



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 98-73
ОТФ

Ю.Ф. Пирогов¹

МЕТОД ФОНОВОГО ПОЛЯ В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ

¹ E-mail: pirogov@mx.ihep.su

Протвино 1998

Аннотация

Пирогов Ю.Ф. Метод фонового поля в калибровочных теориях: Препринт ИФВЭ 98–73. – Протвино, 1998. – 68 с., 7 рис., библиогр.: 28.

В пособии излагается альтернативная схема квантования калибровочных теорий, основанная на методе фонового поля (МФП). В отличие от обычного формализма этот метод приводит к явно калибровочно-инвариантному эффективному действию, из которого следуют простые КЭД-подобные тождества Уорда для вершинных функций. Вследствие этих тождеств вершинные функции обладают улучшенными ультрафиолетовыми и инфракрасными свойствами, а также более приемлемым высокоэнергетическим поведением. Рассматривается применение МФП к стандартной модели (СМ) сильных и электрослабых взаимодействий. Излагается согласованная процедура перенормировок электрослабых взаимодействий в схеме на массовой поверхности с сохранением фоновой калибровочной симметрии. МФП значительно упрощает конкретные вычисления, а явная калибровочная инвариантность эффективного действия делает физические ограничения, налагаемые калибровочной симметрией на функции Грина вне массовой поверхности, более сильными и явно выраженными. Последнее особенно существенно при модельно независимых расширениях за рамки СМ.

Abstract

Pirogov Yu.F. Background Field Method in Gauge Theories: IHEP Preprint 98–73. – Protvino, 1998. – p. 68, figs. 7, refs.: 28.

An alternative quantization scheme for the gauge theories is presented in the textbook. The scheme is based on the background field method (BFM). Contrary to the conventional scheme, the method results in the explicitly gauge invariant effective action from which the simple QED-like Ward identities for the vertex functions follow. Because of these identities the vertex functions have improved UV and IR properties, as well as a more reasonable high energy behaviour. An application of the BFM to the Standard Model (SM) of the strong and electroweak interactions is considered. The consistent on-mass-shell renormalization of the electroweak interactions, retaining the background gauge symmetry, is presented. The BFM drastically simplifies the practical calculations. Besides, the explicit gauge invariance of the effective action makes the physical restrictions put by gauge symmetry on the off-mass-shell Green functions more stringent and clear-cut. The latter is of special importance for the model independent extensions beyond the SM.

© Государственный научный центр
Российской Федерации
Институт физики высоких энергий, 1998

Введение

Современное теоретическое понимание физики элементарных частиц основывается на калибровочных теориях, которые строятся, следуя принципу локальной (калибровочной) инвариантности. При этом, хотя классический лагранжиан и является явно калибровочно-инвариантным, необходимо зафиксировать калибровку, чтобы проквантовать теорию. Поэтому в обычном формализме квантования (см., например, [1,2]) калибровочная инвариантность нарушается на промежуточных этапах вычислений и восстанавливается только в самом конце при переходе к S -матрице посредством проектирования на физические степени свободы. Однако, как отмечал Швингер [3] в контексте квантовой электродинамики (КЭД) еще до “калибровочной эры” (начавшейся с основополагающей работы Янга и Миллса [4]), когда всеобъемлющая роль калибровочных теорий не была столь ясна, как в настоящее время:

“Извлечение калибровочно-инвариантных результатов из формально калибровочно-инвариантной теории гарантируется, если использовать методы, включающие только калибровочно-инвариантные величины”.

Именно с целью избежания явного нарушения калибровочной инвариантности Девицтом был введен метод фонового поля (МФП) [5] в формализме, который изначально был пригоден лишь в однопетлевом приближении. Рафинирование МФП, включая обобщение на многопетлевые вычисления, было выполнено в деталях рядом других авторов [6,7]. В этом методе с помощью разложения динамического калибровочного поля на квантовое и фоновое (классическое) поля, можно зафиксировать калибровку квантовых полей, что необходимо для квантования, с сохранением при этом калибровочной инвариантности результирующего эффективного действия фоновых полей.

Этот метод оказался чрезвычайно полезным в неабелевых калибровочных теориях, упрощая расчеты как технически, так и концептуально. Он удобен для применений в квантовой хромодинамике (КХД) [7,8,9], например, для расчета β -функции. Сохранение явной калибровочной инвариантности в МФП приводит к связи констант перенормировок калибровочного поля и калибровочной константы взаимодействия. Это позволяет найти β -функцию, ограничиваясь вычислением лишь двухточечной вершинной функции фоновых калибровочных полей. Никаких вычислений трехточечных вершинных функций при этом не требуется, что приводит к значительным упрощениям расчетов в МФП по сравнению с обычным

подходом. МФП был использован для вывода низкоэнергетических эффективных теорий из теорий большого объединения [10]. Он нашел также широкое применение в теории гравитации и супергравитации.

Эквивалентность S-матрицы калибровочных теорий в МФП и в обычном формализме была доказана в работах [11]. Преимущества вычисления S-матричных элементов с помощью МФП связаны главным образом с тем фактом, что фиксирование калибровки фонового поля совершенно не зависит от фиксирования калибровки квантового поля. Поэтому удачный выбор фоновой калибровки может существенно упростить вычисления. Подобное применение МФП к расчету электрослабого однопетлевого процесса $Z \rightarrow 3\gamma$ выполнено в работе [12].

В последние годы МФП был более систематически применен в СМ к теории электрослабых взаимодействий [13,14]. Было, в частности, показано [13], что использование здесь МФП приводит к функциям Грина с крайне желательными теоретическими свойствами. Они удовлетворяют простым КЭД-подобным тождествам Уорда и в сравнении с обычным формализмом в R_ξ -калибровке имеют улучшенное асимптотическое, ультрафиолетовое и инфракрасное поведение. Благодаря вышеуказанным свойствам, МФП в электрослабой СМ является формализмом, хорошо приспособленным как для технического и концептуального упрощения вычисления S-матричных элементов, так и для обсуждения величин вне массовой поверхности.

Тем не менее, широкого применения к спонтанно нарушенным калибровочным теориям вообще и к электрослабой СМ, в частности, МФП пока не нашел. Так, до настоящего времени не является общепринятой последовательная процедура перенормировок СМ электрослабых взаимодействий в МФП и систематический расчет электрослабых квантовых поправок в этом методе.

Данное пособие ставит целью частично ликвидировать указанный пробел и предоставить инструмент, необходимый для применения МФП в калибровочных теориях вообще и в СМ электрослабых взаимодействий — в особенности. Изложение следует в основном работам [7,13]. Особое внимание уделяется изучению следствий явной калибровочной инвариантности СМ, сохраняемой в МФП-формализме. В частности, в явном виде проведена перенормировка электрослабой СМ в схеме на массовой поверхности, согласующаяся с калибровочной инвариантностью эффективного действия. Калибровочная инвариантность приводит к определенным соотношениям между константами перенормировок параметров и полей, что существенно упрощает процедуру перенормировок СМ.

