



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 98-63  
ОТФ

В.В. Киселев

**УНИВЕРСАЛЬНЫЕ МАСШТАБНЫЕ СООТНОШЕНИЯ  
ДЛЯ КОНСТАНТ СВЯЗИ МЕЗОНОВ,  
СОДЕРЖАЩИХ ТЯЖЕЛЫЕ КВАРКИ**

Направлено в ЭЧАЯ

Протвино 1998

### Аннотация

Киселев В.В. Универсальные масштабные соотношения для констант связи мезонов, содержащих тяжелые кварки: Препринт ИФВЭ 98–63. – Протвино, 1998. – 43 с., 3 рис., 7 табл., библиогр.: 75.

Обсуждаются формулировка и область применимости квазилокальных правил сумм для S-волновых уровней тяжелого кваркония, которые позволяют использовать регулярность спектра масс и получать масштабные соотношения для лептонных констант связи, находящиеся в хорошем согласии с имеющимися экспериментальными данными для векторных состояний систем чармония и боттомония. Проведено обобщение предложенного метода на тяжелые мезоны с одним тяжелым кварком, для которых получено масштабное соотношение, согласующееся с Эффективной теорией тяжелых кварков. Сделаны численные оценки параметров КХД в секторе тяжелых кварков: масс кварков, константы связи  $\alpha_s$ , энергии связи и среднего квадрата импульса тяжелого кварка в тяжелом мезоне. Рассмотрены правила сумм для мезонных токов, определяющих константу распада тяжелого векторного кваркония на пару тяжелых псевдоскалярных мезонов, где получено масштабное соотношение, связывающее константы распада кваркониев с различным кварковым составом. Проведено сравнение с экспериментальными данными, указывающими на хорошее согласие с теоретическими оценками. На основе выведенных масштабных соотношений сделаны предсказания свойств тяжелого кваркония ( $\bar{b}c$ ).

### Abstract

Kiselev V.V. Universal Scaling Relations for Coupling Constants of Mesons Containing Heavy Quarks: IHEP Preprint 98–63. – Protvino, 1998. – p. 43, figs. 3, tables 7, refs.: 75.

The formulation of quasi-local sum rules for the S-wave levels in a heavy quarkonium and the region of their applicability are discussed. The sum rules allow one to use the regularity in the mass spectrum and to derive scaling relations for the leptonic decay constants, which stand in a good agreement with the current experimental data for the vector states in the systems of charmonium and bottomonium. The generalization of proposed method to heavy mesons with a single heavy quark is performed, so that for the latter systems, the scaling relation, consistent with the Heavy Quark Effective Theory, is derived. Numerical estimates are presented for the QCD parameters in the heavy quark sector: the quark masses, coupling constant  $\alpha_s$ , binding energy and average square of heavy quark momentum inside the heavy meson. The sum rules for the meson currents, determining the decay constant of heavy vector quarkonium to the pair of heavy pseudoscalar mesons are considered to get the scaling relation, connecting the decay constants for the quarkonia with the different quark contents. The comparison with the experimental data points to a good agreement of the theoretical estimates. Some properties of the ( $\bar{b}c$ ) quarkonium are predicted on the basis of scaling relations derived.

© Государственный научный центр  
Российской Федерации  
Институт физики высоких энергий, 1998

## Введение

Полная картина прецизионных исследований Стандартной Модели [1] и поиска эффектов новой физики предполагает прямое измерение трехбозонной электрослабой вершины, поиски хиггсовских частиц [2], супермультиплетов [3] и т.п. на коллайдерах сверхвысоких энергий (LEP200, LHC), а также изучение эффектов нарушения CP-инвариантности и измерение фундаментальных параметров электрослабой теории (прежде всего в секторе тяжелых кварков). Длительное время центр тяжести усилий по реализации этой программы несомненно будет находиться в области физики тяжелых кварков как на работающих уже коллайдерах LEP и FNAL, так и на планируемых фабриках  $B$ -мезонов в SLAC, KEK и на HERA-B.

В физике тяжелых  $c$ - и  $b$ -кварков высокоточные измерения характеристик электрослабой теории в редких процессах и поиски возможных эффектов, обусловленных расширениями Стандартной Модели и связанных с виртуальными поправками, которые задаются большой энергетической шкалой, предполагают их надежное и точное выделение в процессах, где доминируют эффекты сильного взаимодействия, связывающего кварки в адроны. Поэтому значительную роль в проведении подобных исследований будет играть точность и надежность теоретических знаний о динамике КХД [4] в секторе тяжелых кварков.

Масса тяжелого кварка  $m_Q$  значительно больше масштаба конфайнмента  $\Lambda$ , определяющего непертурбативные эффекты в адронах. Наличие малого параметра  $\Lambda/m_Q$  позволяет развить мощные средства в изучении мезонов с тяжелыми кварками. Так, малая величина константы КХД,  $\alpha_s \sim 1/\ln(m_Q/\Lambda)$  [5], определяет надежность вычислений жестких процессов с тяжелыми кварками по теории возмущений КХД. Малая энергия связи тяжелого кварка в адроне, а значит, и малая виртуальность, приводят в ведущем приближении к нерелятивистскому движению тяжелого кварка в адроне, что определяет успешное применение нерелятивистских потенциальных моделей [6] к описанию спектров масс как тяжелых кваркониев, так и мезонов с одним тяжелым кварком, где в последнее время получила интенсивное развитие также Эффективная теория тяжелых кварков (HQET [7]), основанная

на ковариантном разложении лагранжиана тяжелого кварка в КХД по малому кинематическому параметру, задаваемому малым виртуальным импульсом тяжелого кварка по сравнению с его массой (в ведущем приближении тяжелый кварк рассматривается как статический источник глюонного поля).

Прочным теоретическим фундаментом для построения подобных подходов служит операторное разложение Вильсона [8], которое позволяет выделять эффекты пертурбативной динамики КХД с виртуальностями, большими шкалы факторизации  $\mu$ , в виде соответствующих коэффициентов  $C_i(\mu^2)$  перед составными операторами  $O_i(\mu^2)$ , матричные элементы которых определяются непертурбативным характером КХД в инфракрасной области, где виртуальности меньше шкалы  $\mu$ . В правилах сумм<sup>1</sup> КХД [10] вклады непертурбативных кварк-глюонных конденсатов являются степенными поправками к пертурбативным выражениям для спектральной плотности корреляторов токов в разложении по обратной массе тяжелого кварка.

Наличие двух энергетических масштабов взаимодействия, задающих малый параметр, позволяет в ряде случаев разрабатывать методы получения универсальных масштабных соотношений для физических величин, характерных для процессов с рассматриваемым взаимодействием. Так, малая энергия связи кварков в адроне по сравнению с передачей энергии в процессах глубоконеупругого рассеяния лептонов на нуклонах позволила выявить эффект скейлинга, определяемого рассеянием на свободных партонах-кварках [11]. В физике мезонов и барионов с одним тяжелым кварком удается определить в ведущем приближении по обратной массе тяжелого кварка универсальные, независимые от аромата тяжелого кварка, формфакторы в процессах слабых эксклюзивных распадов таких адронов [12]. В этом же приближении статических тяжелых кварков получено масштабное соотношение для лептонных констант тяжелых мезонов с одним тяжелым кварком, которое означает физически, что при заданной точности рассмотрения поле статического источника не зависит от его аромата [13].

Нарушение подобных масштабных соотношений определяется учетом степенных поправок ( $1/Q^2$  — в глубоконеупругом рассеянии;  $1/m_Q$  — в теории тяжелых кварков), а также учетом логарифмических петлевых поправок в теории возмущений [14]. В этом случае поправки нарушают универсальность масштабных соотношений, так как, к примеру, они явно зависят от аромата тяжелого кварка через его массу. Масштабное соотношение для лептонной константы мезона с одним тяжелым кварком, а также логарифмическая поправка к нему могут быть получены при рассмотрении матричного элемента тока в Эффективной теории тяжелых кварков и сравнения его перенормировки с соответствующими величинами, заданными КХД. Однако подобное рассмотрение не может быть применено к системам с двумя тяжелыми кварками типа тяжелых кваркониев, так как соответствующие выражения начинают зависеть от относительного движения этих двух кварков, которое явно зависит от их ароматов, т.е. от их масс.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Правила сумм в адронной физике были сформулированы в [9].

<sup>2</sup>В операторном разложении для тяжелого кваркония (NRQCD[15]) в качестве малых параметров

В тяжелых кваркониях феноменологически наблюдается как малая энергия связи тяжелых кварков, выраженная в ограниченном числе уровней в узкой по сравнению с массами состояний энергетической щели ниже порога распада на пару тяжелых мезонов и в надежности применения нерелятивистского рассмотрения, так и явная регулярность спектров масс, определяющая независимость разности энергий уровней от ароматов, а именно от масс  $c$ - и  $b$ -кварков. Подобная регулярность нашла наиболее явное выражение в рамках потенциальных моделей в виде утверждения о независимости средней кинетической энергии тяжелых кварков от их ароматов и в соответствующих уравнениях для плотности уровней энергии, скажем,  $S$ -волновых состояний.

Феноменологические нерелятивистские потенциальные модели тяжелых кваркониев, однако, не могут служить основой для получения масштабных соотношений для лептонных констант, определяемых в ведущем приближении волновой функцией кваркония в начале координат. Несмотря на независимость потенциала статического источника от его аромата, волновые функции тяжелых кваркониев зависят от ароматов кварков и от глобального поведения потенциала вблизи начала координат и на расстояниях  $r \gg 1$  ферми, которое слабо влияет на спектр масс, так как вероятность нахождения кварков в начале координат (или на больших расстояниях) подавлена (средние расстояния между кварками в тяжелых кваркониях составляют  $0,3 - 1,0$  ферми) и короткие расстояния дают малый вклад в определение средних значений, например потенциала, задающих массы уровней. Таким образом, предсказательная сила потенциальных моделей в отношении лептонных констант значительно ослаблена из-за большой модельной зависимости.

Как известно, в правилах сумм КХД при малых значениях номера момента спектральной функции существенны вклады как основного, так и возбужденных резонансных состояний, однако в рамках такого подхода невозможно выделить изолированный вклад каждого отдельного резонанса. При больших же номерах момента правила сумм насыщаются вкладом основного состояния, в то время как вклад возбужденных уровней подавлен, и им обычно пренебрегают. Поэтому в рамках правил сумм КХД методически не удастся использовать регулярность спектров тяжелых кваркониев. Кроме того, так как вычисления проводятся с оборванным рядом теории возмущений КХД (например, учитываются только поправки от однопетлевого вклада), в методе правил сумм возникает зависимость физической величины от внешнего параметра, определяющего конкретную схему правил сумм. Например, результат зависит от номера  $n$  в методе моментов спектральной функции  $\Pi(Q^2)$ , или от параметра борелевского преобразования  $\sigma = 1/M^2$  в формулировке правил сумм с применением преобразования Бореля. Кроме того, параметром является порог  $s_{th}$ , разделяющий область узких неперекрывающихся резонансов от области континуума, где широкие перекрывающиеся резонансы приводят к размытию резонансной картины и плавному поведению спектральной функции  $\Pi(Q^2)$ . Имеется также зависимость от выбора величины масс кварков. Таким образом,

---

используют как малые виртуальности ( $\Lambda/m_Q \ll 1$ , как в HQET), так и малую скорость относительного движения ( $v^2 \ll 1$ ).

наряду с четким разграничением пертурбативного и непертурбативного вкладов, правилам сумм КХД приходится мириться с зависимостью результата от внешних параметров, что существенно ослабляет предсказательную силу данного метода.

В конечноэнергетических правилах сумм [16] рассмотрение резонансной области приводит к существенной неопределенности, связанной с выбором интервала интегрирования, включающего в себя дельтообразный вклад резонанса. Исключение подобной неопределенности требует наложения дополнительных условий, так что и в подобном подходе также не удается получать соотношения для констант связи тяжелых кваркониев, следующие из масштабных свойств энергетической плотности уровней.

Таким образом, необходима разработка нового подхода, позволяющего использовать регулярность спектра масс и явные выражения для плотности уровней тяжелого кваркония, нерелятивистское движение кварков в кварконии, подавленность степенных непертурбативных поправок по обратной массе тяжелых кварков и возможность определять вклады отдельных резонансов для вывода универсальных масштабных соотношений для лептонных констант тяжелых кваркониев.

Для описания состояний тяжелого кваркония, находящихся выше порога распада на пару тяжелых мезонов (например,  $\Upsilon(4S)$ ,  $B_c^{*+}(3S)$ ,  $\psi(3770)$ ), существенны константы связи кваркония с мезонами. Такие константы определяются непертурбативной динамикой КХД. Поэтому их описание предполагает применение моделей инфракрасного поведения в КХД, к числу которых относятся потенциальные модели тяжелого кваркония и мезона с одним тяжелым кварком, где вид потенциала может быть связан с формой глюонного пропагатора в непертурбативной области. В рамках такого подхода была сделана оценка ширины распада  $\psi(3770) \rightarrow D\bar{D}$  в модели корнельского потенциала [17] с линейным ростом энергии взаимодействия кварков при увеличении расстояния между ними. Однако моделирование поведения глюонного пропагатора (потенциала) приводит, очевидно, к модельной зависимости результата расчета констант распадов, что значительно снижает предсказательную силу подобных оценок. В этой связи актуальной проблемой представляется построение правил сумм для мезонных токов, определяющих константы распада тяжелого векторного кваркония на пару тяжелых мезонов. Подобный кварконий, лежащий в узкой энергетической щели ниже порога распада на пару более тяжелых, чем псевдоскалярные, векторных состояний, имеет константы, подчиняющиеся масштабному соотношению в силу определенной зависимости размера щели от масс мезонов с одним тяжелым кварком, которая следует из Эффективной теории тяжелых кварков.

Важной задачей становится проведение детального анализа практического применения полученных соотношений для предсказания соответствующих констант связи нового тяжелого кваркония ( $\bar{b}c$ ), поиски которого ведутся в экспериментах с вершинными детекторами на коллайдерах CERN и FNAL.

Система ( $\bar{b}c$ ) с открытыми прелестью и очарованием занимает особое место среди тяжелых кваркониев ( $Q\bar{Q}'$ ). В отличие от подробно изученных экспериментально и достаточно точно описываемых теоретически семейств чармония ( $c\bar{c}$ ) и

боттомония ( $b\bar{b}$ ) соответственно со скрытыми очарованием и прелестью, тяжелый кварконий ( $\bar{b}c$ ), семейство  $B_c$ -мезонов, имеет специфические механизмы образования, распадов и спектроскопию, исследование которых позволит заметно расширить и упрочить количественное понимание динамики КХД, а также продвинуться в изучении важнейших параметров электрослабой теории.

Основной целью обзора является изучение следующих проблем.

1. Формулировка метода правил сумм, позволяющая использовать регулярность спектра масс мезонов, содержащих тяжелые кварки, с целью получения масштабных соотношений для констант связи кваркониев, которые характеризуют механизм конфайнмента тяжелых кварков.

2. Извлечение значений параметров КХД в секторе тяжелых кварков.

В разделе 1 изучаются лептонные константы тяжелых кваркониев. Исходным пунктом построения квазилокальных правил сумм является рассмотрение двухточечного коррелятора векторных и псевдоскалярных токов тяжелых кварков на основе операторного разложения и дисперсионного соотношения для спектральной плотности соответствующих формфакторов. Следуя стандартной схеме правил сумм КХД для вычисления моментов спектральной плотности, отвечающих производным коррелятора токов в точке  $Q^2 = 0$ , где нет физических особенностей, обусловленных образованием резонансов и адронного континуума, определена область номеров моментов, где, с одной стороны, можно пренебречь вкладом от глюонного конденсата, а с другой стороны, допустимо нерелятивистское приближение для вклада кварковой петли с учетом суммирования кулоноподобных  $\alpha_s/v$ -поправок, где  $v$  — скорость относительного движения тяжелых кварков. Необходимость учета таких кулоновских поправок является особенностью рассмотрения систем с двумя тяжелыми кварками в рамках операторного разложения по обратной массе тяжелых кварков, что заметно отличает этот подход от Эффективной теории тяжелых кварков. В расчеты включается также и поправка за счет обмена жестким глюоном при  $v \rightarrow 0$ . Показано, что в таком случае с высокой точностью моменты спектральной плотности коррелятора токов тяжелых кварков могут быть получены на основе использования вероятности образования тяжелых кварков на пороге, которая является постоянной величиной за счет кулоновского перерассеяния, причем систематический фактор подобного представления близок к единице и является величиной, имеющей слабую зависимость от номера момента, которой можно пренебречь.

