–Ландау: Препринт ИФВЭ 98–53. – Протвино, 1998. – 4 с., библиогр.: 4.

В данной работе для модели Гинзбурга–Ландау вычислены критические показатели. Показано, что они не всегда существуют. Отличие классических результатов от представленных является главным результатом этой работы.

Abstract

Shulaev G.A. Critical Indexes for Ginzburg–Landau Model: IHEP Preprint 98–53. – Protvino, 1998. – p. 4, refs.: 4.

Critical indexes for Ginzburg–Landau model were calculated in this paper. Difference between the classical results and represented ones is the main result of this paper.

Проблеме вычисления критических показателей в статистической механике посвящено множество работ. Современное состояние теории таково, что, с одной стороны, есть классическая теория Ландау, или теория среднего поля, а с другой стороны, получили распространение некоторые новые методы, развитые в основном Вильсоном, которые используют новейшие теории ренормгрупповых преобразований, которые, как уверяют авторы, их применяющие, позволяют решать задачи определения критических показателей по крайней мере для модели Гинзбурга–Ландау [1].

Остановимся коротко на методе ренормгруппового анализа. В основном он сводится к тому, что "затравочный" гамильтониан подвергается трансформации:

$$P' \sim \prod \int\limits_{\lambda/s \le k' \le \lambda} d\phi_i(k') exp(-H)_{\phi_i(k) \to \alpha_s \phi_i(sk)}. \tag{1}$$

По существу, здесь есть интегрирование по фурье-компонентам в интервале от λ/s до λ, затем изменение волновых чисел у оставшихся переменных в s раз (до первоначального их значения) и последующее изменение масштаба. При этом в новом гамильтониане H' получаются новые параметры, и связь новых со старыми выражается в R–преобразовании

$$\mu' = R(\mu), \tag{2}$$

где μ — набор параметров, характеризующих распределение. Естественно, особенно интересными представляются неподвижные точки R–преобразования, которые играют ключевую роль во всей теории критических явлений. Такого рода соображения и диаграммная техника позволили Вильсону добиться определённых успехов. В предлагаемом подходе нет разложений, и все вычисления проводятся до конца строго и точно.

Забегая немного вперёд, можно сказать, что вопрос о критических показателях, строго говоря, не имеет смысла, так как нет самих критических показателей. Но в определённом смысле они всё же существуют и их можно "вычислить". Вопрос просто несколько сложнее, и функции вблизи критической точки, вообще говоря, не являются степенными, пропорциональными $(T-T_c)^{\alpha}$, а имеют более сложный характер, и только в некоторых случаях их можно приближённо считать таковыми.

В работе [2] было получено выражение для свободной энергии в модели Гинзбурга–Ландау. Гамильтониан этой модели имеет вид

$$H/T = \int (\alpha\sigma^2 + \gamma(\nabla\sigma)^2 + \beta(\sigma^2)^2 dv. \tag{3}$$

Свободная энергия для этого гамильтониана имеет вид

$$F = -(T/\delta)log\sqrt{\delta/\beta\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-\psi^2\delta/\beta}\Big(e^{-\delta F_0(\alpha+2i\psi)/T} + e^{-\delta F_0(\alpha-2i\psi)/T}\Big)d\psi. \tag{4}$$

Здесь $\delta = (\frac{2\pi}{K})^d$, $\alpha = a(T-T_c)$, а F_0 — свободная энергия при $\beta = 0$ как функция от α. Она определяется формулой

$$F_0 = (Tn/2)(2\pi)^{-d}\int\limits_0^K log((\alpha+\gamma k^2)/\pi)d^dk. \tag{5}$$

K — это максимальный модуль волновых чисел, а n — размерность пространства. Для вычисления теплоёмкости продифференцируем по T формулу (4). В результате дифференцирования получим

$$\partial F/\partial T = F/T - Q\int\limits_0^{\infty} e^{-\psi^2\delta/\beta}\Big[e^{-\delta F_0(\alpha+2i\psi)/T}\int\limits_0^K \frac{d^dk}{\alpha+2i\psi+\gamma k^2} + k.c.\Big]. \tag{6}$$

Здесь *к.с.* означает комплексно сопряжённое выражение, но только то, что заключено в квадратные скобки. А Q — независящий от α коэффициент. Оценим теперь $\partial F/\partial T$ при малых значениях α. Очевидно, что $\mid e^{-F_0(\alpha+2i\psi)} \mid \le e^{-F_0(\alpha)}$. Тогда

$$\mid \partial F/\partial T \mid \le \frac{F}{T} + \int\limits_0^{\infty} e^{-\psi^2\delta/\beta}\int\limits_0^K \frac{d^dk}{\sqrt{(\alpha+\gamma k^2)^2+4\psi^2}} \le O(1) + O(1)\int\limits_0^K \frac{d^dk}{\mid \alpha+\gamma k^2 \mid}. \tag{7}$$

Если $d = 3$, можно получить оценку последнего интеграла даже при $\alpha = 0$. Очевидно, что он ограничен при $\alpha = 0$.