План изложения следующий. В разделе 1 дается краткий обзор функциональных методов в теории поля и введение в МФП. В разделе 2 этот метод обобщается на точные неабелевы калибровочные теории вообще и КХД, в частности. На примере однопетлевой β -функции КХД демонстрируется упрощение вычислений, к которым приводит МФП. Эти два раздела носят вводный характер и представлены конспективно.

В разделе 3 излагается применение данного метода к СМ электрослабых взаимодействий. Этот раздел является основным и изложен в деталях. Выписывается классический лагранжиан и проводится квантование электрослабой теории в МФП. Об-

суждаются свойства получаемого калибровочно-инвариантного эффективного действия и построение S-матрицы. Затем выводятся тождества Уорда СМ электрослабых взаимодействий. Показывается их различие с тождествами Славнова–Тейлора в обычном формализме. Проводится перенормировка СМ в МФП в схеме на массовой поверхности. Обсуждаются улучшенные свойства вершинных функций СМ в МФП и непосредственная связь этого с тождествами Уорда. Наконец, обсуждаются преимущества, даваемые МФП в сравнении с другим подходом к модификации вершинных функций, который связан с так называемой пинчевой техникой.

В приложении приводится полный набор МФП-правил Фейнмана КХД и СМ электрослабых взаимодействий для произвольных значений параметров квантовой калибровки, включая все контрчлены СМ электрослабых взаимодействий, необходимые для однопетлевых вычислений. Дается также ряд упражнений, дополняющих основной текст.

1. Метод фонового поля

1.1. Эффективное действие

(i) Квантовая теория поля исследует поведение некоторого квантового поля Q (или набора таких полей) как функции точки x пространства-времени. При этом конечной целью любой теории поля является вычисление S-матричных элементов. S-матрица может быть получена из функций Грина теории с помощью ЛСЦ-редукции (см., например, [1,2]). В свою очередь, функции Грина в функциональном подходе порождаются путем взятия функциональных производных по отношению к функции источника J от производящего функционала $Z[J]$. И, наконец, последний определяется в виде функционального интеграла по всем конфигурациям динамического поля Q с классическим действием S :

$$Z[J] = \int d[Q] \exp i(S[Q] + J \cdot Q), \quad (1.1)$$

где

$$J \cdot Q \equiv \int d^4x J(x)Q(x). \quad (1.2)$$

Тогда ненормированные n -точечные функции Грина определяются как

$$\langle 0|T\{\underbrace{Q \dots Q}_n\}|0\rangle \equiv \int d[Q] (\underbrace{Q \dots Q}_n) \exp iS[Q] = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta J^n} Z[J] \Big|_{J=0}. \quad (1.3)$$

Частным случаем этого равенства, соответствующим $n = 0$, является амплитуда перехода вакуума в вакуум

$$\langle 0|0\rangle \equiv \int d[Q] \exp iS[Q] = Z[J] \Big|_{J=0}, \quad (1.4)$$

которая в отсутствие источника может быть нормирована на единицу при надлежащем выборе функциональной меры интегрирования. Однако для общности в дальнейшем этого не предполагается.

В этом и следующем разделе квадратные скобки всегда подразумевают функциональную зависимость. Кроме того, в данном разделе для простоты опускаются все индексы и аргументы Q и J , включая зависимость от координаты x . Смысл различных формул будет проясняться при изображении их в диаграммной форме на рисунках. В данном разделе калибровочные теории не будут обсуждаться, так что в качестве Q может быть выбрано скалярное поле. Усложнения, вносимые калибровочными теориями, будут рассмотрены в следующем разделе.

(ii) Функции Грина, определенные в (1.3), являются несвязными, т.е. они содержат полностью разделенные части. Соотношение между связными и несвязными функциями Грина схематически иллюстрируется рис. 1 на примере шеститочечной функции. Несвязные функции Грина не дают вклада в S -матрицу. Поэтому удобнее работать только со связными функциями. Известно, что последние порождаются с помощью функциональных производных по J функционала

$$W[J] = \frac{1}{i} \ln Z[J], \quad (1.5)$$

именуемого производящим функционалом связных функций Грина.

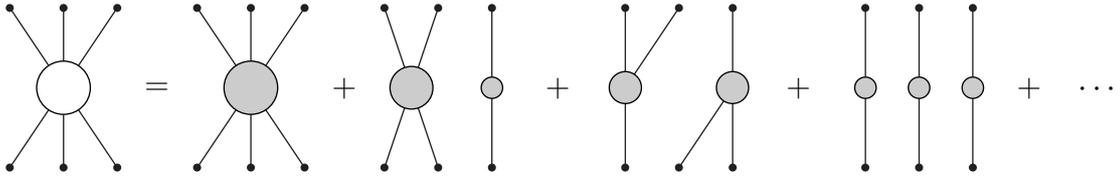


Рис. 1. Разложение несвязной (светлый кружок) функции Грина по связными (серые кружки) функциями Грина.

Функциональное соотношение (1.5) означает, иными словами, что несвязные части могут быть устранены просто за счет взятия логарифма от производящего функционала Z несвязных диаграмм. Полезно убедиться в этом путем явного построения с помощью указанного соотношения нескольких первых связных функций Грина. Беря производную (1.5) по J , находим с учетом аналога соотношения (1.3) в присутствии источника следующее соотношение:

$$\bar{Q}[J] \equiv \frac{\delta W}{\delta J} = \frac{\langle 0|Q|0 \rangle_J}{\langle 0|0 \rangle_J}, \quad (1.6)$$

которое дает не что иное, как нормированное среднее по вакууму от поля Q в присутствии источника. В дальнейшем будем предполагать, что $\bar{Q}[J]|_{J=0} = 0$. В противном случае, необходимо произвести сдвиг $Q \rightarrow Q - \bar{Q}|_{J=0}$, так что сдвинутое поле уже будет удовлетворять этому условию. Кроме того, подразумевается, что зависимость $\bar{Q}[J]$ обратима (по крайней мере в окрестности $J = 0$) и что $J[\bar{Q}]|_{\bar{Q}=0} = 0$.

Беря вторую производную, получаем

$$\frac{1}{i} \frac{\delta^2 W}{\delta J^2} \Big|_{J=0} = \frac{\langle 0|T\{QQ\}|0\rangle}{\langle 0|0\rangle} - \left(\frac{\langle 0|Q|0\rangle}{\langle 0|0\rangle} \right)^2. \quad (1.7)$$

Выражение справа есть в точности полная нормированная двухточечная функция минус ее несвязная часть. Множитель $1/i$ является просто частью определения связанной двухточечной функции Грина, так что вторая производная W действительно есть связанная двухточечная функция, как и следует. Уравнение (1.7) иллюстрируется графически рис. 2. Одноточечные связанные функции Грина — это так называемые (связные) “головастики”. Напомним, что связанная двухточечная функция Грина поля Q называется (полным) пропагатором этого поля:

$$\frac{1}{i} \frac{\delta^2 W}{\delta J^2} \Big|_{J=0} \equiv D. \quad (1.8)$$

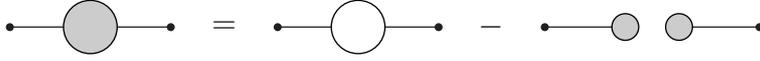


Рис. 2. Соотношение между связанной и несвязной двухточечными функциями Грина. Одночастичные связанные функции Грина — это (связные) “головастики”.