Моменты спектральной плотности токов тяжелых кварков могут быть непосредственно вычислены по экспериментальным данным о ширинах лептонных распадов S-волновых состояний тяжелых кваркониев (чармония ( $c\bar{c}$ ) и боттомония ( $b\bar{b}$ )). При этом вклад адронного континуума моделируется спектральной плотностью, вычисленной в КХД, выше некоторого порога  $s_{th}$ , что фактически означает использование локальной кварк-адронной дуальности при энергиях выше порога континуума. Подобное представление может приводить к слабой несущественной зависимости результатов от величины  $s_{th}$ . Далее, что касается вклада резонансов, то в отмеченной области рассмотрения номеров моментов спектральной плотности необходимо

учитывать радиальные возбуждения основного состояния. Для этих возбуждений наблюдается феноменологическая регулярность спектров тяжелых кваркониев, а именно, разности энергий уровней практически не зависят от ароматов тяжелых  $c$ - и  $b$ -кварков. Это означает, что плотность таких состояний является функцией номера возбуждения и не зависит от масс кварков. Наиболее явное выражение этой закономерности можно установить в рамках нерелятивистских потенциальных моделей тяжелых кваркониев, где согласно теореме Фейнмана–Хеллманна описанная ситуация имеет место при постоянной, независимой от ароматов кварков и уровня возбуждения величине средней кинетической энергии тяжелых кварков в связанном состоянии. По теореме о вириале постоянная кинетическая энергия отвечает логарифмическому потенциалу в области средних расстояний между кварками в тяжелом кварконии:  $0,1 < r < 1$  ферми, где происходит смена пертурбативного кулоноподобного поведения потенциала на линейный рост энергии взаимодействия, приводящий к конфайнменту кварков. Слабая зависимость разности энергий уровней от масс тяжелых кварков может быть учтена введением степенного потенциала Мартэна, который имеет в области средних расстояний в кварконии ту же форму, что и логарифмический потенциал, как впрочем и потенциалы, мотивированные КХД. В этом случае можно записать явные выражения для плотности  $S$ -волновых состояний кваркония.

Сформулировано интегральное представление для вклада суммы резонансов в моменты коррелятора кварковых токов, причем систематический фактор подобного представления в рассматриваемой области номеров моментов близок к единице и пренебрежимо слабо зависит от номера момента. Спектральная плотность интегрального представления включает в себя явные выражения для плотности уровней кваркония, что позволяет сформулировать квазилокальные правила сумм на основе равенства модельной спектральной плотности адронных состояний и спектральной плотности коррелятора кварковых токов, рассчитанных в КХД, как это было описано выше. Определены точность и рамки применимости построенных правил сумм.

На основе сформулированных правил сумм для лептонных констант  $nS$ -волновых уровней тяжелого кваркония получены масштабные соотношения, которые для констант векторных состояний имеют вид

$$\frac{f_n^2}{M_n} \left( \frac{M_n}{M_1} \right)^2 \left( \frac{m_1 + m_2}{4\mu_{12}} \right)^2 = \frac{c}{n},$$

где  $c$  является величиной, которая не зависит от ароматов тяжелых кварков, составляющих кварконий. Она выражается следующим образом:

$$c = \frac{2\alpha_s}{\pi} T \left( \frac{m_1 + m_2}{M_1} \right)^2 H_V Z_{\text{sys}},$$

где  $T$  — кинетическая энергия тяжелых кварков в кварконии, которая не зависит от ароматов тяжелых кварков;  $\alpha_s$  определяется на масштабе энергий кулоноподобного обмена между кварками;  $H_V$  — фактор отвечающий жесткой глюонной поправке;  $\mu_{12} = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  — приведенная масса кварков;  $Z_{\text{sys}}$  — систематический фактор используемых представлений.



Полученные универсальные масштабные соотношения связывают не только константы nS-волновых возбуждений кваркония, но и константы кваркониев с различным кварковым составом. Численно выведенные закономерности находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными по лептонным распадам  $\psi$ - и  $\Upsilon$ -частиц и позволяют сделать предсказания для кваркония ( $\bar{b}c$ ).

Приведенные масштабные соотношения позволяют по данным о лептонных константах боттомония и чармония получить оценку константы взаимодействия КХД, которая обычно приводится к масштабу массы  $Z$ -бозона согласно ренормгрупповому поведению, так что

$$\alpha_s(m_Z^2) = 0,118 \pm 0,003$$

при “физическом” выборе точки нормировки в кулоноподобном обмене между тяжелыми кварками  $\mu_{Coul}^2 = Tm_Q$ , которая определяется средним квадратом импульса кварка в кварконии. Отметим, что довольно широкая вариация  $\mu_{Coul}^2$  в разумных пределах в рамках однопетлевого приближения для коэффициентов Вильсона приводит к методической неопределенности  $\delta\alpha_s = 0,010$ , которая снижается до  $\delta\alpha_s = 0,002$  при учете двухпетлевого вклада. Полученная оценка согласуется со “среднемировым” значением константы  $\alpha_s(m_Z^2)$ .

Сделаны оценки масс  $c$ - и  $b$ -кварков.

В разделе 2 проведено обобщение квазилокальных правил сумм на мезоны с одним тяжелым кварком. Проанализировано масштабное соотношение для соответствующих лептонных констант в статическом пределе. Показано, что результаты рассмотрения находятся в согласии с ранее полученными результатами в рамках HQET. В ходе анализа сформулирован спектроскопический подход к оценке масс тяжелых кварков, исходя из закономерностей для масс тяжелых кваркониев и приблизительного совпадения уровней  $\Upsilon(4S)$  и  $\psi(3S)$  с удвоенными массами  $m_{B(1S)}$  и  $m_{D(1S)}$  соответственно и получены величины размерных параметров Эффективной теории тяжелых кварков: энергии связи и среднего квадрата импульса тяжелых кварков в мезоне, которые находятся в согласии с оценками в других подходах.

В разделе 3 сформулирована новая модель правил сумм для мезонных токов, определяющих константы распада тяжелого векторного кваркония на пару тяжелых мезонов, лежащего в узкой энергетической щели ниже порога распада на пару более тяжелых, чем псевдоскалярные, векторных состояний. Рассматриваемый подход позволяет использовать зависимость размера энергетической щели от масс тяжелых кварков, который при малых номерах момента спектральной плотности задает величину константы связи. Это дает возможность получить масштабное соотношение для констант распада тяжелого векторного кваркония с различным кварковым составом, которое имеет следующий вид:

$$\frac{g^2}{M} \left( \frac{4m_{12}}{M} \right) = \text{const.}$$

вследствие зависимости энергетической щели между векторным и псевдоскалярным состояниями тяжелых мезонов  $\Delta M_{1,2} \cdot M_{1,2} = \text{const}$ , где  $M_{1,2}$  — массы мезонов в конечном состоянии;  $m_{12}$  — их приведенная масса.

Сравнительный анализ указывает на хорошее согласие масштабного соотношения с экспериментальными данными по распадам  $\Upsilon \rightarrow B\bar{B}$  и  $\psi(3770) \rightarrow D\bar{D}$ .

Показано практическое применение полученного соотношения для предсказания константы связи нового тяжелого кваркония ( $\bar{b}c$ ), поиски которого ведутся в экспериментах с вершинными детекторами на коллайдерах CERN и FNAL, и предсказана величина ширины распада  $B_c^{*+}(3S) \rightarrow B^+D^0$ .

Основные результаты, представленные в обзоре, были получены в оригинальных работах [18]-[29].

## 1. Лептонные константы тяжелых кваркониев в правилах сумм

Проблема описания связанных состояний кварков, адронов, тесно связана с изучением поведения КХД на больших расстояниях ( $r \sim 1/\Lambda$ ,  $\Lambda \approx 200$  МэВ) и конформизмом цветных объектов. Неприменимость теории возмущений КХД в инфракрасной области приводит к необходимости поиска методов непертурбативного описания сильных взаимодействий.

В случае тяжелых кварков возникает ряд условий, которые позволяют за счет упрощения рассмотрения сделать существенное продвижение в изучении КХД на больших расстояниях.

### 1.1. Правила сумм для тяжелого кваркония

Рассмотрим двухточечные корреляторы кварковых токов

$$\Pi_{\mu\nu}(q^2) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T J_\mu(x) J_\nu^\dagger(0) | 0 \rangle, \quad (1)$$

$$\Pi_P(q^2) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T J_5(x) J_5^\dagger(0) | 0 \rangle, \quad (2)$$

где

$$J_\mu(x) = \bar{Q}_1(x) \gamma_\mu Q_2(x), \quad (3)$$

$$J_5(x) = \bar{Q}_1(x) \gamma_5 Q_2(x), \quad (4)$$

$$(5)$$

$Q_i$  — спинорное поле тяжелого кварка типа  $i = c, b$ . Запишем далее

$$\Pi_{\mu\nu} = \left( -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \Pi_V(q^2) + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \Pi_S(q^2), \quad (6)$$

где  $\Pi_V$  и  $\Pi_S$  — векторная и скалярная функции корреляции соответственно. В дальнейшем мы будем рассматривать векторный и псевдоскалярный корреляторы  $\Pi_V(q^2)$  и  $\Pi_P(q^2)$ .

Определим лептонные константы  $f_{V_n}$  и  $f_{P_n}$

$$\langle 0|J_\mu(x)|V_n(\lambda)\rangle = i\epsilon_\mu^{(\lambda)} f_{V_n} M_{V_n} e^{ikx}, \quad (7)$$

$$\langle 0|J_{5\mu}(x)|P_n\rangle = ik_\mu f_{P_n} e^{ikx}, \quad (8)$$

где

$$J_{5\mu}(x) = \bar{Q}_1(x)\gamma_5\gamma_\mu Q_2(x), \quad (9)$$

так что

$$\langle 0|J_5(x)|P_n\rangle = i \frac{f_{P_n} M_{P_n}^2}{m_1 + m_2} e^{ikx}, \quad (10)$$

причем  $|V\rangle$  и  $|P\rangle$  — векторы  $1^-$  и  $0^-$  состояний кваркония;  $\lambda$  — поляризация векторного кваркония;  $k$  — 4-импульс мезона;  $k_{P,V}^2 = M_{P,V}^2$ .

В случае чармония ( $\psi, \psi' \dots$ ) и боттомония ( $\Upsilon, \Upsilon', \Upsilon'' \dots$ ) легко показать, что ширина лептонного распада  $V_n \rightarrow e^+e^-$  выражается через  $f_{V_n}$  в виде

$$\Gamma(V_n \rightarrow e^+e^-) = \frac{4\pi}{9} e_i^2 \bar{\alpha}_{em}^2 \frac{f_{V_n}^2}{M_{V_n}}, \quad (11)$$

где  $e_i$  — электрический заряд кварка типа  $i$ , а величина электромагнитной константы задается масштабом массы связанного состояния.

В области узких неперекрывающихся резонансов из определений (1) - (10) следует, что

$$\frac{1}{\pi} \Im m \Pi_V^{(res)}(s) = \sum_n f_{V_n}^2 M_{V_n}^2 \delta(s - M_{V_n}^2), \quad (12)$$

$$\frac{1}{\pi} \Im m \Pi_P^{(res)}(s) = \sum_n f_{P_n}^2 M_{P_n}^4 \frac{1}{(m_1 + m_2)^2} \delta(s - M_{P_n}^2). \quad (13)$$

Таким образом, для наблюдаемой адронной спектральной функции имеем

$$\frac{1}{\pi} \Im m \Pi_{V,P}^{(had)}(s) = \frac{1}{\pi} \Im m \Pi_{V,P}^{(res)}(s) + \rho_{V,P}(s, s_{th}^{V,P}), \quad (14)$$

где  $\rho_{V,P}(s, s_{th}^{V,P})$  — вклад континуума, отличный от нуля при  $s > s_{th}$ . В дальнейшем мы будем полагать, что вклад континуума равен вычисленной пертурбативной части при  $s > s_{th}$ , так что это может привести к дополнительной параметрической зависимости от  $s_{th}$ .

С другой стороны, метод операторного разложения позволяет записать

$$\Pi^{(QCD)}(q^2) = \Pi^{(pert)}(q^2) + C_G(q^2) \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle + C_i(q^2) \langle m_i \bar{Q}_i Q_i \rangle + \dots, \quad (15)$$

где выделен пертурбативный вклад  $\Pi^{(pert)}(q^2)$ , а непертурбативный представлен в виде суммы кварк-глюонных конденсатов с вильсоновскими коэффициентами, которые могут быть вычислены в теории возмущений КХД.

В уравнении (15) мы ограничились вкладом вакуумных средних от операторов размерности  $d = 4$ . Для  $C_G^{(P)}(q^2)$  имеем, например, [10]

$$C_G^{(P)} = \frac{1}{192m_1m_2} \frac{q^2}{\bar{q}^2} \left( \frac{3(3v^2 + 1)(1 - v^2)^2}{2v^5} \ln \frac{v + 1}{v - 1} - \frac{9v^4 + 4v^2 + 3}{v^4} \right), \quad (16)$$

где

$$\bar{q}^2 = q^2 - (m_1 - m_2)^2, \quad v^2 = 1 - \frac{4m_1m_2}{\bar{q}^2}. \quad (17)$$

Аналогичные формулы для других вильсоновских коэффициентов могут быть найдены в [10].

В ведущем порядке по теории возмущений КХД для мнимой части коррелятора получено [10]

$$\Im m\Pi_V^{(pert)}(s) = \frac{\tilde{s}}{8\pi s^2} (3\bar{s}s - \bar{s}^2 + 6m_1m_2s - 2m_2^2s)\theta_i(s), \quad (18)$$

$$\Im m\Pi_P^{(pert)}(s) = \frac{3\tilde{s}}{8\pi s} (s - (m_1 - m_2)^2)\theta_i(s), \quad (19)$$

где  $\bar{s} = s - m_1^2 + m_2^2$ ,  $\tilde{s}^2 = \bar{s}^2 - 4m_2^2s$ ,  $\theta_i(s) = \theta(s - (m_1 + m_2)^2)$ .

Однопетлевой вклад в  $\Im m\Pi(s)$  также может быть включен в рассмотрение (см., например, [10]). Однако, для нас более существенной является поправка, суммирующая ряд по степеням  $(\alpha_s/v)$ , где  $v$  определено в (17), а  $\alpha_s$  — постоянная КХД-взаимодействия на масштабе характерных средних импульсов кварков в мезоне. В дальнейшем рассмотрении мы полагаем, что средний квадрат импульса кварка равен

$$\langle \mathbf{p}_Q^2 \rangle = 2\mu_{12}\langle T \rangle,$$

где  $T$  — кинетическая энергия, а  $\mu_{12}$  — приведенная масса системы. Для “бегущей” константы связи мы используем схему  $\overline{\text{MS}}$ , так что  $\alpha_s = \alpha_s(\langle \bar{p}_Q^2 \rangle)$ , где величина  $\bar{p}_Q^2$  задается  $\langle \mathbf{p}_Q^2 \rangle$ , что соответствует “физическому” выбору шкалы кулоноподобного взаимодействия. Для оценки величины зависимости результатов от вариации точки нормировки константы взаимодействия мы рассматриваем также фиксацию шкалы в подходе Бродского–Лепаж–Маккензи (BLM), где [30]

$$\langle \bar{p}_Q^2 \rangle = e^{-5/3} \langle (\mathbf{p}_Q - \mathbf{p}'_Q)^2 \rangle = e^{-5/3} 2\langle \mathbf{p}_Q^2 \rangle.$$

В работе [10] показано, что учет кулоноподобного взаимодействия приводит к фактору

$$F(v) = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha_s}{v} \frac{1}{1 - \exp(-\frac{4\pi\alpha_s}{3v})}, \quad (20)$$

причем разложение по  $\alpha_s/v \ll 1$  в точности воспроизводит однопетлевую  $O(\frac{\alpha_s}{v})$  поправку

$$F(v) \approx 1 + \frac{2\pi}{3} \frac{\alpha_s}{v} \dots \quad (21)$$

Дополнительная  $\alpha_s$ -поправка связана со вкладом жестких глюонов. Она приводит к фактору  $H$ , который для векторного состояния при  $m_1 = m_2 = m_Q$  и  $v \rightarrow 0$  равен

$$H_V^{m_Q} = 1 - \frac{16\alpha_s^H}{3\pi}, \quad (22)$$

где шкала оценки  $\alpha_s^H$  задается массой тяжелого кварка, и, например, в процедуре VLM [30,31] вычисления в схеме  $\overline{\text{MS}}$  приводят к масштабу  $e^{-11/24}m_Q \simeq 0,632m_Q$  [33]. Расчет  $H$ -фактора для псевдоскалярного состояния с  $m_1 \neq m_2$  был выполнен в [32], где найдено, что

$$H_P = 1 + \frac{2\alpha_s^H}{\pi} \left( \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \ln \frac{m_2}{m_1} - 2 \right), \quad (23)$$

где  $\alpha_s^H$  было взято на масштабе приведенной массы кварков. Результат (23) не переходит в (22) при  $m_1 = m_2$ , и, следовательно, жесткие глюонные поправки к корреляторам векторных и псевдоскалярных токов различны. Так как нерелятивистская КХД для тяжелых кварков, сформулированная недавно в [15], приводит к отщеплению взаимодействия спинов кварков с глюонами в ведущем приближении, массовая зависимость в  $H$ -факторах определяется соответствующей перенормировкой в КХД, где она задается однопетлевыми вычислениями диаграмм для вершины и собственной энергии кварка. Следуя [32], находим

$$H_V = 1 + \frac{2\alpha_s^H}{\pi} \left( \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \ln \frac{m_2}{m_1} - \frac{8}{3} \right). \quad (24)$$

Результаты (23) и (24) могут быть получены из перенормировочных факторов для векторных и аксиально-векторных токов переходов тяжелых кварков  $Q_1 \rightarrow Q_2$ , рассмотренных в [13]. Так, необходимо заменить один кварк, скажем  $Q_1$ , на антикварк  $\bar{Q}_1$ , что приводит к подстановкам  $m_1 \rightarrow -m_1$ ,  $F_A^2 \rightarrow H_V$  и  $F_V^2 \rightarrow H_P$  с предскрипцией абсолютного значения для аргумента логарифма.