Теперь рассмотрим то же самое при $d = 2$. В этом случае

$$\int\limits_0^K \frac{kdk}{\sqrt{(\alpha+\gamma k^2)^2+4\psi^2}} \le \int\limits_0^K \frac{kdk}{\mid \alpha+\gamma k^2 \mid} \le O(log \mid \alpha \mid). \tag{8}$$

При $d = 1$ соответствующий интеграл $\le O(\mid \alpha \mid^{-1/2})$. Для вычисления теплоёмкости нужно продифференцировать ещё один раз по температуре. При этом получается очень громоздкое выражение, для оценки которого дополнительно нужно оценить два выражения:

$$\int e^{-\psi^2\delta/\beta-\delta F_0(\alpha+2i\psi)/T}d\psi\int\limits_0^K d^dk(\alpha+2i\psi+\gamma k^2)^{-2}, \tag{9}$$

а также интеграл

$$\int e^{-\psi^2\delta/\beta-\delta F_0(\alpha+2i\psi)/T}d\psi\Big(\int\limits_0^K\frac{d^dk}{\alpha+2i\psi+\gamma k^2}\Big)^2. \tag{10}$$

Первый интеграл даёт наиболее сингулярную часть по α. В случае $\beta=0$ он даёт классическую сингулярность $\alpha^{d/2-2}$. Однако в случае $\beta\neq 0$ легко можно показать, что теплоёмкость не имеет такого рода сингулярности. Пусть I — интеграл (9). Тогда при $d=3$

$$\mid I\mid\leq Q\int\int\limits_0^K\frac{k^2dkd\psi}{(\alpha+\gamma k^2)^2+\psi^2}. \tag{11}$$

Так что даже при $\alpha=0$ имеем

$$\mid I\mid\leq Q\int\limits_0^K\frac{k^2dk}{\mid\alpha+\gamma k^2\mid}=O(1). \tag{12}$$

При $d=2$

$$\mid I\mid\leq Q\int\limits_0^K\frac{kdk}{\mid\alpha+\gamma k^2\mid}=O(log\mid\alpha\mid). \tag{13}$$

При $d=1$

$$\mid I\mid\leq Q\int\limits_0^K\frac{dk}{\mid\alpha+\gamma k^2\mid}=O(\mid\alpha\mid^{-1/2}). \tag{14}$$

В последних формулах буквой Q обозначены, вообще говоря, разные константы. Аналогично можно оценить выражение (10). Обозначим его через G. При d=3 $G=O(1)$, при $d=2$ $G=O(log\mid\alpha\mid^2)$ а при $d=1$ $G=O(\mid\alpha\mid^{-1})$. Таким образом, для теплоёмкости C имеем:
при $d=3$

$$C\leq O(1),$$

при $d=2$

$$C\leq O((log\mid\alpha\mid)^2),$$

при $d=1$

$$C\leq O(\alpha^{-1}).$$

По определению, критический показатель α характеризует сингулярность теплоёмкости в критической точке температуры. Но из приведенного анализа видно, что при $d = 3$ сингулярности вообще нет, при $d = 2$ она возможна, но только логарифмическая, при которой нет критического показателя, а в случае $d = 1$ сингулярность возможна, однако не того типа, который предсказывается классическими теориями.

В случае, когда есть магнитное поле, для свободной энергии мы имеем согласно [2]

$$F = -(T/\delta) log\sqrt{\delta/\beta\pi} \int e^{-\psi^2\delta/\beta + \frac{h^2\delta}{4(\alpha+2i\psi)} - \delta F_0(\alpha+2i\psi)/T} d\psi. \tag{15}$$

Тогда для величины $m = -\frac{\partial F}{\partial h}$ получим

$$m = (T/\delta)\frac{I_1}{I_2} = \int \frac{e^{-\psi^2\delta/\beta + \frac{h^2\delta}{4(\alpha+2i\psi)} - \delta F_0(\alpha+2i\psi)/T} d\psi}{(\alpha+2i\psi)^{-1+\delta/v}} \left[\int e^{-\psi^2\delta/\beta + \frac{h^2\delta}{4(\alpha+2i\psi)} - \delta F_0(\alpha+2i\psi)/T} d\psi\right]^{-1}. \tag{16}$$

Для величины магнитной восприимчивости можно получить выражение

$$\chi = -\partial^2 F/\partial h^2_{h=0} = (T/2) I_1/I_2, \tag{17}$$

где а I_1 и I_2 — интегралы из формулы (14), в которых h положено равным нулю. Можно оценить критические показатели для m и χ. Для m показатель β=1, а для χ показатель γ равен также 1. Таким образом, только в случае когда ангармоничность очень мала, можно говорить о показателе γ.

Таким образом, осталось вычислить параметры δ и η. Но эти параметры не вычисляются непосредственно из свободной энергии путём дифференцирования, поэтому на них останавливаться не будем.

Заключение

Критические показатели для модели Гинзбурга–Ландау оказались вполне классическими в тех случаях, когда они имеют смысл. Поэтому в тех случаях, когда экспериментально наблюдаются другие значения критических показателей, это свидетельствует скорее всего о том, что модель Гинзбурга–Ландау недостаточна для описания такой системы.

Вторым источником расхождения могут быть экспериментальные трудности определения критических показателей, связанные с очень тонкими измерениями на фоне огромных времён релаксации вблизи критической температуры.

Список литературы

[1] Вильсон К., Когут Дж. Ренормализационная группа и ε-разложение. – М.: Мир, 1975.

[2] Шулаев Г.А. Модель Гинзбурга-Ландау: Препринт ИФВЭ 98-52. Протвино, 1998.

[3] Гинзбург В.Л. // ФТТ. 1960, 2, 2031.

[4] Ма Ш. Современная теория критических явлений. – М.: Мир, 1980.

Рукопись поступила 5 августа 1998 г.

Г.А. Шулаев.
Критические показатели в модели Гинзбурга–Ландау.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы LaTeX.
Редактор Н.В.Ежела. Технический редактор Н.В.Орлова.

Подписано к печати 7.08.98. Формат $60 \times 84/8$. Офсетная печать.
Печ.л. 0,5. Уч.-изд.л. 0,4. Тираж 120. Заказ 255. Индекс 3649.
ЛР №020498 17.04.97.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 98–53, И Ф В Э, 1998