Взяв еще одну производную, получаем соотношение между связанной и несвязной нормированными трехточечными функциями Грина

$$\begin{aligned} \frac{1}{i^2} \frac{\delta^3 W}{\delta J^3} \Big|_{J=0} &= \frac{\langle 0|T\{QQQ\}|0\rangle}{\langle 0|0\rangle} - 3 \frac{\langle 0|T\{QQ\}|0\rangle \langle 0|Q|0\rangle}{\langle 0|0\rangle^2} + 2 \left(\frac{\langle 0|Q|0\rangle}{\langle 0|0\rangle} \right)^3 \\ &= \frac{\langle 0|T\{QQQ\}|0\rangle}{\langle 0|0\rangle} - 3 \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W}{\delta J^2} \Big|_{J=0} \frac{\langle 0|Q|0\rangle}{\langle 0|0\rangle} - \left(\frac{\langle 0|Q|0\rangle}{\langle 0|0\rangle} \right)^3, \end{aligned} \quad (1.9)$$

поясняемое графически на рис. 3. Ясно, что процедура взятия третьей производной W оставляет только связанную часть трехточечной функции Грина, правильно устраняя при этом все ее несвязные части. Это утверждение можно обобщить по индукции для произвольного n .

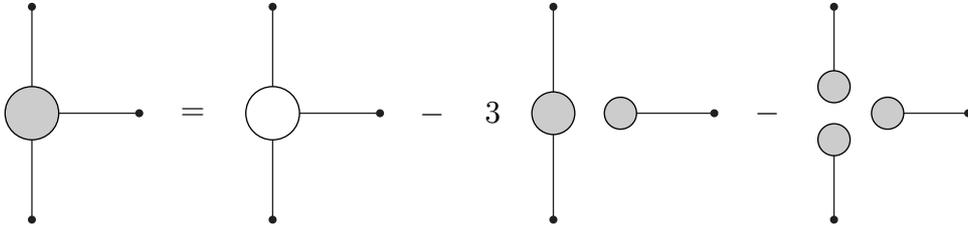


Рис. 3. Соотношение между связанной и несвязной трехточечными функциями Грина.

▽ Упражнение 1¹

(iii) Связные функции Грина могут быть далее упрощены путем выражения их в терминах одночастично неприводимых (ОЧН) частей, как показано на рис. 4 на примере шеститочечной функции. Напомним, что диаграмма называется ОЧН, если ее нельзя разделить на две несвязные части, разрезая одну ее внутреннюю линию.² Более экономно рассматривать только ОЧН диаграммы и затем соединять их в древесные диаграммы, состоящие из ОЧН частей, вместо того, чтобы вычислять все связные функции Грина непосредственно. ОЧН функции Грина порождаются функционалом, называемым эффективным действием. Эффективное действие определяется преобразованием Лежандра функционала W в виде

$$\Gamma[\bar{Q}] = W[J] - J \cdot \bar{Q}, \quad (1.10)$$

где $\bar{Q}[J]$ дается (1.6). Следует различать исходное поле Q и связанное с ним \bar{Q} , которое, напомним, является вакуумным средним поля Q в присутствии источника J .

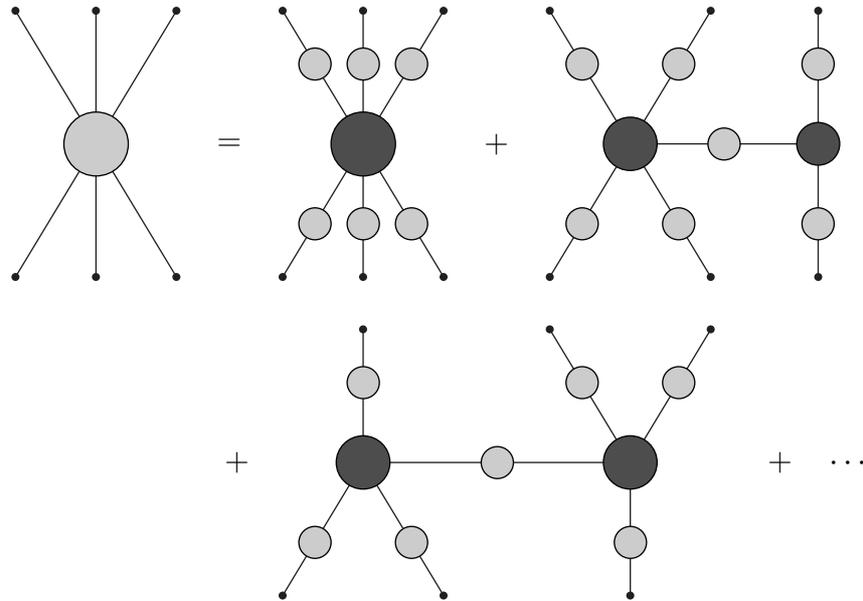


Рис. 4. Соотношение между связными и ОЧН (темные кружки) функциями Грина.

Будем теперь рассматривать \bar{Q} в качестве независимой переменной, а $J[\bar{Q}]$ — ее функцией. Убедимся, что простого преобразования (1.10) со связью (1.6) достаточно,

¹См. раздел Упражнения на стр. 64

²ОЧН (или 1ЧН) диаграммы часто называются также сильно связными, в отличие от (просто) связных диаграмм. Для ОЧН диаграмм используется также более удобный термин вершинные функции (или сокращенно, вершины).

чтобы производные $\Gamma[\bar{Q}]$ по \bar{Q} (при $\bar{Q} = 0$) были ОЧН функциями Грина. Вновь не будем доказывать это для всех функций Грина, а ограничимся лишь несколькими простейшими случаями.

Прежде всего, первая производная выражения (1.10) с учетом (1.6) и правила дифференцирования сложной функции дает

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{Q}} = -J[\bar{Q}]. \quad (1.11)$$

Это равенство можно рассматривать как обращение зависимости $\bar{Q}[J]$, даваемой (1.6). (Как упоминалось, без потери общности можно считать, что $J[\bar{Q}]|_{\bar{Q}=0} = 0$.) Равенство (1.11) представляет собой самосогласованное квантово-полевое уравнение для \bar{Q} , которое в квантовой теории заменяет классическое волновое уравнение $\delta S/\delta Q = -J$ в присутствии внешнего источника.

Беря далее производную (1.11), находим

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{Q}^2} = -\frac{\delta J}{\delta\bar{Q}}. \quad (1.12)$$

С учетом соотношения $\bar{Q} = \delta W/\delta J$ имеем

$$-\frac{\delta J}{\delta\bar{Q}} = \left[-\frac{\delta\bar{Q}}{\delta J}\right]^{-1} = \left[-\frac{\delta^2 W}{\delta J^2}\right]^{-1} = iD^{-1}, \quad (1.13)$$

где D — это полный пропагатор (при $\bar{Q} = J = 0$). Таким образом, находим, что вторая производная Γ является полным обратным пропагатором (с точностью до множителя i , который обычно вводится в определение ОЧН функций Грина)

$$\frac{1}{i} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{Q}^2} = D^{-1}. \quad (1.14)$$

Легко видеть, почему ОЧН двухточечная функция является полным обратным пропагатором. Перепишем (1.14) тождественно в виде

$$D = D \frac{1}{i} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{Q}^2} D. \quad (1.15)$$

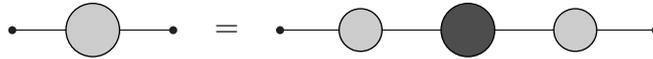


Рис. 5. Соотношение между связной и ОЧН двухточечными функциями Грина.