Расчет масштаба VLM при  $m_1 \neq m_2$  в настоящее время не проведен, но с достаточной для наших целей точностью можно считать, что он равен  $0,63\sqrt{m_1 m_2}$ .

Согласно дисперсионным соотношениям имеем правила сумм КХД, которые гласят, что в среднем при  $q^2 < 0$ , где нет физических особенностей, обусловленных образованием резонансов и адронного континуума, верно уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{\Im m\Pi^{(had)}(s)}{s - q^2} ds = \Pi^{(QCD)}(q^2), \quad (25)$$

где неявно предполагаются необходимые вычитания.  $\Im m\Pi^{(had)}(s)$  определена согласно (12) - (14), а  $\Pi^{(QCD)}(q^2)$  - в (15) - (21). Формула (25) является основой для развития методов правил сумм в форме моментов корреляционной функции и анализа борелевского преобразования  $\Pi(q^2)$  (см. работу [10]). Неполнота ряда в правой части (25) приводит к упомянутой выше нефизической зависимости величин  $f_{P,V}$  от внешнего параметра схемы правил сумм.

Далее мы используем условия, упрощающие рассмотрение в случае тяжелого кваркония.

## 1.2. Непертурбативный вклад

Следуя [10,34], рассмотрим  $n$ -тую производную по  $q^2$  от (25) при  $q^2 = 0$ . Эта процедура соответствует вычислению моментов спектральной плотности коррелятора токов. Как было найдено в [10,34], отношение  $n$ -того момента, вычисленного с учетом глюонного конденсата, существенного для тяжелого кваркония, к  $n$ -тому моменту, рассчитанному в однопетлевом приближении теории возмущений КХД, равно

$$\frac{A(n^{mom})}{A^{(0)}(n^{mom})} = 1 + a(n^{mom})\alpha_s - \frac{4\pi^2 n^{mom}(n^{mom} + 1)(n^{mom} + 2)(n^{mom} + 3)}{9(2n^{mom} + 5)} \frac{\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle}{(2m_Q)^4}, \quad (26)$$

для векторных состояний при  $m_1 = m_2 = m_Q$ .  $\alpha_s$ -член разложения соответствует двухпетлевой поправке КХД. Можно видеть, что вклад глюонного конденсата становится существенным при “больших” значениях  $n^{mom} > n_l \sim (m_Q/\Lambda)^{4/3}$ , где  $\Lambda$  — масштаб конфайнмента (или, что то же, конденсата). Для боттомония величина  $n_l$  близка к 20, так что при  $n^{mom} < 20$  доля вклада глюонного конденсата меньше 1%, и она быстро увеличивается при  $n^{mom} > 20$  (см. работы [33,35,36,37], где можно найти многогранное обсуждение). Поэтому при  $n^{mom} < n_l$  допустимо пренебречь вкладом глюонного конденсата.<sup>3</sup>

## 1.3. Нерелятивистское движение кварков

Нерелятивистское движение кварков означает, что в резонансной области мы имеем согласно (17)

$$v \rightarrow 0. \quad (27)$$

Отсюда легко получить, что в ведущем порядке

$$\Im m \Pi_P^{(pert)}(s) \approx \Im m \Pi_V^{(pert)}(s) \rightarrow \frac{3v}{8\pi} (4\mu_{12})^2, \quad (28)$$

что с учетом кулоновского фактора

$$F(v) \simeq \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha_s}{v} \quad (29)$$

и жесткой глюонной поправки дает

$$\Im m \Pi_{P,V}^{(pert)}(s) \simeq \frac{\alpha_s}{2} (4\mu_{12})^2 H_{P,V}. \quad (30)$$

Для боттомония использование предела  $v \rightarrow 0$  в выражении для кулоновского фактора (29) в резонансной области справедливо с точностью меньше, чем 5%.

<sup>3</sup>К сожалению, очарованный кварк не столь тяжел, и  $n_l \sim 5$  [10], так что область используемого приближения значительно ограничена.

Что касается приближения для спектральной плотности выражением (30), находим, что отношение моментов, вычисленных по (18), (19) и (30) в резонансной области  $s < s_{\text{th}}$ , быстро стремится к 1, так что максимальное отклонение от единицы при номерах момента  $n^{\text{mom}} \sim 1$  близко к 10%. Чтобы уменьшить величину ошибки за счет нерелятивистского приближения, М.Б.Волошин [33,35,37] рассматривает  $n^{\text{mom}} > 8$ . В настоящем рассмотрении мы удовлетворяемся такой точностью, когда ошибка для лептонных констант близка к 5%, так что мы используем нежесткое ограничение  $n^{\text{mom}} > 2$ , когда  $\Delta f/f \leq 8\%$ .

Заметим, что в отличие от [33,35,37], мы рассматриваем случай, когда пертурбативные интегралы при  $s > s_{\text{th}}$  компенсируются вкладами адронного континуума в уравнениях правил сумм, так что на практике мы проводим интегрирование по “резонансной” области и не забываем о параметрической зависимости от  $s_{\text{th}}$ .

Рассматривая моменты пертурбативной спектральной плотности в резонансной области, можно ввести систематическое отклонение нерелятивистского приближения от однопетлевого результата посредством следующего фактора к значениям моментов:  $Z_{\text{nr}}^{Q\bar{Q}}(n^{\text{mom}}, s_{\text{th}})$ , зависящего от номера момента и порога континуума. На практике, при умеренных величинах номеров момента соответствующий фактор имеет очень слабую зависимость от  $n^{\text{mom}}$  и  $s_{\text{th}}$ :  $(2m_Q + 1 \text{ GeV})^2 < s_{\text{th}} < (2m_Q + 1.5 \text{ GeV})^2$ , так что

$$Z_{\text{nr}}^{b\bar{b}}(n^{\text{mom}}, s_{\text{th}}) = 1,09 \pm 0,05, \quad Z_{\text{nr}}^{c\bar{c}}(n^{\text{mom}}, s_{\text{th}}) = 1,30 \pm 0,10. \quad (31)$$

#### 1.4. Интегральное представление адронного вклада и квазилокальные правила сумм

Что касается адронной части коррелятора, то для вклада узких векторных резонансов можно записать

$$\Pi_V^{(\text{res})}(q^2) = \int \frac{ds}{s - q^2} \sum_n f_{V_n}^2 M_{V_n}^2 \delta(s - M_{V_n}^2), \quad (32)$$

$$\Pi_P^{(\text{res})}(q^2) = \int \frac{ds}{s - q^2} \sum_n f_{P_n}^2 \frac{M_{P_n}^4}{(m_1 + m_2)^2} \delta(s - M_{P_n}^2). \quad (33)$$

Интегралы в (32)-(33) легко вычисляются.

В предлагаемой схеме введем функцию числа состояний  $n(s)$ , такую что

$$n(M_k^2) = k. \quad (34)$$

Данное определение вполне осмысленно в резонансной области. Тогда можно записать, например,

$$\frac{1}{\pi} \Im m \Pi_V^{(\text{res})}(s) = s f_{V_{n(s)}}^2 \frac{d}{ds} \sum_k \theta(s - M_{V_k}^2). \quad (35)$$

Далее очевидно, что

$$\frac{d}{ds} \sum_k \theta(s - M_k^2) = \frac{dn(s)}{ds} \frac{d}{dn} \sum_k \theta(n - k), \quad (36)$$

и (32) можно записать в виде

$$\Pi_V^{(res)}(q^2) = \int \frac{ds}{s - q^2} s f_{V_{n(s)}}^2 \frac{dn(s)}{ds} \frac{d}{dn} \sum_k \theta(n - k). \quad (37)$$

Взяв среднее значение, получим

$$\Pi_V^{(res)}(q^2) = \left\langle \frac{d}{dn} \sum_k \theta(n - k) \right\rangle \int \frac{ds}{s - q^2} s f_{V_{n(s)}}^2 \frac{dn(s)}{ds}. \quad (38)$$

Очевидно, что в среднем производная ступенчатой функции в резонансной области равна

$$\left\langle \frac{d}{dn} \sum_k \theta(n - k) \right\rangle = Z \simeq 1, \quad (39)$$

где  $Z$  зависит от  $q^2$ , так как весовая функция в (38) является зависящей от  $q^2$ . Таким образом, в этой схеме, которая может быть феноменологически продуктивно использована в пределе больших масс  $m_Q$ , имеем

$$\langle \Pi_V^{(res)}(q^2) \rangle \approx Z \int \frac{ds}{s - q^2} s f_{V_{n(s)}}^2 \frac{dn(s)}{ds}, \quad (40)$$

$$\langle \Pi_P^{(res)}(q^2) \rangle \approx Z \int \frac{ds}{s - q^2} \frac{s^2 f_{P_{n(s)}}^2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{dn(s)}{ds}. \quad (41)$$

Чтобы оценить ошибки, обусловленные переходом от суммы по резонансам к интегралу по плотности состояний, рассмотрим отношение  $n^{mom}$ -тых моментов для векторных состояний боттомония и соответствующих непрерывных приближений для  $M_n$  и  $f_n$  (см. рис. 1). Можно заключить, что сделанное преобразование дает стабильное отношение моментов при  $n^{mom} < 20$ , и на этот результат слабо влияет вариация порога континуума  $s_{th}$ :  $\delta n_{th} \simeq 0,5$ , а более существенен порог масс кварков<sup>4</sup>. Итак, это приближение может приводить к точности, близкой к 10%, при оценке лептонных констант. Безусловно, абсолютная величина ошибки интегрального представления связана с низкими номерами возбуждений, а их относительный вклад возрастает с увеличением номера момента, когда высшие возбуждения подавлены.

Как это было сделано для нерелятивистского приближения, можно ввести в рассмотрение систематические факторы для интегрального представления моментов резонансного вклада  $Z_{int}^{Q\bar{Q}}(n^{mom}, s_{th})$ . В отмеченной области параметров  $n^{mom}$  и  $s_{th}$  эти факторы близки к постоянным величинам (см. рис. 1)

$$Z_{int}^{b\bar{b}}(n^{mom}, s_{th}) = 1,19 \pm 0,02, \quad Z_{int}^{c\bar{c}}(n^{mom}, s_{th}) = 1,29 \pm 0,05. \quad (42)$$

Еще раз отметим, что проделанное преобразование — в чистом виде феноменологическое представление экспериментальных данных.

<sup>4</sup>С высокой точностью область стабильности интегрального представления достигается при  $n^{mom} < 10$ .



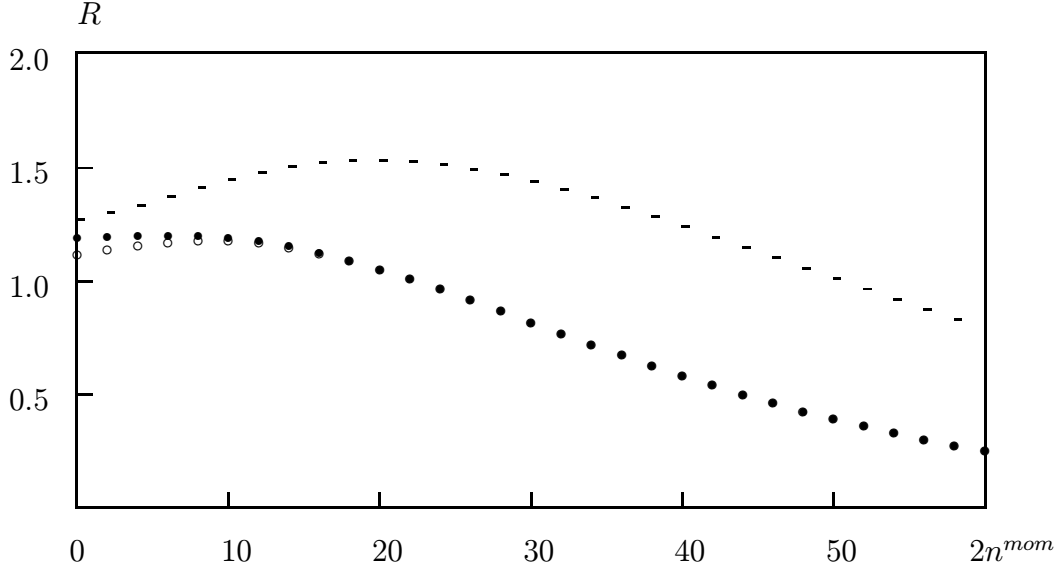


Рис. 1. Отношение моментов спектральной плотности для векторных резонансов боттомония, рассчитанных для дискретных и непрерывных состояний,  $R = M^{dis}(n^{mom})/M^{con}(n^{mom})$ . Темные и светлые точки соответствуют  $n_{th} = 4$  и  $n_{th} = 4, 5$ , когда  $m_b = (4, 60 \pm 0, 01)$  ГэВ. Штрихи показывают отношение для  $m_b \approx 4, 64$  ГэВ. Параметр фитирования кинетической энергии тяжелых кварков равен  $0, 40 \pm 0, 03$  ГэВ.

Далее, производные по  $q^2$  от усредненного вклада резонансов в (40) и (41) могут быть записаны при  $q^2 = 0$ , как

$$\frac{(-1)^{n^{mom}}}{n^{mom}!} \frac{d^{n^{mom}}}{dq^{2n^{mom}}} \langle \Pi_{V,P}^{(res)}(0) \rangle = b_{V,P}(n^{mom}) Z_{int}^{Q\bar{Q}}(n^{mom}, s_{th}) \int \frac{ds}{s^{(n^{mom}+1)}}, \quad (43)$$

где

$$b_V(n^{mom}) = \langle s f_{V_{n(s)}}^2 \frac{dn}{ds} \rangle |_{n^{mom}}, \quad (44)$$

$$b_P(n^{mom}) = (m_1 + m_2)^{-2} \langle s^2 f_{P_{n(s)}}^2 \frac{dn}{ds} \rangle |_{n^{mom}}, \quad (45)$$

и усреднение выполняется с весовыми функциями, зависящими от номера момента спектральной плотности  $n^{mom}$ , и они показаны в правой части (43). С ростом  $n^{mom}$  величина  $b_V$  будет стремиться к своему значению на основном состоянии

$$b_V \rightarrow \frac{1}{2} (m_1 + m_2) f_{V_1}^2 \left[ \frac{dM_n}{dn}(n=1) \right]^{-1}, \quad (46)$$

где мы используем  $M_1 \approx m_1 + m_2$ . Конечно, разность между массой основного состояния и суммой масс кварков становится существенной при больших значениях

номера момента  $n^{mom}$ , где энергия связи кварков определяется величиной глюонного конденсата, скажем, в дополнение к чисто пертурбативному взаимодействию. Для боттомония при  $2n^{mom} \simeq 15 - 20$  точность приближения (46) меньше, чем 10%.

Далее заметим, что в рассматриваемой области  $2 < n^{mom} < n_l$  используется постоянное значение пертурбативной плотности, так что при наибольших допустимых величинах  $n^{mom}$  находим

$$\frac{f_{V_1}^2}{M_1} = \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{dM_n}{dn}(n=1) \left(\frac{4\mu}{M_1}\right)^2 H_V Z_{\text{sys}}, \quad (47)$$

где  $Z_{\text{sys}} = Z_{\text{nr}}^{Q\bar{Q}}/Z_{\text{int}}^{Q\bar{Q}}$  слабо зависит от номера момента и порога адронного континуума.