Как видно из рис. 5, это равенство означает, что полный пропагатор, являющийся полной связной двухточечной функцией Грина, получается из ОЧН двухточечной функции с помощью “одевания” двух внешних линий полными пропагаторами. Уравнение (1.13) может быть также использовано для вывода тождества

$$\frac{\delta}{\delta\bar{Q}} = \frac{\delta J}{\delta\bar{Q}} \frac{\delta}{\delta J} = D^{-1} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}. \quad (1.16)$$

Это уравнение фактически и является причиной, по которой эффективное действие порождает ОЧН функции Грина. Именно $\delta/\delta J$, действуя на W , добавляет одну внешнюю линию к функции Грина. Тогда, согласно (1.16), $\delta/\delta\bar{Q}$, действуя на Γ , добавляет внешнюю линию и одновременно устраняет пропагатор, соответствующий этой линии (наряду с компенсацией несвязных частей, возникающих из W). Такое постоянное повторение операции и заставляет диаграммы, получаемые из Γ , быть ОЧН.³

Рассмотрим в качестве следующего примера третью производную эффективного действия. Из равенств (1.12) и (1.13) имеем

$$\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{Q}^3} = D^{-1} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \left[-\frac{\delta^2 W}{\delta J^2} \right]^{-1} = D^{-1} \frac{1}{i} \frac{\delta^3 W}{\delta J^3} \left[\frac{\delta^2 W}{\delta J^2} \right]^{-2} = iD^{-3} \frac{\delta^3 W}{\delta J^3}, \quad (1.17)$$

или эквивалентно

$$\left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^3 W}{\delta J^3} = iD^3 \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{Q}^3}. \quad (1.18)$$

Это уравнение, представленное графически на рис. 6, как раз и утверждает, что связная трехточечная функция получается из ОЧН трехточечной функции добавлением полных пропагаторов, соответствующих всем внешним линиям. Это утверждение можно обобщить по индукции для произвольного $n \geq 3$:

$$\left(\frac{1}{i}\right)^{n-1} \frac{\delta^n W}{\delta J^n} = iD^n \frac{\delta^n\Gamma}{\delta\bar{Q}^n}. \quad (1.19)$$

▽ Упражнение 2

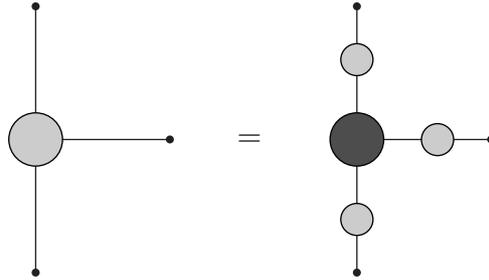


Рис. 6. Соотношение между связной и ОЧН трехточечными функциями Грина.

³Из сказанного можно видеть, что при переопределении поля Q в виде $Q_0 = Z^{1/2}Q$, где $Z^{1/2}$ — некоторая вещественная константа, n -точечная вершинная функция трансформируется как $\Gamma_{n,0} = Z^{-n/2}\Gamma_n$, а пропагатор как $D_0 = ZD$. При этом ясно, что полная связная n -точечная функция Грина G_n , получаемая умножением Γ_n на D^n , преобразуется в виде $G_{n,0} = Z^{n/2}G_n$.

1.2. Эффективное действие в МФП

В предыдущем разделе было показано, что в теории поля наиболее важной для вычислений величиной является эффективное действие $\Gamma[\bar{Q}]$. Его физический смысл состоит в том, что

$$\Gamma[\bar{Q}] = S[\bar{Q}] + \Delta\Gamma[\bar{Q}], \quad (1.20)$$

где S — классическое действие, а $\Delta\Gamma$ учитывает квантовые петлевые поправки.⁴ Если эффективное действие известно, S-матрицу можно найти, строя деревья из ОЧН частей, что порождает полные связные функции Грина, отсекая затем у них внешние пропагаторы, приводя все импульсы к массовой поверхности и, наконец, присоединяя соответствующие внешние волновые функции. МФП как раз и является тем инструментом, который дает удобный способ вычисления эффективного действия. Рассмотрим сначала некалибровочные теории. Для них МФП эквивалентен обычному “сдвигу поля”, который часто используется для вычисления эффективного действия и, в частности, эффективного потенциала. В этом смысле МФП может рассматриваться как обобщение данного метода на калибровочные теории.

Рассмотрим видоизмененную теорию динамического поля Q с классическим действием

$$\check{S}[Q, B] \equiv S[Q + B], \quad (1.21)$$

зависящим дополнительно от некоторого произвольного классического поля B . Будем называть эти поля, соответственно, квантовым и фоновым. По аналогии с выражением (1.1) для Z введем новый производящий функционал

$$\check{Z}[J, B] = \int d[Q] \exp i(\check{S}[Q, B] + J \cdot Q), \quad (1.22)$$

так что $\check{Z}[J, B]$ зависит как от обычного источника J , так и от фонового поля B , которое может рассматриваться как дополнительный источник. Также по аналогии с обычным производящим функционалом связных функций Грина W введем

$$\check{W}[J, B] = \frac{1}{i} \ln \check{Z}[J, B] \quad (1.23)$$

и определим

$$\check{Q}[J, B] = \frac{\delta \check{W}}{\delta J}, \quad (1.24)$$

которое является вакуумным средним поля Q в присутствии двух источников J и B . Наконец, в качестве замены обычного эффективного действия введем эффективное действие МФП в виде

$$\check{\Gamma}[\check{Q}, B] = \check{W}[J, B] - J \cdot \check{Q}. \quad (1.25)$$

⁴При учете в явном виде постоянной Планка \hbar , так что производящий функционал пропорционален $\exp(iS/\hbar)$, классическое действие S соответствует $n = 1$ в разложении Γ по степеням \hbar^n , а квантовые поправки — степеням $n \geq 2$. В свою очередь, степень n связана с числом петель l в виде $n = l + 1$.

Чтобы понять смысл всех этих формальных определений, произведем сдвиг переменной функционального интегрирования в уравнении (1.22): $Q \rightarrow Q - B$. Это позволяет связать производящие функционалы МФП и обычного формализма:

$$\check{Z}[J, B] = Z[J] \exp(-iJ \cdot B). \quad (1.26)$$

Беря логарифм от этого выражения, получаем

$$\check{W}[J, B] = W[J] - J \cdot B. \quad (1.27)$$

Далее, продифференцируем это выражение по J . С учетом определений (1.6) и (1.24) имеем связь

$$\check{\bar{Q}} = \bar{Q} - B. \quad (1.28)$$

Наконец, из (1.25), (1.10) и двух предыдущих равенств находим

$$\check{\Gamma}[\check{\bar{Q}}, B] = \Gamma[\bar{Q}]. \quad (1.29)$$

Но (1.28) иначе означает, что $\bar{Q} = \check{\bar{Q}} + B$, так что

$$\check{\Gamma}[\check{\bar{Q}}, B] = \Gamma[\check{\bar{Q}} + B]. \quad (1.30)$$

В качестве специального случая (1.30) наложим условие $\check{\bar{Q}} = 0$, или $\bar{Q} = B$, смысл которого состоит в том, что среднее значение динамического поля Q в присутствии двух источников J и B равно нулю. (Условие $\bar{Q} = B$ более подробно означает $\bar{Q}[J, B] = B$, что неявно определяет $J = J[B]$.) При этом условии получаем

$$\check{\Gamma}[0, B] = \Gamma[B]. \quad (1.31)$$

Это равенство означает, что эффективное действие исходной теории может быть найдено путем вычисления $\check{\Gamma}[0, B]$ в МФП. Это и есть основной искомый результат.

Эффективное действие МФП $\check{\Gamma}[\check{\bar{Q}}, B]$ — это не что иное, как обычное эффективное действие, вычисленное в присутствии фонового поля B . Поэтому оно определяет все диаграммы, дающие вклад в ОЧН функции Грина. Напомним, что ОЧН функции Грина порождаются с помощью производных от эффективного действия. В нашем случае производные $\check{\Gamma}[\check{\bar{Q}}, B]$ по $\check{\bar{Q}}$ дали бы ОЧН функции Грина в присутствии фонового поля B . Но $\check{\Gamma}[0, B]$ не имеет зависимости от $\check{\bar{Q}}$, так что оно не порождает диаграмм с внешними линиями, а дается суммой всех ОЧН вакуумных диаграмм в присутствии поля B . Это является существенным преимуществом МФП, ибо позволяет вычислять эффективное действие, суммируя только вакуумные диаграммы (диаграммы без внешних линий, соответствующих полю Q). Равенство (1.31) гарантирует получение этим методом правильного эффективного действия исходной теории.

Имеются два совершенно различных подхода к вычислению $\check{\Gamma}[0, B]$. Первый подход сводится к точному учету фонового поля B . Необходимо просуммировать все

ОЧН вакуумные диаграммы, используя сдвинутое действие $S[Q + B]$ для генерирования правил Фейнмана. Следует использовать точный пропагатор квантового поля Q в присутствии фонового поля B . Затем вычисляются обычные диаграммы для поля Q с вершинами, которые зависят от B . Очевидно, что подобный подход возможен лишь для очень простых фоновых полей. Например, он используется при расчете эффективного потенциала скалярных теорий [15], когда B выбирается постоянным.

Второй подход, используемый здесь, состоит в учете фонового поля B по теории возмущений. Для этого следует рассматривать ОЧН вакуумные диаграммы поля Q с полем B , появляющимся в качестве внешних линий. В таком подходе поле B произвольно и, в действительности, в его конкретизации нет нужды. Необходимо поступать следующим образом. Для генерирования правил Фейнмана используется действие $S[Q + B]$. Из части S , квадратичной по полю Q , строится обычный пертурбативный пропагатор этого поля. При этом неквадратичная часть S порождает взаимодействия. Вершины взаимодействия, в которые входят только поля Q , используются внутри диаграмм, а вершины, содержащие как поля Q , так и поля B , — для вставки внешних линий. Таким способом может быть вычислена любая ОЧН функция Грина. Поскольку эффективное действие включает только ОЧН диаграммы, вершины, содержащие только одну квантовую линию, никогда не дадут вклада. По этой причине в правилах Фейнмана не следует рассматривать, в частности, диаграмму смешивания B и Q полей.

2. Неабелевы калибровочные теории

2.1. Калибровочно инвариантное эффективное действие

(i) Обсуждение предыдущего раздела касалось произвольных некалибровочных теорий. Важное отличие калибровочных теорий состоит в том, что при их квантовании необходимо выбрать калибровку. Поэтому выражение (1.1), определяющее производящий функционал несвязных функций Грина, в случае калибровочных теорий необходимо модифицировать следующим образом:

$$Z[J, \bar{\eta}, \eta] = \int d[Q]d[f]d[\bar{f}] \det \left[\frac{\delta G^a}{\delta \omega^b} \right] \exp i \left(S[Q, \bar{f}, f] - \frac{1}{2\xi} G \cdot G + J \cdot Q + (\bar{\eta} \cdot f + \text{h.c.}) \right), \quad (2.1)$$

где теперь Q — это калибровочное поле Q_μ^a , a — индекс в присоединенном представлении Ad калибровочной группы; f — поле фермионов, η — соответствующий ему источник. Напомним, что f и η — антикоммутирующие грассмановы переменные.

Опишем последовательно все члены, входящие в это выражение. Прежде всего

$$J \cdot Q \equiv \int d^4x J_\mu^a Q_\mu^a \quad (2.2)$$

и

$$\bar{\eta} \cdot f \equiv \int d^4x \bar{\eta}^A f_A, \quad (2.3)$$

где A — индекс в представлении F фермионов.

Действие

$$S[Q, \bar{f}, f] = \int d^4x \mathcal{L}(Q, f) \quad (2.4)$$

определяется лагранжианом

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F. \quad (2.5)$$

Здесь \mathcal{L}_G — лагранжиан калибровочных полей

$$\mathcal{L}_G(Q) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(Q) F_{\mu\nu}^a(Q), \quad (2.6)$$

а $F_{\mu\nu}^a(Q)$ — калибровочно-инвариантный тензор напряженности, для группы со структурными константами f^{abc} равный

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu Q_\nu^a - \partial_\nu Q_\mu^a - gf^{abc} Q_\mu^b Q_\nu^c. \quad (2.7)$$

\mathcal{L}_F — лагранжиан фермионных полей, имеющий для дираковских фермионов следующий вид:

$$\mathcal{L}_F = \sum_f i \bar{f} \not{D}(Q) f, \quad (2.8)$$

где $\not{D} \equiv D_\mu \gamma_\mu$, D_μ — ковариантная производная

$$D_\mu(Q) = \partial_\mu + igQ_\mu^a T^a, \quad (2.9)$$

а T^a — генераторы калибровочной группы в представлении F фермионов.