Более того, в исследуемой области умеренных номеров моментов спектральной плотности пертурбативные части могут быть при  $q^2 = 0$  записаны в виде

$$\frac{(-1)^{n^{mom}}}{n^{mom}!} \frac{d^{n^{mom}}}{dq^{2n^{mom}}} \Pi_{P,V}^{(pert)}(0) = \frac{\alpha_s}{2\pi} 16\mu^2 H_{P,V} Z_{\text{nr}}^{Q\bar{Q}}(n^{mom}, s_{\text{th}}) \int \frac{ds}{s^{(n^{mom}+1)}}. \quad (48)$$

Сравнивая (48) с (43), можно заключить, что при  $2 < n^{mom} < n_l$  величины  $b_{P,V}$  должны быть независимы от  $n^{mom}$  с точностью меньше, чем 5%. В качестве ведущего приближения можно установить квазилокальные правила сумм<sup>5</sup>

$$\Im m \langle \Pi^{(hadr)}(s) \rangle = \Im m \Pi^{(QCD)}(s), \quad (49)$$

с точностью, которая зависит от точки резонансной области, так что систематическая ошибка в (49) равна 5% для низлежащего резонанса и 15% для резонанса, ближайшего к порогу распада на пару тяжелых мезонов. Эта ошибка приводит к дополнительной неопределенности для лептонных констант,  $\Delta f/f \approx 3\%$  и 8% для описанных резонансов соответственно. С учетом (30), (40) и (41) уравнение (49) дает в физических точках  $s_n = M_n^2$

$$\frac{f_n^2}{M_n} = \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{dM_n}{dn} \left(\frac{4\mu}{M_n}\right)^2 H_V Z_{\text{sys}}, \quad (50)$$

где мы определили  $f_n = f_{Vn}$ . Заметим, что в реальных тяжелых кваркониях ( $\bar{b}b$ ), ( $\bar{b}c$ ) и ( $\bar{c}c$ ) зависимость от масштаба правая часть (50) примерно является постоянной (см. численные оценки ниже)

$$\alpha_s H_V Z_{\text{sys}} \left(\frac{m_1 + m_2}{M_1}\right)^2 \approx \text{const.}$$

---

<sup>5</sup>Заметим, что вычисленная мнимая часть для вклада резонансов не предполагается равной истинному физическому выражению, и она не может считаться описывающей точный адронный вклад. Как обычно в правилах сумм, предполагается только, что вычисленное выражение может быть в качестве приближения использовано для оценки реальной части коррелятора. В данном случае считается, что расчетная часть близка к *усредненной* (а не точной) адронной части (см. (49)). Несмотря на отсутствие явной зависимости от параметров схемы правил сумм ( $n^{mom}$ ,  $s_{\text{th}}$ ), смысл выражения (49) строго определен только в отмеченной области номеров моментов и с указанием схемной неопределенности, описанной в тексте.

Аналогичные соотношения могут быть выведены для псевдоскалярных состояний, так что получим

$$f_{P_n} = f_n \left( 1 + \frac{2\alpha_s^H}{3\pi} \right) \frac{m_1 + m_2}{M_n}. \quad (51)$$

### 1.5. Масштабные соотношения

Как было отмечено во введении, плотность состояний тяжелого кваркония с заданными квантовыми числами не зависит от ароматов тяжелых кварков. Наиболее явное выражение эта регулярность спектров масс мезонов с тяжелыми кварками находит в рамках нерелятивистских потенциальных моделей.

Как было показано в [36], непертурбативные эффекты в спектроскопии тяжелого кваркония не могут быть описаны в рамках потенциальных моделей, так как корректное описание должно учитывать запаздывание взаимодействия с конденсатами. Тем не менее, потенциальные модели вполне подходят для феноменологических исследований, потому что они способны воспроизводить модельные формулы для ряда величин, использованных в качестве входных параметров (уровни масс, например). Следовательно, потенциальные модели могут рассматриваться в качестве феноменологически осмысленных параметризаций некоторых экспериментальных величин, но они не могут восстановить некий истинный потенциал, который в действительности не существует из-за непотенциального характера непертурбативных эффектов в целом.

Как было показано в [38], КХД-мотивированные независимые от аромата статических источников потенциалы тяжелых кварков с кулоноподобным взаимодействием на малых расстояниях и с линейнорастущим удерживающим потенциалом на больших расстояниях (Корнельская модель [17], потенциал Ричардсона [39], модель Бухмюллера — Тая [40]) в области средних расстояний между тяжелыми кварками в чармонии ( $c\bar{c}$ ) и боттомонии ( $b\bar{b}$ )

$$0,1 \Phi_M < r < 1 \Phi_M, \quad (52)$$

допускают (с точностью до аддитивного сдвига) параметризации в виде логарифмического [41] и степенного [42] законов, обладающих простыми масштабными свойствами,

$$V_L(r) = c_L + d_L \ln \Lambda r, \quad (53)$$

$$V_M(r) = -c_M + d_M (\Lambda r)^k. \quad (54)$$

По теореме вириала для средних значений кинетической энергии в потенциалах (53), (54) можно, соответственно, получить

$$\langle T_L \rangle = d_L/2 = \text{const.}, \quad (55)$$

$$\langle T_M \rangle = \frac{k}{k+2} (c_M + E), \quad (56)$$

причем  $|E| \ll c_M$ ,  $k \ll 1$ , так что с точностью до малой энергии связи кварков в кварконии кинетическая энергия кварков в кварконии практически постоянная величина, не зависящая от ароматов кварков,

$$\langle T_M \rangle \simeq \text{const.} \quad (57)$$

Согласно теореме Фейнмана–Хеллманна

$$\frac{dE}{d\mu_{12}} = - \frac{\langle T \rangle}{\mu_{12}}, \quad (58)$$

где  $\mu_{12}$  — приведенная масса тяжелых кварков ( $Q_1\bar{Q}_2$ ), получим при условии (55) для разности энергий двух уровней

$$E(\bar{n}, \mu_{12}) - E(n, \mu_{12}) = E(\bar{n}, \mu'_{12}) - E(n, \mu'_{12}), \quad (59)$$

т.е. плотность уровней энергии системы ( $Q_1\bar{Q}_2$ ) не зависит от масс (ароматов) тяжелых кварков

$$\frac{dn}{dM_n} = \phi(n), \quad (60)$$

где  $\phi(n)$  не зависит от  $\mu_{12}$ , что достаточно хорошо подтверждается эмпирически (см. Табл. 1).

Таблица 1. Разность масс (в МэВ) для легчайших векторных состояний с заданным составом валентных кварков.

Состояние	$\Upsilon$	$\psi$	$\phi$
$\Delta M$	563	588	660

Квантование S-волновых нерелятивистских систем с логарифмическим и степенным потенциалами по Бору–Зоммерфельду дает

$$\frac{dM_n^L}{dn} = \frac{2T}{n} = \frac{1}{n} \frac{dM_n}{dn} (n=1), \quad (61)$$

$$\frac{dM_n^M}{dn} = V_0 \frac{1}{n} \left( \frac{n^2 \mu_0}{\mu} \right)^{k/(2+k)}. \quad (62)$$

Так как  $k \ll 1$ , плотность S-волновых состояний в потенциале Мартэна только логарифмически зависит от приведенной массы  $\mu_{12}$ . С той же точностью можно утверждать, что (61) приблизительно справедливо в системах с потенциалом Мартэна.

Описанные свойства потенциала тяжелых кварков найдены феноменологически. Они обуславливают высокую точность потенциальных моделей для расчетов масс тяжелых кваркониев без учета расщепления, зависящего от спина, так что

$\delta m(nL) \simeq 30$  МэВ. Еще раз отметим, что масштабные свойства (55), (57) и (61) являются ведущим приближением в фитировании экспериментально измеренных масс уровней тяжелого кваркония.

Таким образом, для лептонных констант S-волновых кваркониев имеет место масштабное соотношение

$$\frac{f_n^2}{M_n} \left( \frac{M_n}{M_1} \right)^2 \left( \frac{m_1 + m_2}{4\mu_{12}} \right)^2 = \frac{c}{n}, \quad (63)$$

независимо от ароматов тяжелых кварков.

Вывод о независимости правой части (63) от ароматов кварков может быть сделан без использования результатов потенциальных моделей, так как приближение, когда разность между массами уровней в тяжелом кварконии не зависит от аромата, является феноменологическим наблюдением, следующим из экспериментальных данных и ведущим к независимости плотности состояний от ароматов тяжелых кварков. Подробное обсуждение регулярности в спектрах масс тяжелых кваркониев можно найти в следующей главе.

## 1.6. Численный анализ масштабных соотношений

Соотношение (63), связывающее лептонные константы кваркониев с различным кварковым составом, находится в прекрасном согласии с данными по константам систем со скрытым ароматом ( $c\bar{c}$ ,  $b\bar{b}$ ), где  $4\mu/M \simeq 1$  (см. Табл. 2).

Таблица 2. Экспериментальные значения лептонных констант (в МэВ) для кваркониев в сравнении с оценками в квазилокальных правилах сумм (КПС).

Величина	Эксп.	КПС
$f_\phi$	$232 \pm 5$	$245 \pm 12$
$f_\psi$	$409 \pm 13$	$404 \pm 20$
$f_\gamma$	$690 \pm 14$	$690 \pm 35$

Пренебрегая энергией возбуждения по сравнению с массами кварков, получим

$$\frac{f_{n_1}^2}{f_{n_2}^2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (64)$$

Взяв значение лептонной константы 1S-уровня в качестве исходного параметра, были рассчитаны константы высших nS-возбуждений в чармонии и боттомонии, которые вполне согласуются с имеющимися данными (см. жирные кривые на рисунке 2, где мы не учитывали отклонение величины  $M_n/M_1$  от единицы. Однако такое отклонение может быть существенно в системе ( $\bar{c}c$ )). Легко найти модификацию (64)

$$\frac{f_{n_1}^2}{f_{n_2}^2} = \frac{n_2}{n_1} \frac{M_{n_2}}{M_{n_1}}. \quad (65)$$

Лептонные константы, пересчитанные по соотношению (65), представлены тонкими кривыми на рис. 2, так что можно увидеть величину неопределенности, обусловленную приближением малой величины возбуждения.

Отметим, что  $\psi(3770)$  и  $\psi(4040)$ -состояния чармония, как полагают, являются результатом перемешивания 3D- и 3S-состояний, так что D-волна доминирует в  $\psi(3770)$ , а смешивание волновых функций 3D- и 3S-состояний сопровождается лишь малым сдвигом масс, и мы полагаем  $M_3 = M_{\psi(4040)}$  и  $f_3^2 = f^2(3770) + f^2(4040)$ .

Эти оценки показывают, что полученные квазилокальные правила сумм могут вполне надежно применяться к системам с тяжелыми кварками.

Таким образом, можно заключить, что в рамках этих правил сумм удастся вывести универсальные масштабные соотношения для лептонных констант связи тяжелых кваркониев.

Далее, используя масштабные соотношения, можно сделать предсказания для констант связи системы  $(\bar{b}c)$  (см. Табл. 3), которые находятся также в согласии с оценками лептонной константы основного состояния, выполненными в рамках других схем правил сумм КХД [43].

Таблица 3. Лептонные константы векторных и псевдоскалярных состояний nS-уровней системы  $(\bar{b}c)$ ,  $f_n$  и  $f_n^P$ , вычисленные в правилах сумм по масштабному соотношению; погрешность 6%.

n	$f_n$ , МэВ	$f_n^P$ , МэВ
1	385	397
2	260	245

### 1.7. Константа $f_{B_c}$

Потенциалы, мотивированные КХД, имеют линейный рост на больших расстояниях и кулоноподобное поведение на коротких. При этом форма потенциала в

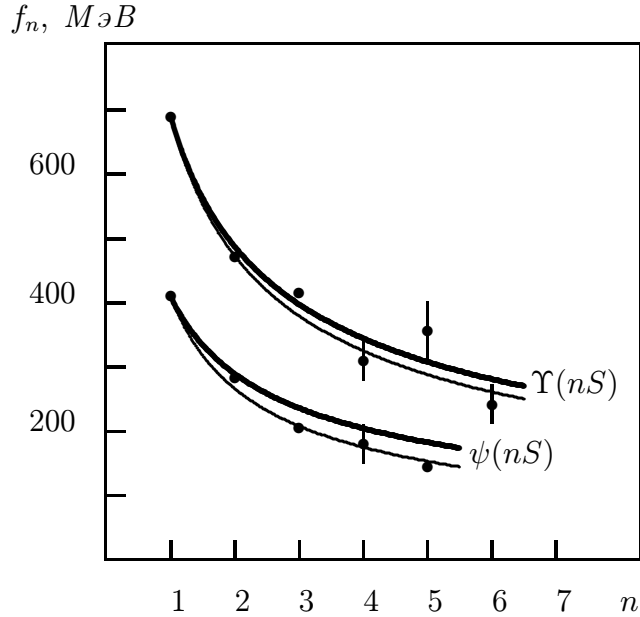


Рис. 2. Рассчитанная в КПС зависимость лептонных констант nS-уровней боттомония и чармония и экспериментальные значения  $f_n$ .

области смены пертурбативного режима на непертурбативный с ростом расстояния между кварками совпадает с формой логарифмического или степенного потенциалов, так что точность предсказания уровней энергии в тяжелых кваркониях, в том числе и для системы  $(\bar{b}c)$ , задается величиной 30 МэВ.

Глобальные же свойства потенциалов, т.е. их асимптотическое поведение в граничных точках  $r \rightarrow \infty$ ,  $r \rightarrow 0$ , существенны при определении констант связи состояний, таких как, например, лептонные константы связи  $f$  для  $nS$ -уровней. В ведущем приближении величина  $f$  не зависит от спинового состояния уровня и задается значением радиальной волновой функции в начале координат  $R(0)$ ,

$$\tilde{f}_n = \sqrt{\frac{3}{\pi M_n}} R_{nS}(0).$$

С учетом жестких глюонных поправок константы связи векторного и псевдоскалярного состояний равны

$$f_n^{V,P} = \tilde{f}_n \left( 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \ln \frac{m_1}{m_2} - \delta^{V,P} \right) \right), \quad (66)$$

где  $m_{1,2}$  — массы кварков,  $\delta^V = 8/3$ ,  $\delta^P = 2$ , а константа связи КХД определяется на масштабе глюонной виртуальности, задаваемой массами кварков [33].

Значения волновых функций тяжелого кваркония существенны при рассмотрении рождения и распадов их состояний в рамках кварковых моделей мезонов. Однако, как уже указывалось выше, точность потенциальных моделей для рассматриваемых величин весьма низка, и неопределенность выражается фактором, достигающим двойки.

Правила сумм КХД позволяют определять лептонные константы состояний тяжелого кваркония со значительно лучшей точностью. Стандартные схемы правил сумм дают возможность вычислять константы основного состояния для векторного и псевдоскалярного токов с учетом поправок от кварк-глюонных конденсатов, имеющих степенную форму по обратной массе тяжелых кварков [10]. Интегральное представление для вклада резонансов, лежащих ниже порога распадов на пару тяжелых мезонов, в области номеров моментов спектральной плотности двухточечного коррелятора токов, где несут вклад от конденсатов, позволяет использовать регулярность плотности состояний кваркония, указанную выше, и установить масштабные соотношения для лептонных констант кваркониев с различным кварковым составом и возбужденных состояний.

При вычислении величин  $R(0)$ , которые входят в качестве параметров статических кварковых моделей при рассмотрении распадов и образования мезонов, по лептонным константам, вычисленным в правилах сумм, возникает дополнительная неопределенность, связанная с выбором шкалы, задающей константу связи КХД при учете жесткой глюонной поправки. Зависимость от такого выбора указывает на значение высших порядков пертурбативного приближения. Полагая, что в  $\overline{\text{MS}}$ -схеме шкала близка к  $\mu^2 = m_1 m_2 e^{-11/12}$ , получим значения  $R(0)$ , из которых видно,

что предсказания правил сумм и потенциальных моделей Мартэна и  $BT$  находятся в разумном согласии друг с другом (см. также Табл. 4, 5).

Таблица 4. Лептонная константа  $B_c$ -мезона, полученная в различных потенциальных моделях (точность  $\sim 15\%$ ), в МэВ.

Модель	Мартэн	Кулон	[45]	[44]	[46]	[47,48]	[49]
$f_{B_c}$	510	460	570	495	410	600	500

Таблица 5. Лептонная константа  $B_c$ -мезона, полученная в правилах сумм КХД, в МэВ.

Модель	[54]	[50]	[51]	[52]	[55]	[56]	КПС
$f_{B_c}$	375	400	360	300	300	450	385

Таким образом, наиболее надежная оценка  $f_{B_c}$  в правилах сумм получается при использовании масштабного соотношения для лептонных констант кваркониев, которое согласуется с результатами потенциальных моделей.