Далее,

$$G \cdot G \equiv \int d^4x G^a(Q) G^a(Q), \quad (2.10)$$

где функция $G^a \equiv G^a(Q)$ задает условие фиксации калибровки: $G^a = 0$. Обычно выбирается лоренцева калибровка $G^a = \partial_\mu Q_\mu^a$. И, наконец, $\delta G^a / \delta \omega^b$ является вариационной производной G^a , соответствующей инфинитезимальному калибровочному преобразованию

$$\begin{aligned} \delta Q_\mu^a &= gf^{abc} \omega^b Q_\mu^c - \partial_\mu \omega^a = -D_\mu^{ab}(Q) \omega^b, \\ \delta f &= ig \omega^a T^a f, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $D_\mu^{ab}(Q)$ — ковариантная производная в присоединенном представлении, равная

$$D_\mu^{ab}(Q) = \delta^{ab} \partial_\mu - gf^{abc} Q_\mu^c, \quad (2.12)$$

так что

$$\frac{\delta Q_\mu^a}{\delta \omega^b} = -D_\mu^{ab}(Q). \quad (2.13)$$

Следовательно, для лоренцевой калибровки имеем

$$\frac{\delta G^a}{\delta \omega^b} = -\partial_\mu D_\mu^{ab}(Q). \quad (2.14)$$

(ii) Как естественное обобщение (2.1) производящий функционал МФП для калибровочных теорий вводится в следующем виде:

$$\begin{aligned} \check{Z}[J, B, \bar{\eta}, \eta] = \int d[Q]d[f]d[\bar{f}] \det \left[\frac{\delta \check{G}^a}{\delta \check{\omega}^b} \right] \exp i \left(\check{S}[Q, B, \bar{f}, f] - \frac{1}{2\xi} \check{G} \cdot \check{G} \right. \\ \left. + J \cdot Q + (\bar{\eta} \cdot f + \text{h.c.}) \right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $\check{S}[Q, B, \bar{f}, f] \equiv S[Q+B, \bar{f}, f]$; \check{G} — подлежащий последующему выбору член фиксации квантовой калибровки, а $\delta \check{G}^a / \delta \check{\omega}^b$ — его вариационная производная, которая соответствует инфинитезимальному калибровочному преобразованию

$$\begin{aligned} \delta Q_\mu^a &= g f^{abc} \check{\omega}^b (Q_\mu^c + B_\mu^c) - \partial_\mu \check{\omega}^a = -D_\mu^{ab} (Q + B) \check{\omega}^b, \\ \delta B_\mu^a &= 0, \\ \delta f &= ig \check{\omega}^a T^a f, \end{aligned} \quad (2.16)$$

сохраняющему \check{S} инвариантным. В рамках МФП было бы необходимо, вообще говоря, расщепить также и фермионные поля на фоновые и квантовые. Однако для всех полей, не входящих в калибровочное условие, квантование в МФП эквивалентно квантованию в обычном формализме. Поэтому будем по-прежнему обозначать фермионные поля общим символом f . Кроме того, в отсутствие особой необходимости явная зависимость от f в дальнейшем для простоты не будет указываться.

Теперь можно определить различные величины в обоих формализмах и связать их между собой. Напомним, что соотношения между величинами МФП и обычного формализма были получены с помощью сдвига переменной интегрирования в функциональном интеграле. С учетом сказанного можно и для калибровочных теорий вывести по аналогии с (1.31) точно такое же основное соотношение

$$\check{\Gamma}[0, B] = \Gamma[B], \quad (2.17)$$

однако с одной важной оговоркой. Если $\check{\Gamma}[0, B]$ с левой стороны равенства (2.17) вычислено для члена фиксации калибровки $\check{G}^a = \check{G}^a(Q, B)$, то оно будет эквивалентно обычному эффективному действию, но вычисленному в калибровке $\check{G}^a = \check{G}^a(Q - B, B)$ (обозначим его $\check{\Gamma}[\bar{Q}]$) и взятому при $\bar{Q} = B$, т.е. $\Gamma[B] = \check{\Gamma}[\bar{Q}]|_{\bar{Q}=B}$.

Калибровка $\check{G}^a = \check{G}^a(Q - B, B)$, возможно, несколько непривычна для обычного формализма. Однако равенство (2.17) и калибровочная независимость физических величин гарантируют, что МФП хотя и дает иные функции Грина, чем обычный подход в обычной калибровке, тем не менее, приводит к той же S -матрице. Таким образом, этот метод справедлив для вычислений и в калибровочных теориях.⁵

Как уже упоминалось во введении, большим преимуществом МФП является сохранение в нем явной калибровочной инвариантности. Последнее утверждение более конкретно означает, что возможен такой выбор члена фиксации квантовой

⁵Более строгое доказательство эквивалентности обоих подходов в калибровочных теориях дано в работах [11].

калибровки \check{G} , для которого эффективное действие $\check{\Gamma}[0, B]$ является калибровочно-инвариантной функцией B . В результате этого требования набор возможностей для выбора калибровочного условия резко ограничен. Естественным калибровочно-инвариантным обобщением лоренцевой калибровки является следующее:

$$\check{G}^a = D_\mu(B)^{ab} Q_\mu^b, \quad (2.18)$$

где фоновая ковариантная производная имеет вид

$$D_\mu^{ab}(B) = \delta^{ab} \partial_\mu - g f^{abc} B_\mu^c. \quad (2.19)$$

Отметим, что в этом случае в силу антисимметрии тензора f^{abc} упоминавшаяся выше калибровка \check{G} имеет тот же вид⁶

$$\tilde{G}^a = D_\mu(B)^{ab} Q_\mu^b. \quad (2.20)$$

При таком выборе калибровки производящий функционал МФП (2.15) инвариантен относительно инфинитезимальных фоновых калибровочных преобразований

$$\delta B_\mu^a = g f^{abc} \omega^b B_\mu^c - \partial_\mu \omega^a = -D_\mu^{ab}(B) \omega^b, \quad (2.21)$$

$$\delta f = i g \omega^a T^a f, \quad (2.22)$$

$$\delta J_\mu^a = g f^{abc} \omega^b J_\mu^c, \quad (2.23)$$

$$\delta \eta = i g \omega^a T^a \eta. \quad (2.24)$$

Чтобы убедиться в этом, сделаем инфинитезимальную замену переменных интегрирования в (2.15) $Q_\mu^a \rightarrow Q_\mu^a + \delta Q_\mu^a$ с вариацией

$$\delta Q_\mu^a = g f^{abc} \omega^b Q_\mu^c. \quad (2.25)$$

Равенство (2.21) является инфинитезимальным калибровочным преобразованием B , а (2.25) — соответствующим ему присоединенным преобразованием поля Q . Функциональная мера инвариантна относительно последнего преобразования. По построению ковариантная производная $D_\mu(B)Q$ (2.18) преобразуется однородно относительно фоновых калибровочных преобразований и, значит, член $\check{G} \cdot \check{G}$ инвариантен относительно них. Равенства (2.23) и (2.25) описывают преобразование присоединенного представления одной и той же группы, относительно которого член $J \cdot Q$ в (2.15) очевидным образом инвариантен. Складывая (2.21) и (2.25), находим

$$\delta(B_\mu^a + Q_\mu^a) = g f^{abc} \omega^b (B_\mu^c + Q_\mu^c) - \partial_\mu \omega^a = -D_\mu^{ab}(B + Q) \omega^b, \quad (2.26)$$

что при выборе $\omega = \check{\omega}$ соответствует квантовому калибровочному преобразованию (2.16), относительно которого действие $\check{S}[Q, B] = S[Q + B]$ инвариантно. И, наконец,

⁶По этой причине о МФП иногда говорят также, как о выборе фоновой калибровки в обычном формализме.