### 1.8. Оценка $\alpha_s$

В рамках Стандартной Модели константа сильного взаимодействия, измеренная в пике  $Z$ -бозона на LEP,  $\alpha_s(m_Z^2) \approx 0,125$  долгое время по имеющимся данным была заметно больше  $\alpha_s(m_Z^2) \approx 0,11$ , которая извлекалась из низкоэнергетических данных [57], таких как глубокоэластичное рассеяние лептонов на адронах [58] (правила сумм Гросса – Ллевеллин-Смита и эволюция по  $Q^2$  структурных функций), распады  $\Upsilon$ , в правилах сумм КХД для системы  $(\bar{b}b)$  и в вычислениях спектра масс тяжелого кваркония на решетках. Подобное расхождение между измерениями LEP при  $Q^2 \sim 10^4$  ГэВ<sup>2</sup> и величиной, ожидаемой из КХД при более низких энергиях ( $Q^2 \sim 10^2$  ГэВ<sup>2</sup>), могло бы служить указанием на виртуальные эффекты "новой" физики на масштабах больших энергий, которая не укладывается в схему Стандартной Модели, при энергиях  $Z$ -бозона [59].

В работе [33] были рассмотрены правила сумм КХД для лептонных констант векторных состояний тяжелого кваркония  $(\bar{b}b)$  для прецизионного извлечения константы сильного взаимодействия и массы  $b$ -кварка. М. Волошин использовал схему моментов спектральной плотности поперечного коррелятора векторных токов в нерелятивистском приближении, так что было получено  $\alpha_s(m_Z^2) = 0,109 \pm 0,001$ , где указана лишь статистическая ошибка. С целью исследования методической устойчивости результата по измерению  $\alpha_s(m_Z^2)$  в правилах сумм для  $(\bar{b}b)$  представляет интерес рассмотрение этой проблемы в других схемах.



В данном параграфе мы получаем  $\alpha_s(m_Z^2) = 0,118 \pm 0,003$  из данных по константам векторных nS-уровней ( $\bar{b}b$ ) в квазилокальных правилах сумм и показываем, что основная неопределенность в определении величины константы связи КХД при энергиях боттомония связана с выбором точки нормировки кулоноподобного обмена между кварками, так что  $\delta\alpha_s(m_Z^2) = 0,010$ .

В основе оценки лежит соотношение для лептонных констант  $f_n$  векторных состояний

$$\frac{f_n^2}{M_n} = \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{dM_n}{dn} \left( \frac{4\mu_{12}}{M_n} \right)^2 H_V Z_{\text{sys}}. \quad (67)$$

Масштаб, задающий величину константы в кулоноподобном обмене, определяется величиной среднего квадрата импульса кварка в мезоне, так что мы полагаем

$$\alpha_s = \alpha_s^{\overline{\text{MS}}}(2T\mu_{12}),$$

а в факторе жесткой глюонной поправки  $H_V$  константа задается массами кварков, так что

$$\alpha_s^H = \alpha_s^{\overline{\text{MS}}}(\sqrt{m_1 m_2}).$$

Для оценки зависимости результата от точки нормировки мы используем также процедуру BLM. В  $\overline{\text{MS}}$ -схеме перенормировки величина  $\alpha_s^{(\text{BLM})}$  определяется выражением

$$\alpha_s^{(\text{BLM})} = \alpha_s^{\overline{\text{MS}}}(e^{-5/3}\bar{p}_Q^2), \quad (68)$$

где  $\bar{p}_Q^2$  — средний квадрат передачи импульса между кварками, так что

$$\bar{p}_Q^2 = \langle (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 \rangle = 2\langle \mathbf{p}_{1,2}^2 \rangle = 4\langle T \rangle \mu_{12}. \quad (69)$$

В жесткой глюонной поправке к коррелятору векторных токов имеем для  $m_1 = m_2 = m_Q$  [33]

$$\alpha_s^{H(\text{BLM})} = \alpha_s^{\overline{\text{MS}}}(e^{-11/12}m_Q^2). \quad (70)$$

Фактор  $Z_{\text{sys}} = Z_{\text{nr}}/Z_{\text{int}}$  близок к единице, и он определяет систематическую поправку за счет нерелятивистского приближения для вклада кварковой петли с учетом  $\alpha_s/v$ -членов кулоновского типа ( $Z_{\text{nr}}$ ) и за счет интегрального представления вклада резонансов в адронную часть правил сумм ( $Z_{\text{int}}$ ). Величина  $Z_{\text{sys}}$  слабо зависит от номера момента, так что для основного состояния ( $\bar{b}b$ ) в области стабильности  $Z_{\text{int}}$  ( $m_b = (4,58 \pm 0,03)$  ГэВ) имеем

$$Z_{\text{sys}} = 0,90 \pm 0,03. \quad (71)$$

В Табл. 6 приведены значения систематических факторов в зависимости от масс кварков (область стабильности  $Z_{\text{int}}$  для системы ( $\bar{c}c$ ) —  $m_c = (1,41 \pm 0,04)$  ГэВ).

Для плотности состояний  $dn/dM_n$  в тяжелом кварконии имеем явное выражение

$$\frac{dM_n}{dn} = \frac{2T}{n}. \quad (72)$$

Таблица 6. Систематические факторы в квазилокальных правилах сумм в зависимости от масс кварков (в ГэВ).

$m_b$	$Z_{\text{int}}^{(3)}$	$Z_{\text{nr}}^{(3)}$	$m_c$	$Z_{\text{int}}^{(3)}$	$Z_{\text{nr}}^{(3)}$
4,55	1,13	1,09	1,20	0,74	1,42
4,58	1,19	1,09	1,30	0,96	1,36
4,61	1,26	1,09	1,35	1,10	1,33
4,66	1,39	1,08	1,41	1,29	1,30
4,72	1,57	1,07	1,48	1,58	1,26

Из (72) следует, что

$$T = \frac{M_2 - M_1}{\ln 4}, \quad (73)$$

где  $M_n$  — масса  $nS$ -уровня;  $M_n = (3M_{V_n} + M_{P_n})/4$ ;  $M_{V,P}$  — массы векторного и псевдоскалярного состояний соответственно. Из данных о массах чармония и боттомония следует, что

$$T = (415 \pm 20) \text{ МэВ.}$$

В данном параграфе мы исследуем константы векторных состояний, поэтому в качестве параметра  $T$  используется величина задаваемая экспериментальными значениями масс  $\Upsilon(nS)$  и  $\psi(ns)$ ,  $n = 1, 2$ .

Как было показано, величина

$$a_Q = \alpha_s H_V \left( \frac{2m_Q}{M_1} \right)^2 Z_{\text{sys}}$$

с высокой точностью не зависит от аромата тяжелого кварка, что приводит к масштабным соотношениям для лептонных констант. Согласно (67), эмпирическая величина

$$a_Q = \pi \frac{f_1^2}{M_1} \frac{\ln 2}{M_2 - M_1}$$

дает возможность определить  $\alpha_s$ . При этом следует учесть, что лептонная ширина  $\Upsilon(1S) \rightarrow l^+l^-$  определяется эффективной константой тонкой структуры  $\bar{\alpha}_{em}$  на масштабе  $M_\Upsilon$  [33], так что мы полагаем  $f_1 = (690 \pm 15) \text{ МэВ}$ .

Экспериментально имеем

$$a_b = 0,195 \pm 0,007, \quad a_c = 0,20 \pm 0,01.$$

С двухпетлевой точностью для “бегущей” константы  $\alpha_s$  (прескрипцию для зависимости  $\Lambda_{QCD}$  от числа активных ароматов смотри в [57]) находим<sup>6</sup> что

$$\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}(m_Z^2) = 0,118 \pm 0,003, \quad (74)$$

<sup>6</sup>Аналогичное рассмотрение в однопетлевом приближении для  $\alpha_s$  приведено в [24].

так что  $\Lambda^{(5)} = (205 \pm 35)$  МэВ. Ошибка в (74), главным образом, статистическая. Систематическая неопределенность обусловлена выбором точки нормировки константы КХД при энергиях тяжелого кваркония. Так, разумная вариация этого параметра, к примеру, выбор фиксации масштаба в схеме VLM приводит к  $\alpha_s^{\overline{\text{MS}}(BLM)}(m_Z^2) = 0,106 \pm 0,003$ , что находится в согласии с результатом М.Б.Волошина  $\alpha_s^{\overline{\text{MS}}(BLM)}(m_Z^2) = 0,109 \pm 0,001$ , так что мы оцениваем методическую точность в в однопетлевом приближении как  $\delta\alpha_s(m_Z^2) = 0,010$ .

Заметим, что недавнее применение выбора масштаба VLM к методу измерения  $\alpha_s$  по “форме адронных событий” дало  $\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}(m_Z^2) = 0,109 \pm 0,008$  [60]. Высокая точность извлечения величины  $\alpha_s$  в правилах сумм для  $(\bar{b}b)$  обусловлена большой ролью кулоноподобных  $\alpha_s/v$ -поправок, которые приводят к линейной зависимости квадрата лептонной константы от величины константы связи на масштабе средней передачи импульса между кварками в тяжелом кварконии.

В работе [61] были использованы  $O(\alpha_s^2)$ -выражения для корреляторов векторных токов для извлечения константы КХД и массы  $b$ -кварка из данных по боттомонию. При этом использовался анзац для вклада кулоноподобного обмена между кварками с масштабом, задаваемым относительным импульсом кварков. Результат такого рассмотрения согласуется с величиной, полученной в данном параграфе.

Таким образом, мы показали, что использование различных схем правил сумм для лептонных констант векторных состояний тяжелого кваркония  $(\bar{b}b)$  приводит к систематически устойчивому результату  $\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}(m_Z^2) = 0,118 \pm 0,003$ , который согласуется с величиной, измеренной в полюсе  $Z$ -бозона на LEP.

**Двухпетлевое приближение.** Коэффициент Вильсона в операторном разложении NRQCD для матричного элемента векторного тока аннигиляции тяжелых кварков с равными массами после двухпетлевой перенормировки имеет вид [62]

$$K_V(\alpha_s, m_Q/\mu) = 1 - 2\frac{C_F\alpha_s(m_Q)}{\pi} + c_2(m_Q/\mu) \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2, \quad (75)$$

где  $C_F = (N^2 - 1)/2N = 4/3$ , а  $N = 3$  — число цветов кварков, так что аномальная размерность  $K_V$  в однопетлевом приближении равна нулю и

$$\gamma_K = \frac{dK_V}{d\ln\mu} = \gamma_2 \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 + O(\alpha_s^3),$$

и ( $C_A = 3$ )

$$\gamma_2 = -C_F(2C_F + 3C_A)\frac{\pi^2}{6},$$

а полное выражение для  $K_V$  в точке сшивки КХД и NRQCD  $\mu = m_Q$  можно найти в [62]. В правилах сумм мы используем  $H_V = K_V^2$ .

Таким образом, становится ясно, что константа кулоноподобного обмена между нерелятивистскими кварками в однопетлевом приближении определяется на масштабе  $\mu_0$ , который не зависит от масштаба факторизации вильсоновских коэффициентов и матричных элементов в NRQCD, так как фактор  $H_V$  не зависит от  $\mu$ ,

но в двух петлях такая зависимость появляется и кулоноподобный вклад определяется на масштабе  $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\mu)$ . Следует отметить, что  $\gamma_2$  — отрицательно, так что  $\alpha_s(\bar{\mu}^2)$  растет при увеличении  $\mu$ . Очевидно, имеется точка, где  $\alpha_s(\bar{\mu}^2) = \alpha_s(\mu^2)$ , в которой мы будем проводить расчет правил сумм. Чтобы определить эту точку, заметим, что средний квадрат передачи импульса между нерелятивистскими кварками определяется выражением, учитывающим пертурбативный вклад с учетом фиксации шкалы факторизации NRQCD [68]

$$\langle \mathbf{p}^2 \rangle = \bar{\mu}^2 + \frac{4}{3\pi} \alpha_s(\mu^2) \mu^2,$$

причем  $\langle \mathbf{p}^2 \rangle = \mu_0^2$ . Полагая  $\bar{\mu} = \mu$ , получаем

$$\mu^2 = \frac{\mu_0^2}{1 - \frac{4}{3\pi} \alpha_s(\mu^2)}.$$

В однопетлевом приближении мы полагали феноменологически  $\mu_0^2 = Tm_Q$ . Теперь же сравнение результатов расчетов константы связи КХД в рамках правил сумм в одной и двух петлях позволяют зафиксировать  $\mu_0$ , так как эти расчеты могут находиться в согласии друг с другом только при определенном значении  $\mu_0$ . Численные оценки, как оказывается, подтверждают, что  $\mu_0^2 = Tm_Q^0$ , где  $m_Q^0$  определяет порог кваркового вклада в правила сумм (см. ниже).

Во втором порядке по  $\alpha_s$  следует учесть зависимость массы тяжелого кварка от шкалы факторизации, так что пороговая энергия кваркового вклада за счет кулоноподобной связи определяется выражением

$$2m_b^0 = 2m_b(\mu) - \frac{4}{9} \alpha_s^2(\mu^2) m_b(\mu),$$

где  $m_b^0$  в правилах сумм не зависит от  $\mu$ , и в рассматриваемом подходе мы имеем, как и прежде,  $m_b^0 \approx 4.58$  ГэВ.

В этом же порядке по константе связи КХД следует особо отметить роль кулоновских связанных состояний в узкой щели  $2m_b - 2m_b^0$ . Эти состояния в рассматриваемой области номеров моментов спектральной плотности допускают представление суммы по резонансам в интегральном виде, причем спектральная плотность в интегральном представлении в точности совпадает с константой, определяемой на пороге вклада континуума, так что в принятой аппроксимации спектральной плотности ее пороговым значением формально не нужно вводить никаких изменений в теоретическую часть правил сумм (другими словами, квазилокальные правила сумм для чисто кулоновской системы с ее энергетической плотностью состояний обращаются в тождество). Но при этом можно умозрительно выделить в области интегрирования домен резонансов и говорить, что с ростом номера момента спектральной плотности относительный вклад кулоновских резонансов (т.е. области, наименее подавленной весом интегрирования  $1/s^n$ ) становится сравнимым с единицей [63]. Численные оценки показывают, что учет вклада кулоновских резонансов очень слабо варьирует величину систематического фактора нерелятивистского представления  $Z_{\text{nr}}$  для  $b$ -кварков, но весьма существенен для  $c$ -кварков.

После сделанных замечаний приведем результаты извлечения параметров КХД в рамках квазилокальных правил сумм с учетом двухпетлевой перенормировки:

$$\alpha_s(m_Z^2) = 0,118 \pm 0,002, \quad m_b(\mu \approx 1,24 \text{ ГэВ}) = (4,76 \pm 0,01) \text{ ГэВ} \quad (76)$$

для системы  $\bar{b}b$ , и

$$\alpha_s(m_Z^2) = 0,116 \pm 0,003, \quad m_c(\mu \approx 0,60 \text{ ГэВ}) = (1,87 \pm 0,04) \text{ ГэВ} \quad (77)$$

для системы  $\bar{c}c$ , в которой видно, что учет  $O(\alpha_s^2)$ -членов весьма значителен, и поэтому трудно судить об устойчивости теории возмущений КХД в разложении NRQCD.

Таким образом, мы показали, что квазилокальные правила сумм в одно- и двухпетлевом приближении позволяют надежно извлекать параметры КХД из данных о системе тяжелого боттомония, и результаты подобных расчетов согласуются с оценками в других подходах.

## 2. Лептонные константы тяжелых мезонов в статическом пределе

В этом разделе мы обобщаем квазилокальные правила сумм на системы, в которых один кварк намного тяжелее другого, что соответствует, например В-мезонам.

В Эффективной теории тяжелых кварков [7], которая широко используется для описания динамики сильных взаимодействий тяжелых кварков, имеется ряд размерных параметров, которые определяют как точность ведущего приближения в пределе бесконечнотяжелых кварков, так и величину степенных поправок по  $\Lambda/m_Q \ll 1$ , где  $\Lambda$  — шкала, определяющая виртуальность тяжелого кварка в адроне. К числу таких важнейших параметров в физике тяжелых мезонов ( $Q\bar{q}$ ) с одним тяжелым кварком относятся: разность масс тяжелого кварка и мезона  $\bar{\Lambda} = M(Q\bar{q}) - m_Q$ , лептонная константа мезона  $f_Q^{\text{stat}}$  в статическом пределе  $m_Q \rightarrow \infty$  и квадрат импульса тяжелого кварка в мезоне  $\mu_\pi^2$ . Так как эти величины определяются КХД-взаимодействиями на больших расстояниях, для их оценок используют непертурбативные методы, среди которых наиболее мощным средством являются правила сумм [10].

Что касается величины  $\bar{\Lambda}$ , то ее оценки в правилах сумм КХД для тяжелых мезонов были сделаны в [64], где  $\bar{\Lambda} = (0,57 \pm 0,07) \text{ ГэВ}$ . Кроме того, “оптические” правила сумм Волошина [65] позволяют получить ограничение [66]

$$\bar{\Lambda} > 2\delta_1(\rho^2 - \frac{1}{4}) \simeq 0,59 \text{ ГэВ}, \quad (78)$$

где  $\rho^2$  — наклон универсальной функции Изгура-Вайза [12], а  $\delta_1$  — разность масс легчайшего векторного S-волнового уровня и P-волнового состояния в системе ( $Q\bar{q}$ ) при  $m_Q \rightarrow \infty$ .

Далее, оценки  $f_B^{\text{stat}}$  в рамках правил сумм КХД и в вычислениях на решетках согласуются друг с другом и приводят к [7]

$$f_B^{\text{stat}} = (240 \pm 40) \text{ МэВ}. \quad (79)$$

В рамках правил сумм получена также оценка среднего квадрата импульса тяжелого кварка в мезоне [7]

$$\mu_\pi^2 = (0, 5 \pm 0, 1) \text{ ГэВ}^2, \quad (80)$$

и ограничение [66]

$$\mu_\pi^2 > 3\delta_1^2(\rho^2 - \frac{1}{4}) \simeq 0, 45 \text{ ГэВ}^2. \quad (81)$$

В предыдущем разделе нами были рассмотрены правила сумм КХД для лептонных констант S-волновых уровней кваркония ( $Q_1\bar{Q}_2$ ), в которых использовался спектр масс состояний, рассчитанный в квазиклассическом приближении. Для 1S-уровня с точностью до систематической неопределенности порядка 10% было получено выражение

$$f_{V,P}^2 \cdot M = \frac{16\alpha_s}{\pi} \mu_\pi^2 \mu_{12} H_{V,P} Z_{\text{sys}}, \quad (82)$$

где  $\mu_{12} = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  — приведенная масса кваркония;  $\mu_\pi^2 = 2\mu_{12} \langle T \rangle$  — средний квадрат импульса кварка в кварконии с массой  $M \simeq m_1 + m_2$ . В (82) константа связи КХД оценивается на масштабе кулоновского обмена между кварками, который рассматривается на пороге образования пары кварков.

Для тяжелого мезона ( $Q\bar{q}$ ) существенную роль играет движение легкого токового кварка в среде кварк-глюонных конденсатов, поэтому наиболее последовательное рассмотрение правил сумм предполагает использование операторного разложения произведения кварковых токов с учетом вакуумных ожиданий операторов высших размерностей. Однако в качестве разумного приближения можно рассмотреть случай, когда влияние конденсатов сводится, главным образом, к появлению эффективной массы легкого кварка. Подобный конституентный кварк можно рассматривать как нерелятивистский объект, движущийся в потенциале статического тяжелого кварка.<sup>7</sup> Так, потенциальные кварковые модели довольно успешно применяются в спектроскопии тяжелых мезонов. Далее, можно рассматривать феноменологические выражения, где не включаются в рассмотрение вклады конденсатов, так как они неявно учитываются посредством введения неких феноменологических параметров типа конституентных масс.

В таком подходе используемое приближение означает, что

$$\mu_{12} = \frac{m_Q \mu_q}{m_Q + \mu_q} \approx \mu_q = \mu \simeq M(Q\bar{q}) - m_Q = \bar{\Lambda}. \quad (83)$$

Введение конституентной массы легкого кварка является, безусловно, дополнительным, но вполне разумным предположением. Она является аналогом непертурбативной величины  $E_c$ , определяющей порог адронного континуума в лапласовской

<sup>7</sup>Такое приближение означает, что легкие степени свободы рассматриваются как единое целое, не имеющее внутренней структуры.

схеме правил сумм HQET.  $E_c$  определяется из принципа стабильности для вычисляемых параметров, таких как лептонная константа. Связь  $E_c$  с  $\bar{\Lambda}$  обсуждается в [7]. Неопределенность оценки  $E_c$  в HQET такая же, как в оценке конституентной массы кварка. В конечноэнергетических правилах сумм, которые согласуются с правилами сумм HQET,  $E_c$  — базисная величина, определяющая различные размерные параметры (см. [67], где приводятся явные выражения). Таким образом, величина  $\mu_{12} \sim \bar{\Lambda}$  имеет достаточную определенность, как и в других подходах.

Так как кварконий рассматривается на пороге образования составляющих его кварков, следует говорить о статическом приближении для тяжелого мезона с одним тяжелым кварком.

$H$ -фактор может быть представлен в следующем виде, учитывающем ренорм-групповые свойства константы связи КХД,

$$H_{V,P}^{\text{RG}} = \left( \frac{\alpha_s(e^{\delta_{V,P}} \mu)}{\alpha_s(m_Q)} \right)^{4/\beta_0(n_f)},$$

где  $\delta_V = 8/3$ ;  $\delta_P = 2$ ;  $\beta_0 = 11 - 2n_f/3$ ;  $n_f$  — число ароматов кварков с массами  $m < m_Q$ . С учетом последнего фактора приходим к известному результату в HQET<sup>8</sup> о масштабном соотношении для лептонных констант тяжелых мезонов в статическом пределе

$$f_{\text{stat}}^2(\mu) \cdot M \cdot \left( \frac{\alpha_s(e^{\delta_P} \mu)}{\alpha_s(m_Q)} \right)^{-4/\beta_0(n_f)} = \text{const.} \quad (84)$$

Таким образом, в рамках квазилокальных правил сумм с использованием спектроскопических данных кваркония удается получить разумный предел для систем с одним тяжелым кварком.

Для тяжелых мезонов в резонансной области находится лишь одно состояние. Легко показать, что в этом случае

$$Z_{\text{sys}} \approx \ln(n_i n_{\text{th}}),$$

причем для статических кварков  $n_i = 1$ . Величина  $n_{\text{th}}$  определяется порогом континуума  $E_c = 0,9 - 1$  ГэВ, так что  $E_c = \mu + 2T \ln(n_{\text{th}})$ . Тогда  $Z_{\text{sys}} = 0,40 \pm 0,06$ . Численные оценки для  $B$ -мезонов дают

$$H_P^{\text{RG}} = 1,008 \pm 0,004, \quad \alpha_s(\mu_\pi^2) Z_{\text{sys}} = 0,35 \pm 0,05$$

и

$$f_B^{\text{stat}} = (310 \pm 60) \text{ МэВ.}$$

## 2.1. Спектроскопия и размерные параметры HQET

В основе разложения операторов по обратной массе тяжелого кварка (HQET и NRQCD) лежит представление о разделении описания тяжелых статических источников и генерируемых ими полей глюонов и легких кварков. В таком случае

<sup>8</sup>С точностью до  $\delta_{V,P}$ , которые в HQET полагаются равными нулю.

ведущим является приближение нерелятивистских тяжелых кварков с независимым от их аромата потенциалом. Тогда массы тяжелых кварков, используемые в спектроскопии тяжелых кваркониев (NRQCD), могут применяться в разложении HQET для тяжелых мезонов с одним тяжелым кварком. В спектроскопии тяжелого кваркония зависимость энергии возбуждения S-волновых состояний от номера уровня и масс кварков является вполне определенной, что может быть использовано для устранения произвольного сдвига потенциальной энергии, который ведет лишь к изменению энергии уровня в  $1/m_Q^2$ -порядке разложения, если ввести в рассмотрение условие независимости масс тяжелых кварков от типа мезона, т.е. использовать шпильку шкалы энергий для тяжелых кваркониев и тяжелых мезонов.

Другими словами, массы тяжелых кварков не могут быть однозначно зафиксированы в спектроскопии тяжелых кваркониев, так как согласно теореме Фейнмана–Хеллманна вариация приведенной массы кварков вызывает лишь малое изменение энергии связи

$$dE = -\langle T \rangle \frac{d\mu_{12}}{\mu_{12}},$$

которое, очевидно, находится за рамками исследуемой точности, когда  $M = m_1 + m_2 + \langle T \rangle + \langle V \rangle$ . Однако произвольный сдвиг масс можно устранить, если использовать такое условие, например, что массы  $\Upsilon(4S)$  и  $\psi(3S)$  практически совпадают с удвоенными массами тяжелых B- и D-мезонов соответственно, где в расчетах HQET стоят те же самые значения масс тяжелых кварков.

В отличие от подобного подхода, в квантовой теории поля источники, излучающие поля, с необходимостью обладают самодействием, что приводит к введению критерия разделения внешнего поля и поля, относящегося к источнику. Формально это означает, что в операторном разложении и операторы, и параметры, типа масс кварков, и коэффициенты Вильсона зависят от масштаба факторизации, который выбирается согласно физическим характеристикам каждой рассматриваемой системы в целях обеспечения быстрой сходимости соответствующих матричных элементов операторных рядов.

В физике тяжелых кварков на практике вводят обрезание мягких глюонов при расчетах пертурбативных диаграмм Фейнмана, так что параметры разложения зависят от этого обрезания  $\lambda$ . Так, при малых вариациях обрезания были получены выражения [68]

$$m_Q(\lambda) - m_Q(\lambda') = -\frac{2}{3}\alpha_s(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda'), \quad (85)$$

$$\mu_\pi^2(\lambda) - \mu_\pi^2(\lambda') = \frac{4}{3\pi}\alpha_s(\lambda) \cdot (\lambda^2 - \lambda'^2). \quad (86)$$

Подобная зависимость приводит к необходимости рассмотрения проблемы сравнения результатов извлечения параметров разложения по обратной массе тяжелых кварков в различных подходах [69]. Тем не менее не зависящий от ароматов кварков потенциал тяжелого кваркония существует при идентичном выборе масштаба нормировки параметров и операторов.



Определим массу тяжелого кварка согласно

$$m_Q = m(Q\bar{q}) - \bar{\Lambda} - \frac{\mu_\pi^2}{2m(Q\bar{q})} + O(1/m_Q^2), \quad (87)$$

где  $\mu_\pi^2$  — средний квадрат импульса кварка в тяжелом мезоне;  $m(Q\bar{q}) = (3m_V + m_P)/4$  — усредненная по спину масса векторного и псевдоскалярного состояний. Мы полагаем, что

$$\mu_\pi^2 = 2\langle T \rangle \mu_{Q\bar{q}}, \quad (88)$$

где  $\mu_{Q\bar{q}}$  — приведенная масс  $Q\bar{q}$ , а  $T$  — кинетическая энергия. Разумный выбор  $\mu_{Q\bar{q}}$  определяется как  $\bar{\Lambda}$ . Значения  $m(Q\bar{q})$  для  $Q = b, c$  и  $q = u, d$  известны экспериментально [57]

$$m_B(1S) = 5.313 \text{ ГэВ}, \quad m_D(1S) = 1.975 \text{ ГэВ}, \quad (89)$$

с точностью лучше, чем 5 МэВ.

В тяжелом кварконию квантование по Бору–Зоммерфельду для  $nS$ -состояний при постоянной  $\langle T \rangle$  дает энергию связи кварков

$$E(n) = C + T \ln \frac{n^2}{\mu_{12}}, \quad (90)$$

где  $C$  — постоянная, не зависящая от ароматов кварков. Уравнение (90) дает зависимость энергии связи от номера возбуждения и масс кварков. Заметим, что квазиклассическое приближение WKB для задачи с трехмерным центральным потенциалом приводит к замене  $n$  на  $n - 1/4$  в (90). Однако, данная замена не приводит к лучшему описанию экспериментальных данных<sup>9</sup> (см. рис. 3). Чтобы изолировать зависимость от  $n$ , мы рассмотрели отношение  $\alpha(n)$

$$\alpha(n) = \frac{M(nS) - M(1S)}{M(2S) - M(1S)} = \frac{\ln n}{\ln 2} \quad (91)$$

в данной модели и

$$\alpha^{\text{WKB}}(n) = \frac{\ln[(4n - 1)/3]}{\ln[7/3]}.$$

<sup>9</sup>Такая же тенденция была замечена и в кулоновском потенциале, где уравнение Бора–Зоммерфельда давало точный результат.

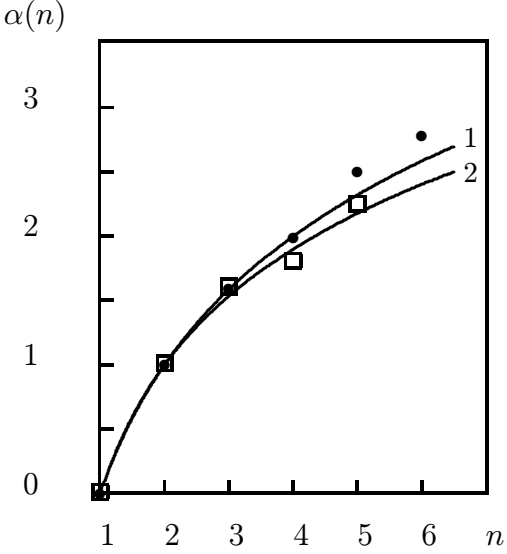


Рис. 3. Экспериментальные значения разностей масс  $nS$ -уровней боттомония (жирные точки) и чармония (квадраты)  $\alpha(n) = [M(nS) - M(1S)]/[M(2S) - M(1S)]$  и зависимости в рассматриваемой модели (кривая - 1) и в приближении WKB (кривая - 2).

Сравнение модельного приближения (91) с экспериментальными величинами и модификацией WKB представлено на рис. 3. Как видно, рассматриваемая модель является более подходящей для точного описания значений  $M(nS)$ , так что параметр  $T$  равен

$$T = (0,415 \pm 0,02) \text{ ГэВ}. \quad (92)$$

Заметим, что в отличие от анализа в [6], мы используем массы возбуждений, усредненные по зависящей от спинов кварков части потенциала, что кажется более резонным. Кроме того, анализ спектров тяжелого кваркония, выполненный в [6] по формулам WKB, приводит к меньшим значениям величины  $T \approx 0,37$  ГэВ.

Масса  $nS$ -уровня определяется по формуле

$$M(nS) = m_1 + m_2 + E(n).$$

В целях удобства введем “начальные” значения  $n_i(\mu_{12})$ , зависящие от приведенных масс и связанные с не зависящей от ароматов постоянной  $C$  в (90)

$$C = -T \ln \frac{n_i^2(\mu_{12})}{\mu_{12}}. \quad (93)$$

Используем экспериментальные данные, сшивающие энергетическую шкалу в тяжелом кварконии и тяжелом мезоне,

$$M_{\Upsilon}(4S) = 2m_B(1S) + \delta_b, \quad M_{\psi}(3S) = 2m_D(1S) + \delta_c,$$

где  $\delta_{b,c}$  — малое отклонение экспериментальных данных от расчетных. Эти уравнения могут быть переписаны в виде<sup>10</sup>

$$2T \ln \frac{n_{\text{th}}(b\bar{b})}{n_i(b\bar{b})} = 2\bar{\Lambda} + \frac{\mu_\pi^2}{m_b} + \delta_b, \quad (94)$$

$$2T \ln \frac{n_{\text{th}}(c\bar{c})}{n_i(c\bar{c})} = 2\bar{\Lambda} + \frac{\mu_\pi^2}{m_c} + \delta_c, \quad (95)$$

где  $n_{\text{th}}(b\bar{b}) = 4$ ,  $n_{\text{th}}(c\bar{c}) = 3$ . Из (93) находим

$$\ln \frac{n_i(b\bar{b})}{n_i(c\bar{c})} = \frac{1}{2} \ln \frac{m_b}{m_c}. \quad (96)$$

Объединяя (88), (94)-(96), получаем

$$\bar{\Lambda} = \frac{m_b m_c}{m_b - m_c} \left\{ \ln \sqrt{\frac{m_b}{m_c} \frac{n_{\text{th}}(c\bar{c})}{n_{\text{th}}(b\bar{b})}} - \frac{\delta_c - \delta_b}{2T} \right\}, \quad (97)$$

где скрыта неявная зависимость масс кварков от  $T$  и  $\bar{\Lambda}$ .

<sup>10</sup>Аналогичная оценка с дополнительным условием  $n_i(b\bar{b}) = 1$  была рассмотрена в [19].

Уравнение (97) может быть решено численно, и оно дает<sup>11</sup>

$$\bar{\Lambda} = (0,63 \pm 0,03) \text{ ГэВ}. \quad (98)$$

Вариация  $\delta = \delta_c - \delta_b = \pm 80$  МэВ дает  $\delta\bar{\Lambda} = \pm 150$  МэВ. Что касается масс кварков в первом порядке по  $1/m_Q$ , то находим

$$m_b = (4,63 \pm 0,03) \text{ ГэВ}, \quad m_c = (1,18 \pm 0,07) \text{ ГэВ}.$$

Дополнительная неопределенность в массе  $c$ -кварка связана с допустимой заменой  $\bar{\Lambda}/m(Q\bar{q}) \rightarrow \bar{\Lambda}/(m(Q\bar{q}) - \bar{\Lambda}) + O(\bar{\Lambda}^2/m_Q^2)$  в выражении для массы тяжелого кварка, т.е. она обусловлена членами второго порядка по обратной массе тяжелого кварка. Параметр  $\mu_\pi^2$  равен  $(0,54 \pm 0,08) \text{ ГэВ}^2$  [70].