в силу однородности преобразования \check{G} , функциональный определитель в (2.15) также инвариантен. Окончательно, функционал $\check{Z}[J, B]$ инвариантен относительно фоновых калибровочных преобразований (2.21)–(2.24).

Поскольку аргумент \check{Q} эффективного действия МФП является переменной, сопряженной J , из инвариантности $\check{Z}[J, B]$ следует, что $\check{\Gamma}[\check{Q}, B]$ инвариантно относительно преобразований (2.21) и

$$\delta\check{Q}_\mu^a = gf^{abc}\omega^b\check{Q}_\mu^c. \quad (2.27)$$

Отметим, что это — однородное преобразование и, следовательно, переводит $\check{Q} = 0$ в себя. Поэтому $\check{\Gamma}[0, B]$ отдельно инвариантно относительно преобразования (2.21). Поскольку последнее — это не что иное, как обычное калибровочное преобразование B , ясно, что $\check{\Gamma}[0, B]$ является калибровочно-инвариантным функционалом B .

В результате, ОЧН функции Грина, получаемые функциональным дифференцированием $\check{\Gamma}[0, B]$ по полям при нулевых значениях последних, будут удовлетворять наивным тождествам Уорда, соответствующим фоновой калибровочной инвариантности. Эти тождества получаются из базисного тождества

$$\begin{aligned} \delta\check{\Gamma}[0, B, \bar{f}, f] &= \frac{\delta\check{\Gamma}[0, B, \bar{f}, f]}{\delta B_\mu^a} \delta B_\mu^a + \\ &+ \sum_f \left(\delta\bar{f} \frac{\delta\check{\Gamma}[0, B, \bar{f}, f]}{\delta\bar{f}} - \frac{\delta\check{\Gamma}[0, B, \bar{f}, f]}{\delta f} \delta f \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где δB_μ^a и δf даются соответственно (2.21) и (2.22), дифференцированием коэффициентов при независимых параметрах преобразований ω_a по полям B и f (при нулевых значениях последних) и последующим приравниванием полученных соотношений нулю.

Например, для трехточечной вершинной функции $\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}$ вершины BBB в импульсном представлении должно выполняться тождество Уорда

$$k_\mu \Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(k, p, q) = -ig \left\{ f^{acd} \Sigma_{\nu\rho}^{bd}(p) + f^{abd} \Sigma_{\rho\nu}^{cd}(q) \right\}, \quad (2.29)$$

или эквивалентно, с учетом для присоединенного представления калибровочных бозонов равенства $(T^a)^{bc} = -if^{abc}$:

$$k_\mu \Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(k, p, q) = -g \left\{ \Sigma_{\nu\rho}^{bd}(p) (T^a)^{dc} - (T^a)^{bd} \Sigma_{\nu\rho}^{dc}(q) \right\}, \quad (2.30)$$

где $\Sigma_{\mu\nu}^{ab}(k)$ — двухточечная вершинная функция фоновых калибровочных полей ($\Sigma_{\mu\nu}^{ab}(k) = \Sigma_{\nu\mu}^{ba}(k)$). Видно, что выражение в правой части (2.29) симметрично относительно комбинированной замены: $b \leftrightarrow c$, $\nu \leftrightarrow \rho$ и $p \leftrightarrow q$, как и требует бозе-статистика. Данное тождество означает, в частности, что для сохранения калибровочной инвариантности любая модификация трехточечной вершины BBB должна с неизбежностью сопровождаться модификацией двухточечной вершины BB (и, следовательно, пропагатора поля B).

В свою очередь, двухточечная вершина должна удовлетворять условию поперечности:

$$k_\mu \Sigma_{\mu\nu}^{ab}(k) = 0 \quad (2.31)$$

в силу отсутствия одноточечной вершины B (так называемого “головастика”)

$$\Gamma_\mu^a \equiv i \frac{\delta \check{\Gamma}}{\delta B_\mu^a} \Big|_{B=0} = 0, \quad (2.32)$$

что является следствием калибровочной симметрии и лоренц-инвариантности.

Аналогично для трехточечной бозон–фермионной вершинной функции $\Gamma_{\mu A}^{aB}$, соответствующей вершине $B\bar{f}f$, имеем тождество

$$k_\mu \Gamma_{\mu A}^{aB}(k, \bar{p}, p) = -g \left\{ \Sigma_A^C(\bar{p}, -\bar{p}) (T^a)_C^B - (T^a)_A^C \Sigma_C^B(-p, p) \right\}, \quad (2.33)$$

где $\Sigma_A^B(k, -k)$ — двухточечная вершинная функция фермионных полей. Замечание о возможной модификации, подобное сказанному выше, равным образом справедливо относительно этих и других вершин.

▽ Упражнения 3, 4

Таким образом, желаемая цель квантования неабелевой калибровочной теории в МФП достигнута. Последнее, что осталось сделать, это показать, как реально вычисляется эффективное действие МФП $\check{\Gamma}[0, B]$.

2.2. Правила Фейнмана в МФП

Эффективное действие МФП $\check{\Gamma}[0, B]$ генерирует ОЧН функции Грина. На практике они вычисляются с помощью правил Фейнмана, выводимых из сдвинутого действия $S[Q + B]$, члена фиксации квантовой калибровки и функционального определителя в (2.15). Согласно (2.16) и (2.18) последний равен

$$\frac{\delta \check{G}^a}{\delta \check{\omega}^b} = -D_\mu^{ac}(B) D_\mu^{cb}(B + Q). \quad (2.34)$$

Вводя обычным образом антикоммутирующие скалярные духовые поля, его можно заменить духовым лагранжианом

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\theta &= \overline{(D_\mu(B)\theta)} (D_\mu(B + Q)\theta) \\ &= -\bar{\theta} D_\mu(B) D_\mu(B + Q)\theta + \text{полная произв.}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

где ковариантная производная определяется как обычно в виде

$$(D_\mu(V)\theta)^a \equiv D_\mu^{ab}(V)\theta^b \quad (2.36)$$

для $V = B$ или $B + Q$. Линии, соответствующие полям Q , используются внутри диаграмм, а линии полей B — в качестве внешних линий. Все пропагаторы в этих

ОЧН диаграммах являются пропагаторами поля Q . Это существенно, ибо пропагатор поля B пока не определен, так как фоновая калибровочная инвариантность все еще не нарушена выбором фоновой калибровки. Поскольку рассматриваются только ОЧН диаграммы, вершины, включающие только единичное поле Q , никогда не дают вклада и, следовательно, могут быть опущены. В частности, это касается вершины смешивания Q – B .

Полный набор фейнмановских правил МФП для точных неабелевых калибровочных теорий приведен в приложении I. Процедура вычисления S -матричных элементов с помощью этих правил такова. Следует выписать все ОЧН диаграммы, необходимые для данной связной функции Грина. Затем применить правила Фейнмана приложения I для вычисления ОЧН диаграмм, используя линии B в качестве внешних линий и линии Q — в качестве внутренних. После вычисления и перенормировки ОЧН функций Грина основная работа позади и для вершинных функций могут быть проверены простые тождества Уорда. На этом этапе необходимо зафиксировать калибровку фонового поля B . Ее выбор не обязан быть связанным с выбором калибровки квантового поля Q . Преимущество МФП в том и состоит, что фиксация калибровки поля B и определение тем самым его пропагатора могут быть отложены до этого момента. Теперь, задав пропагатор B и используя его для связывания ОЧН диаграмм, можно построить деревья для получения связных функций Грина. И наконец, S -матрица определяется из связных функций Грина ЛСЦ-редукцией, т.е. усечением внешних линий с помощью полного обратного пропагатора фоновых полей, одновременным переводом этих линий на массовую поверхность и последующим добавлением волновых функций внешних частиц.