Проведенные вычисления позволяют предсказать массы  $nS$ -уровней семейства  $(\bar{b}c)$  ниже порога распада на пару  $BD$ .

$$m_{B_c}(1S) = (6,37 \pm 0,04) \text{ ГэВ}, \quad m_{B_c}(2S) = (6,97 \pm 0,04) \text{ ГэВ}.$$

Положение  $1S$ -уровня немного выше, чем в потенциальных моделях. Это отклонение в основном обусловлено большей величиной параметра  $T$ , но не различием в массах кварков, потому что массы уровней  $(\bar{b}c)$  не очень чувствительны к вариации масс кварков. Используя оценку зависящего от спина расщепления  $1S$ -уровня в  $(\bar{b}c)$ ,  $m(1^-) - m(0^-) \approx 60 - 70$  МэВ, получаем для массы основного псевдоскалярного состояния

$$m_{B_c}(0^-) = (6,32 \pm 0,05) \text{ ГэВ}.$$

Проведенные выше оценки не учитывали пертурбативных вкладов в энергию связи тяжелого кварка и его средний квадрат импульса, которые могут быть учтены в конечном порядке теории возмущений КХД, где, как было указано, возникает зависимость параметров операторного разложения от масштаба факторизации непертурбативных матричных элементов (см. уравнения (85), (86)).

Нетрудно учесть модификацию расчетов в первом порядке по константе связи КХД. Действительно, выделяя зависимость от обрезания импульса глюона, получаем

$$\mu_\pi^2 = 2\langle T \rangle \bar{\Lambda}(\lambda) + \frac{4}{3\pi} \alpha_s(\lambda) \cdot \lambda^2, \quad (99)$$

где  $\Delta\mu_{pert}^2(\lambda) = \frac{4}{3\pi} \alpha_s(\lambda) \cdot \lambda^2$  может быть оценена на характерном адронном масштабе  $\lambda = 1$  ГэВ:

$$\Delta\mu_{pert}^2(\lambda) = (0,215 \pm 0,010) \text{ ГэВ}^2.$$

Тогда

$$\bar{\Lambda}(\lambda) = \frac{m_b m_c}{m_b - m_c} \left\{ \ln \sqrt{\frac{m_b}{m_c}} \frac{n_{th}(c\bar{c})}{n_{th}(b\bar{b})} - \frac{\delta_c - \delta_b}{2T} \right\} - \frac{\Delta\mu_{pert}^2(\lambda)}{2T}, \quad (100)$$

<sup>11</sup>Полученный результат находится в хорошем согласии с ограничениями [66].

где опущена зависимость масс кварков от  $\lambda$ . В итоге,

$$\bar{\Lambda}(1 \text{ ГэВ}) = (0, 22 \pm 0, 02) \text{ ГэВ}, \quad \mu_\pi^2(1 \text{ ГэВ}) = (0, 40 \pm 0, 02) \text{ ГэВ}. \quad (101)$$

Неопределенность в  $\delta = \delta_c - \delta_b$  может быть уменьшена за счет ее связи с вариацией параметра  $T$ , и ее вклад был учтен в данной оценке. Для масс кварков находим

$$m_b(1 \text{ ГэВ}) = (5, 05 \pm 0, 01) \text{ ГэВ}, \quad m_c(1 \text{ ГэВ}) = (1, 63 \pm 0, 02) \text{ ГэВ}.$$

Тогда улучшается согласие оценок масс тяжелого кваркония ( $\bar{b}c$ )

$$\begin{aligned} m_{B_c}(1S) &= (6, 317 \pm 0, 030) \text{ ГэВ}, \\ m_{B_c}(2S) &= (6, 892 \pm 0, 030) \text{ ГэВ}, \\ m_{B_c}(0^-) &= (6, 267 \pm 0, 035) \text{ ГэВ}, \end{aligned} \quad (102)$$

с расчетами в других моделях.

Следует отметить также и модификацию оценки лептонной константы  $B$ -мезона в статическом пределе, рассмотренном в первой главе, за счет введения зависимости от масштаба факторизации, так что используя параметры, рассчитанные в данном разделе, получаем

$$f_B^{\text{stat}}(1 \text{ ГэВ}) = (220 \pm 30) \text{ МэВ}.$$

Таким образом, регулярная структура спектров кваркония позволяет оценить размерные параметры Эффективной теории тяжелых кварков.

### 3. Константы распада тяжелого векторного кваркония на пару тяжелых мезонов

Экспериментальный поиск  $B_c^+$ -мезона на установках с вершинными детекторами (OPAL [71], ALEPH [73], DELPHI [72] и CDF [74]) стимулировал теоретические исследования по спектроскопии тяжелого кваркония ( $\bar{b}c$ ), механизмам его образования в различных взаимодействиях и оценкам ширин различных мод распада как основного состояния, так и возбужденных уровней. Особенностью системы ( $\bar{b}c$ ) является отсутствие аннигиляционных мод распада за счет сильного или электромагнитного взаимодействий, так что основное псевдоскалярное состояние  $B_c^+$  распадается за счет слабого взаимодействия и является долгоживущей частицей с временем жизни  $\tau(B_c^+) = (0, 55 \pm 0, 15) \text{ пс}$ . Ниже порога распада на пару тяжелых мезонов  $BD$  возбужденные уровни кваркония ( $\bar{b}c$ ) радиационно переходят в состояния этого кваркония с меньшей массой. Выше порога пары  $BD$  находится векторное  $B_c^{*+}(3S)$  состояние, распад которого аналогичен  $\Upsilon(4S) \rightarrow B^+B^-$ . Константа последнего распада была рассмотрена в работе [23] в рамках правил сумм для мезонных токов.

В данном разделе мы рассматриваем константу  $g$  распада векторного кваркония, содержащего, вообще говоря, кварки разного аромата, для определенности

обозначений, скажем,  $(\bar{b}c)$ . Этот тяжелый кварконий с массой  $M$ , удовлетворяющей условию  $m_B + m_D < M < m_{B^*} + m_{D^*}$ , распадается на пару тяжелых мезонов  $B^+ D^0$ . Мы выводим масштабное соотношение

$$\frac{g^2}{M} \left( \frac{4\mu_{BD}}{M} \right) = \text{const.},$$

где  $\mu_{BD} = m_B m_D / (m_B + m_D)$  — приведенная масса пары тяжелых мезонов. Постоянная в правой части соотношения одна и та же для распадов  $\Upsilon(4S) \rightarrow B^+ B^-$ ,  $B_c^{*+}(3S) \rightarrow B^+ D^0$  и  $\psi(3770) \rightarrow D^+ D^-$ , где уже  $\mu_{BB} = M_{\Upsilon(4S)}/4$ ,  $\mu_{DD} = M_{\psi(3770)}/4$ .

Далее рассмотрены правила сумм для мезонных токов, получено масштабное соотношение и сделаны численные оценки.

### 3.1. Правила сумм

Рассмотрим векторный ток мезонов

$$J_\mu^{BD}(x) = \frac{i}{2} [B^+(x) \cdot \partial_\mu D^0(x) - \partial_\mu B^+(x) \cdot D^0(x)]$$

и определим вклад этого тока в лептонную константу  $f_{BD}$  векторного кваркония  $(\bar{b}c)$ , лежащего выше порога  $BD$ ,

$$i f_{BD} M \epsilon_\mu^{(\lambda)} e^{ipx} = \langle 0 | J_\mu^{\dagger BD}(x) | V_{(\bar{b}c)}, \lambda \rangle, \quad (103)$$

где  $\lambda$  — поляризация состояния  $V_{(\bar{b}c)}$ ;  $\epsilon_\mu^{(\lambda)}$  — вектор поляризации;  $p$  — импульс  $V_{(\bar{b}c)}$ ;  $p^2 = M^2$ .

Введем формфактор  $\mathcal{F}$  поперечного взаимодействия пары  $BD$  с векторным током  $\mathcal{A}_\mu$  с вершиной

$$\mathcal{L}_{JA}^{tr} = \mathcal{F}(q^2) \mathcal{A}_\mu \cdot k^\mu, \quad (104)$$

где  $q = p_B + p_D$ ,  $p_{B,D}$  — импульсы выходящих из вершины мезонных линий, и  $p_B = q_B + k$ ,  $p_D = q_D - k$ ,  $q_{B,D} \cdot k = 0$ . Таким образом,

$$\left( g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \langle 0 | J_\nu^{\dagger BD}(0) | B^+(p_B) D^0(p_D) \rangle = i \mathcal{F}(q^2) k^\mu.$$

Рассмотрим поперечную часть коррелятора токов

$$\Pi_{JJ}^{tr}(q^2) = \frac{1}{3} \left( -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T J_\mu^{\dagger BD}(x) J_\nu^{BD}(0) | 0 \rangle.$$

В этом корреляторе можно выделить вклад резонанса, лежащего выше порога пары  $BD$ , так что

$$\Pi_{JJ}^{tr}(q^2) = \frac{f_{BD}^2 M^2}{M^2 - q^2} + \int_{s_{\text{th}}}^{\infty} \frac{ds}{s - q^2} \rho(s),$$

где  $\rho(s)$  — плотность нерезонансного вклада. С другой стороны, формфактор в (104) определяет величину

$$\Im \Pi_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{tr}(q^2) = \frac{1}{8\pi} \frac{|\mathbf{k}|^3}{3\sqrt{q^2}} \mathcal{F}^2(q^2), \quad (105)$$

где  $|\mathbf{k}|^2 = -k^2 = (q^2 + m_B^2 - m_D^2)^2 / (4q^2) - m_B^2$ . Запишем правила сумм для мезонных токов

$$\Pi_{JJ}^{tr}(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{s_i}^{\infty} \frac{ds}{s - q^2} \Im \Pi_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{tr}(s),$$

где  $s_i = (m_B + m_D)^2$ . Смоделируем плотность континуума в виде

$$\rho(s) = \frac{1}{\pi} \Im \Pi_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{tr}(s) \theta(s - s_{\text{th}}).$$

Тогда правила сумм примут вид

$$\frac{f_{BD}^2 M^2}{M^2 - q^2} = \frac{1}{\pi} \int_{s_i}^{s_{\text{th}}} \frac{ds}{s - q^2} \Im \Pi_{\mathcal{F}\mathcal{F}}^{tr}(s). \quad (106)$$

Значение порога континуума определяется энергией открытия новых каналов в рождении частиц током  $J_\mu$ . Как было показано в [23] для  $\Upsilon(4S) \rightarrow B^+ B^-$  и  $\psi(3770) \rightarrow D^+ D^-$  распадов, эта величина задается порогом образования векторных состояний  $B^{*+} B^{*-}$  и  $D^{*+} D^{*-}$ , так что мы полагаем

$$s_{\text{th}} = (m_{B^*} + m_{D^*})^2.$$

Определим

$$v^2(s) = 1 - \frac{4m_B m_D}{s - (m_B - m_D)^2}.$$

Тогда  $v_{\text{th}}^2 \ll 1$ .

Рассмотрение формфактора  $\mathcal{F}$  в модели для  $B^+ B^-$  и  $D^+ D^-$  токов [23] показало, что соотношение (106) и его первые 4 производные по  $q^2$  при  $q^2 = 0$  дают стабильное значение  $f$  с точностью от 5 до 25% соответственно. Имея в виду указанную область применения (номер момента спектральной плотности меньше 5), перейдем в (106) к интегрированию по  $v^2(s)$  и положим  $q^2 = 0$  и  $\mathcal{F}(s) \approx \mathcal{F}(s_i) = F$ . Тогда при  $v_{\text{th}}^2 \ll 1$  и  $|\mathbf{k}| \approx 2\mu_{BD} v$  имеем

$$f_{BD}^2 \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{v_{\text{th}}} dv^2 \cdot v^3 \left( \frac{4\mu_{BD}}{M} \right)^4 \frac{F^2}{64\pi} \frac{M^2}{3}.$$

Таким образом,

$$f_{BD} = \frac{FM}{4\pi} \left( \frac{4\mu_{BD}}{M} \right)^2 \sqrt{\frac{v_{\text{th}}^5}{30}}. \quad (107)$$

Введем поперечную вершину распада состояния  $V_{(\bar{b}c)}$  на пару  $B^+ D^0$

$$\mathcal{L}_g = g \epsilon_\mu^{(\lambda)} \cdot k^\mu. \quad (108)$$

Вершина (108) приводит к появлению мнимой части константы  $f_{BD}$ , так что  $\Im m f_{BD}(q^2) \rightarrow 0$  при  $q^2 \rightarrow s_i$ , и, следовательно,  $\Im m f_{BD} \ll \Re e f_{BD}$ . Согласно векторной доминантности легко получить соотношение между  $\Im m f_{BD}$  и поперечным коррелятором, определяемым током распада  $\epsilon_\mu^{(\lambda)}$  и мезонным током  $J_\nu$  [23]

$$\Im m \Pi_{Fg}^{tr}(q^2) = -\frac{M}{2} \Im m f_{BD},$$

где  $\Im m \Pi_{Fg}^{tr}$  совпадает с выражением в (105) при замене  $F^2 \rightarrow Fg$ . Тогда дисперсионное соотношение для функции  $f_{BD}$  при  $q^2 = s_i = (m_B + m_D)^2$  дает

$$f_{BD} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{Fg}{9} \left( \frac{4\mu_{BD}}{M} \right)^3 M v_{\text{th}}^3. \quad (109)$$

Сравнивая (107) с (109), находим

$$g = \left( \frac{M}{4\mu_{BD}} \right) 12\pi \sqrt{\frac{3}{10v_{\text{th}}}}. \quad (110)$$

### 3.2. Масштабное соотношение и численные оценки

Как уже упоминалось, значение  $v_{\text{th}}$  определяется порогом образования векторных возбуждений тяжелых мезонов  $B^{*+}$  и  $D^{*0}$ ,

$$v_{\text{th}}^2 \approx \frac{1}{2\mu_{BD}} (\Delta m_B + \Delta m_D),$$

где  $\Delta m_B = m_{B^*} - m_B$ ,  $\Delta m_D = m_{D^*} - m_D$ . В Эффективной теории тяжелых кварков (см. обзор в [7]) имеем

$$m_B \Delta m_B = m_D \Delta m_D = \text{const},$$

вне зависимости от аромата тяжелого кварка с точностью до поправок по  $\Lambda_{QCD}/m_{B,D}$ . Отсюда следует, что

$$v_{\text{th}} \cdot \mu_{BD} = \text{const}. \quad (111)$$

Используя (111) и (110), легко получить масштабное соотношение для констант распада тяжелого векторного кваркония с массой  $m_B + m_D < M < m_{B^*} + m_{D^*}$

$$\frac{g^2}{M} \left( \frac{4\mu_{BD}}{M} \right) = \text{const}. \quad (112)$$

Соотношение (112) находится в хорошем согласии с экспериментальными данными для отношения констант распадов  $\Upsilon(4S) \rightarrow B^+ B^-$  и  $\psi(3770) \rightarrow D^+ D^-$ , известным с точностью  $\Delta g \simeq 3$  (см. Табл. 7). Заметим, что оценка по формуле (110), дающей  $g_{\Upsilon B\bar{B}} = 57$ , согласуется с экспериментальной величиной, взятой в качестве входящего параметра для масштабного соотношения. Последний факт указывает на самосогласованность метода получения (112). Что касается точности масштабного

Таблица 7. Предсказания масштабного соотношения в сравнении с экспериментальными данными.

Величина	Эксперимент	Масштабное соотношение
$g_{\Upsilon(4S) \rightarrow B^+ B^-}$	52	input
$g_{\psi(3770) \rightarrow D^+ D^-}$	31	31
$g_{B_c^{*+}(3S) \rightarrow B^+ D^0}$	—	49

соотношения, то она задается неопределенностью в правилах сумм, где была получена формула (110). Напомним, что с уменьшением массы векторного состояния стабильность определения константы  $f$  по начальным 5 моментам спектральной плотности изменяется от 5% для  $\Upsilon(4S)$  до 25% для  $\psi(3770)$ , что следует отнести к систематической неопределенности используемого метода. Мы оцениваем  $\Delta g/g \sim 15 - 20\%$  для  $B_c^{*+}(3S)$ , так что

$$g_{B_c B D} = 49 \pm 8.$$

Ширина распада определяется выражением

$$\Gamma(B_c^{*+}(3S) \rightarrow B^+ D^0) = \frac{1}{24\pi} g^2 \frac{|\mathbf{k}|^3}{M^2} \approx (90 \pm 35) \text{ МэВ}, \quad (113)$$

и с учетом канала  $B^0 D^+$  и в предположении, что каналом распада  $B^* D$  можно пренебречь, так как он подавлен третьей степенью импульса продуктов распада за счет большей массы  $B^*$  по сравнению с массой  $B$ , полная ширина  $B_c^{*+}(3S)$  составляет  $\Gamma_{tot} = (180 \pm 70) \text{ МэВ}$ . При численной оценке в (113) мы полагали  $M(B_c^{*+}(3S)) = 7.250 \text{ ГэВ}$ . Заметим, что ширина сильно зависит от разности масс  $\Delta M = M - (m_B + m_D)$ , определяющей  $|\mathbf{k}|$ . При используемой величине массы кваркония имеем  $\Delta M \sim 110 \text{ МэВ}$ , в отличие от  $\Delta M \sim 30 \text{ МэВ}$  для распадов  $\Upsilon(4S) \rightarrow B^+ B^-$  и  $\psi(3770) \rightarrow D^+ D^-$ . Большой фазовый объем и приводит к тому, что полная ширина  $B_c^{*+}(3S)$  на порядок больше полных ширин  $\Upsilon(4S)$  и  $\psi(3770)$  состояний, имеющих  $\Gamma_{tot} \simeq 24 \text{ МэВ}$ .

Таким образом, в данном разделе мы рассмотрели правила сумм для мезонных токов, позволяющие определить константу связи тяжелого векторного кваркония ( $\bar{b}c$ ), распадающегося на пару тяжелых мезонов

$$g = \left( \frac{M}{4\mu_{BD}} \right) 12\pi \sqrt{\frac{3}{10v_{th}}},$$

где  $m_B + m_D < M < m_{B^*} + m_{D^*}$ . Величина  $v_{th}$ , определяющая порог нерезонансного вклада в поперечный коррелятор токов, задается расщеплением масс векторного и псевдоскалярного состояний тяжелых мезонов и обладает определенными масштабными свойствами, так что получено соотношение

$$\frac{g^2}{M} \left( \frac{4\mu_{BD}}{M} \right) = \text{const},$$



которое находится в хорошем согласии с экспериментальными данными по константам распадов  $\Upsilon(4S) \rightarrow B^+B^-$  и  $\psi(3770) \rightarrow D^+D^-$ . Численная оценка ширины распада  $B_c^{*+}(3S) \rightarrow B^+D^0$  сильно зависит от разности масс  $\Delta M = M - (m_B + m_D)$ , определяющей фазовый объем.

## Заключение

В данном обзоре были представлены следующие результаты.

1. Предложена и разработана новая квазилокальная модель правил сумм, позволяющая использовать регулярность спектра масс и явные выражения для плотности уровней тяжелого кваркония, нерелятивистское движение кварков в кварконии, подавленность степенных непертурбативных поправок по обратной массе тяжелых кварков и возможность определять вклады отдельных резонансов.
2. В рамках предлагаемого подхода получены универсальные масштабные соотношения для лептонных констант тяжелых кваркониев с различным кварковым составом, причем как для основных S-волновых состояний, так и для их радиальных возбуждений.
3. Проведен сравнительный анализ масштабных соотношений с экспериментальными данными по ширинам лептонных распадов  $\Upsilon(nS) \rightarrow l^+l^-$  и  $\psi(nS) \rightarrow l^+l^-$ .
4. В рамках масштабных соотношений для лептонных констант чармония и боттомония по имеющимся экспериментальным данным сделаны численные оценки параметров КХД в секторе тяжелых кварков: масс  $c$ - и  $b$ -кварков и константы взаимодействия КХД,  $\alpha_s(m_Z^2)$ . Определены точность и границы применимости метода.
5. На основе масштабных соотношений предсказаны величины лептонных констант нового тяжелого кваркония  $B_c$ . Проведено сравнение расчетов лептонных констант кваркония в потенциальных моделях и в рамках квазилокальных правил сумм.
6. Проведено обобщение квазилокальных правил сумм на мезоны с одним тяжелым кварком. Проанализировано масштабное соотношение для соответствующих лептонных констант в статическом пределе.
7. Получены величины размерных параметров Эффективной теории тяжелых кварков: энергии связи и среднего квадрата импульса тяжелых кварков в мезоне.
8. Предложена новая модель правил сумм для мезонных токов, определяющих константы распада тяжелого векторного кваркония на пару тяжелых мезонов, лежащего в узкой энергетической щели ниже порога распада на пару более тяжелых, чем псевдоскалярные, векторных состояний. Рассматриваемый подход позволяет использовать зависимость размера энергетической щели от масс тяжелых кварков, что дает возможность получить масштабное соотношение

для констант распада тяжелого векторного кваркония с различным кварковым составом.

9. Проведен сравнительный анализ согласия масштабного соотношения с экспериментальными данными по распадам  $\Upsilon \rightarrow B\bar{B}$  и  $\psi(3770) \rightarrow D\bar{D}$ .
10. Показано практическое применение полученных соотношений для предсказания константы связи нового тяжелого кваркония ( $\bar{b}c$ ), поиски которого ведутся в экспериментах с вершинными детекторами на коллайдерах CERN и FNAL (о первом наблюдении  $B_c$  в эксперименте CDF см. [75]) , и предсказана величина ширины распада  $B_c^{*+}(3S) \rightarrow B^+D^0$ .

Данная работа частично поддержана грантами РФФИ 96-02-18216 и 96-15-96575.

## Список литературы

- [1] Weinberg S. // Phys. Rev. Lett., 1967, v.19, p.1264;  
Salam A. // In: Proceedings of 8-th Nobel Symp., Stokholm, 1968, p.367;  
Glashow S.L., Iliopoulos J., Maiani I. // Phys. Rev., 1970. v.D2, p.1285.
- [2] Higgs P.N. // Phys. Lett., 1964, v.C12, p.132;  
Englert F., Brout R. // Phys. Rev. Lett., 1964, v.13, p.321;  
Guralnik G.S., Hagen C.R., Kibble T.W. // Phys. Rev. Lett., 1964, v.13, p.385.
- [3] Гольфанд Ю.А., Лихтман Е.П. // Письма ЖЭТФ, 1971, т.13, с.452;  
Волков Д.В., Акулов В.П. // Письма ЖЭТФ, 1972, т.16, с.621;  
Wess J., Zumino B. // Nucl. Phys., 1974, v.B70. p.39.
- [4] Fritzsche H., Gell-Mann M., Leutwyler H. // Phys. Lett., 1973, v.47B, p.365;  
Weinberg S. // Phys. Rev. Lett., 1973, v.31, p.494.
- [5] Gross D.J., Wilczek F. // Phys. Rev. Lett., 1973, v.30. p.1343;  
Politzer H.D. // Phys. Rev. Lett., 1973, v.30. p.1346.
- [6] Quigg C., Rosner J.L. // Phys. Rep., 1979, v.56, p.167;  
Быков А.А., Дремин И.М., Леонидов А.В. // УФН, 1986, т.143, с.3.
- [7] Neubert M. // Phys. Rep., 1994, v.245, p.259.
- [8] Wilson K. // Phys. Rev., 1969, v.179, p.1499; Phys. Rev., 1971, v.D3, p.1818;  
Zimmerman W. // Ann. Phys., 1973, v.77, p.536, 570.
- [9] Logunov A.A., Soloviev L.D., Tavkhelidze A.N. // Phys. Lett., 1967, v.24B, p.181.
- [10] Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I. // Nucl. Phys., 1979, v.B147, pp.345, 448;  
Reinders L.J., Rubinshtein H., Yazaki S. // Phys. Rep., 1985, v.127, p.1;  
Narison S. // Phys. Lett., 1987, v.B198, p.104;  
Dominguez C.A., Paver N. // Phys. Lett., 1987, v.B197, p.423, v.B199, p.596.

- [11] Feynman R.P. // Phys. Rev. Lett., 1969, v.23, p.1415;  
 Bjorken J.D., Paschos E.A. // Phys. Rev., 1969, v.185, p.1975;  
 Drell S.D, Yan T.M. // Ann. Phys., 1971, v.66, p.578.
- [12] Isgur N., Wise M.B. // Phys. Lett., 1989, v.B232, p.113, v.B237, p.527.
- [13] Волошин М.Б., Шифман М.А. // ЯФ, 1988, т.47, с.801 .
- [14] Dokshitzer Y.L. // JETP, 1971, v.73, p.1216;  
 Gribov V.N, Lipatov L.N. // Sov. J. Nucl. Phys., 1972, v.15, p.78;  
 Altarelli G, Parisi G. // Nucl. Phys., 1977, v.B126, p.298;  
 Altarelli G. // Phys. Rep., 1982, v.81, p.1.
- [15] Bodwin G.T., Braaten E., Lepage G. P. // Phys. Rev., 1995, v.D51, p.1125;  
 Mannel T., Schuller G.A. // Z. Phys., 1995, v.C67, p.159.
- [16] Krasnikov N.V., Pivovarov A.A. // Phys. Lett., 1982, v.B112, p.397;  
 Kataev A.L., Krasnikov N.V., Pivovarov A.A. // Phys. Lett., 1983, v.B123, p.93;  
 Gorishny S.G., Kataev A.L., Larin S.A. // Phys. Lett., 1984, v.B135, p.457.
- [17] Eichten E. et al. // Phys. Rev., 1979, v.D17, p.3090. Phys. Rev., 1980. v.D21, p.203.
- [18] Kiselev V.V. // Nucl. Phys., 1993, v.B406, p.340.
- [19] Киселев В.В. // Письма ЖЭТФ, 1994, т.60. с.498.
- [20] Герштейн С.С., Киселев В.В., Лиходед А.К., Ткабладзе А.В. // УФН, 1995, т.165, с.3.
- [21] Gershtein S.S., Kiselev V.V., Likhoded A.K., Tkabladze A.V.// Phys. Rev., 1995, v.D51, p.3613.
- [22] Kiselev V.V. // Int. J. Mod. Phys., 1995, v.A10. p.465.
- [23] Kiselev V.V. // Mod. Phys. Lett., 1995, v.A10. p.2113.
- [24] Киселев В.В. // ЯФ, 1996, т.59, с.188.
- [25] Kiselev V.V. // Phys. Lett., 1995, v.B362, p.173.
- [26] Kiselev V.V. // Int. J. Mod. Phys., 1996, v.A11, p.3689.
- [27] Kiselev V.V. // Phys. Lett., 1996, v.B373, p.207.
- [28] Kiselev V.V. // Phys. Lett., 1997, v.B390. p.427.
- [29] Kiselev V.V. // Preprint IHEP 96-83, 1996 [hep-ph/ 9610482].

- [30] Brodsky S.J., Lepage G.P., Mackenzie P.B. // Phys. Rev., 1983, v.D28, p.228.
- [31] Grunberg G., Kataev A.L. // Phys. Lett., 1992, v.B279, p.352;  
Brodsky S.J., Lu H.J. // Preprint SLAC-PUB-6683, 1994.
- [32] Braaten E., Fleming S. // Phys. Rev., 1995, v.D52, p.181.
- [33] Voloshin M. // Int. J. Mod. Phys., 1995, v.A10. p.2865.
- [34] Vainshtein A.I., Zakharov V.I., Shifman M.A. // Pis'ma Zh.E.T.F., 1978, v.27, p.60.
- [35] Волошин М.Б., Зайцев Ю.М // УФН, 1987, т.152, с.361.
- [36] Voloshin M.B. // Nucl. Phys., 1979, v.B154, p.365.
- [37] Волошин М.Б. // ЯФ, 1982, т.36, с.247.
- [38] Eichten E. // Preprint FERMILAB-Conf-85/29-T, 1985.
- [39] Richardson J.L. // Phys. Lett., 1979, v.82B, p.272.
- [40] Buchmüller W., Tye S.-H.H. // Phys. Rev., 1981, v.D24, p.132.
- [41] Quigg C., Rosner J.L. // Phys. Lett., 1977, v.B71, p.153.
- [42] Martin A. // Phys. Lett., 1980. v.93B, p.338.
- [43] Narison S. // Phys. Lett., 1988, v.B210. p.238.
- [44] Eichten E., Quigg C. // Phys. Rev., 1994, v.D49, p.5845.
- [45] Godfrey S., Isgur N. // Phys. Rev., 1985, v.D32, p.189.
- [46] Галкин В.О., Мишуров А.Ю., Фаустов Р.Н. // ЯФ, 1991, т.53, с.1676.
- [47] Colangelo P., Nardulli G., Pietroni M. // Phys. Rev., 1991, v.D43, p.3002.
- [48] Avaliani I.S., Sissakian A.N., Slepchenko L.A. // Preprint JINR E2-92-547, Dubna, 1992.
- [49] Картвелишвили В.Г., Лиходед А.К. // ЯФ, 1985, т.42, с.1306.
- [50] Bagan E. et al. // Z. Phys., 1994, v.C64, p.57.
- [51] Colangelo P., Nardulli G., Paver N. // Z. Phys., 1993, v.C57, p.43.
- [52] Aliev T.M., Yilmaz O. // Nuovo Cimento, 1992, v.105.827.
- [53] Novikov V.A. et al. // Phys. Rep., 1978, v.41C, p.1.

- [54] Киселев В.В., Ткабладзе А.В. // ЯФ, 1989, т.50. с.1714.
- [55] Chabab M. // Phys. Lett., 1994, v.B325, p.205.
- [56] Reinshagen S., Rückl R. // Preprints CERN-TH.6879/93, MPI-Ph/93-88, 1993.
- [57] Barnett R.M. et al., PDG // Phys. Rev., 1996, v.D54, p.1.
- [58] Kataev A.L. // Preprint INR-092696, 1996 [hep-ph/9607426];  
Kataev A.L., Kotikov A.V., Parente G., Sidorov A.V., Phys. Lett., 1998, v.B417,  
p.374.
- [59] Shifman M. // Mod. Phys. Lett., 1995, v.A10. p.605, Int. J. Mod. Phys., 1996,  
v.A11, p.3195.
- [60] Burrows P.N. et al. // Phys. Lett., 1996, v.B382, p.157.
- [61] Jamin M., Pich A. // Preprint HD-THEP-96-55, 1996 [hep-ph/9702276], Nucl.  
Phys., 1997, v.B507, p.334.
- [62] Czarnecki A., Melnikov K. // Phys. Rev. Lett., 1998, v.80. p.2531;  
Beneke M., Singer A., Smirnov V.A. // Phys. Rev. Lett., 1998, v.80. p.2535.
- [63] Kühn J.H., Penin A.A., Pivovarov A.A. // Preprint TTP98-01, 1998 [hep-  
ph/9801356].
- [64] Bagan E., Ball P., Braun V., Dosch H. // Phys. Lett., 1992, v.B278, p.457;  
Neubert M. // Phys. Rev., 1992, v.D46, p.1076.
- [65] Voloshin M. // Phys. Rev., 1992, v.D46, p.3062.
- [66] Bigi I., Grozin A.G., Shifman M., Uraltsev N.G., Vainshtein A. // Phys. Lett.,  
1994, v.B339, p.160.
- [67] Narison S. // Phys. Lett., 1994, v.B341, p.73, Phys. Lett., 1995, v.B352, p.122.
- [68] Bigi I. et al. // Phys. Rev., 1994, v.D50. p.2234, Phys. Rev., 1995, v.D55, p.196;  
Voloshin M. // Phys. Rev., 1992, v.D46, p.3062;  
Uraltsev N. // Int. J. Mod. Phys., 1996, v.A11, p.515;  
Neubert M. // Phys. Lett., 1997, v.B393, p.110.
- [69] Bigi I., Shifman M., Uraltsev N. // Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., 1997, v.47, p.591.
- [70] Ball P., Braun V. // Phys. Rev., 1994, v.D49, p.2472;  
Neubert M. // Phys. Lett., 1994, v.B322, p.419.
- [71] Alexander G. et al., OPAL Coll. // Z. Phys., 1996, v.C70. p.197;  
Ackerstaff K. et al. // Phys. Lett., 1996, v.B420. p.157.

- [72] Abreu P. et al., DELPHI Coll. // Phys. Lett., 1997, v.B398, p.207.
- [73] Barate R. et al., ALEPH Coll. // Phys. Lett., 1997, v.B402, p.213.
- [74] Abe F. et al., CDF Coll. // Phys. Rev. Lett., 1996, v.77, p.5176.
- [75] Abe F. et al., CDF Coll. // Preprint FERMILAB-PUB-98-157-E, 1998 [hep-ex/9805034].

*Рукопись поступила 30 сентября 1998*

В.В. Киселев.

Универсальные масштабные соотношения для констант связи мезонов,  
содержащих тяжелые кварки.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы  $\text{\LaTeX}$ .

Редактор Н.В.Ежела.

---

Подписано к печати 8.10.98. Формат  $60 \times 84/8$ .

Офсетная печать. Печ.л. 6,3. Уч.-изд.л. 4,2. Тираж 150. Заказ 18.

Индекс 3649. ЛР №020498 17.04.97.

---

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий  
142284, Протвино Московской обл.