▽ Упражнение 5

2.3. Перенормировки

При вычислении эффективного действия $\check{\Gamma}[0, B]$ возникают расходимости, которые необходимо устранить, или перенормировать. Это делается обычно посредством мультипликативных перенормировок за счет связи голых и перенормированных величин. Для рассматриваемых неабелевых калибровочных теорий в МФП эта связь имеет вид для полей —

$$\begin{aligned} B_{\mu,0} &= Z_B^{1/2} B_\mu, \\ f_0 &= Z_f^{1/2} f \end{aligned} \quad (2.37)$$

и для констант связи —

$$\begin{aligned} g_0 &= Z_g g, \\ M_{f,0} &= Z_m M_f. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Вводимых констант перенормировок полей и параметров, в принципе, достаточно для перенормировки теории.

Однако имеется еще два поля — квантовое поле Q и духовое поле θ , а также квантовый калибровочный параметр $\check{\xi}$, и естественно возникает вопрос об их перенормировке. В МФП предпочтительно работать только с функциями Грина фоновых, но не квантовых полей, поскольку явно сохраняется только фоновая калибровочная инвариантность. Тогда, на первый взгляд, программа перенормировок за пределами одной петли должна приводить к трудностям, поскольку вычисление констант перенормировок квантовых полей и духов с необходимостью требует непосредственной работы с их функциями Грина.

Покажем, что, так как эти поля появляются только внутри петель, в их перенормировке нет необходимости и, более того, их наиболее удобно оставить в виде голых величин. Чтобы убедиться в этом, предположим, что поля Q и θ все же перенормированы в виде

$$\begin{aligned} Q_{\mu,0} &= Z_Q^{1/2} Q_\mu, \\ \theta_0 &= Z_\theta^{1/2} \theta. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Тогда для каждой внутренней линии поля Q имеется в точности по одному множителю $Z_Q^{-1/2}$, появляющемуся на каждом из ее концов из-за перенормировки поля Q в вершине, и множитель Z_Q , связанный с перенормировкой пропагатора поля Q . Следовательно, два множителя $Z_Q^{-1/2}$ и множитель Z_Q , связанные с каждой из внутренних линий, точно компенсируют друг друга. Аналогичным образом два множителя $Z_\theta^{-1/2}$ на концах каждой духовой линии точно сокращаются с множителем Z_θ от духового пропагатора. Поэтому перенормировка этих полей не существенна, и проще оставить квантовые калибровочные и духовые поля перенормированными.

Однако все еще необходимо перенормировать параметр фиксации квантовой калибровки ввиду того, что продольная часть пропагатора квантовых полей не перенормирована и, следовательно, зависит от голого $\check{\xi}_0$. Поэтому в общем случае дополнительно к (2.37), (2.38) необходимо ввести

$$\check{\xi}_0 = Z_\xi \check{\xi}. \quad (2.40)$$

Тем не менее, в принципе, возможно полностью избежать перенормировки квантового калибровочного параметра, производя вычисления с произвольным голым параметром $\check{\xi}_0$. Затем можно либо извлекать физические величины, которые не зависят от этого параметра, либо перейти к калибровке Тофта–Ландау $\check{\xi}_0 = 0$. В любом случае перенормировки квантового калибровочного параметра не требуется. Здесь следует сделать одно важное замечание. Ввиду наличия вершин, пропорциональных $1/\check{\xi}_0$, нельзя переходить к пределу $\check{\xi}_0 = \check{\xi} = 0$, пока все вычисления не закончены и все множители $1/\check{\xi}_0$ не сократились, т.е. в процессе всех вычислений необходимо удерживать произвольный параметр $\check{\xi}_0$ и лишь в конце устремлять $\check{\xi}_0 \rightarrow 0$.

Поскольку в МФП сохраняется явная калибровочная инвариантность, константы перенормировок Z_B и Z_g в действительности связаны. Расходимости, возникающие в калибровочно-инвариантном эффективном действии $\check{\Gamma}[0, B]$, должны иметь

калибровочно-инвариантную структуру, содержа в, частности, выражение $F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a$, помноженное на некоторую расходящуюся константу. Но, согласно (2.37), (2.38), тензор напряженности $F_{\mu\nu}^a$ перенормируется как

$$F_{\mu\nu,0}^a = Z_B^{1/2} (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu - Z_B^{1/2} Z_g g f^{abc} B_\mu^b B_\nu^c). \quad (2.41)$$

Возникающий отсюда контрчлен имеет требуемый калибровочно-инвариантный вид только если

$$Z_g = Z_B^{-1/2}. \quad (2.42)$$

Это соотношение в МФП между константами перенормировок заряда и фонового поля для неабелевых калибровочных теорий имеет в точности тот же вид, что и аналогичное соотношение в КЭД. Аналогично КЭД можно показать, что это равенство может быть получено также, исходя из требования, чтобы как голые, так и перенормированные вершинные функции удовлетворяли одним и тем же тождествам Уорда, т.е. чтобы процедура перенормировок сохраняла явную калибровочную инвариантность.

▽ Упражнение 6

2.4. Схема минимальных вычитаний

Наиболее простой и удобный способ перенормировки неабелевых калибровочных теорий состоит в использовании размерной регуляризации,⁷ сохраняющей калибровочную симметрию, и схемы минимальных вычитаний. При этом все интегрирования по петлевым импульсам производятся в пространстве размерности $d = 4 - 2\epsilon$, $\epsilon > 0$, где интегралы сходятся, а константы перенормировок записываются в виде суммы полюсных членов в окрестности $\epsilon = 0$ типа

$$Z_B = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_B^{(n)}}{\epsilon^n}. \quad (2.43)$$

При ограничении l петлями в это разложение в общем случае дают вклад члены $1/\epsilon$, $1/\epsilon^2$, ..., $1/\epsilon^l$.

В схеме размерной регуляризации размерности голых регуляризованных параметров и полей до снятия регуляризации изменяются в сравнении с их каноническими значениями. Это связано с тем, что в d измерениях калибровочное действие включает члены вида

$$\begin{aligned} & \int d^d x (\partial_\mu B_{\nu,0})^2, \\ & \int d^d x g_0 (\partial_\mu B_{\nu,0}) (B_{\rho,0} B_{\sigma,0}), \\ & \int d^d x g_0^2 (B_{\mu,0} B_{\nu,0})^2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

⁷Другой регуляризацией в векторо-подобных неабелевых калибровочных теориях, также сохраняющей калибровочную симметрию и удобной для общего рассмотрения, является регуляризация Паули-Вилларса с высшими производными [2].

Из первого выражения следует, что для того, чтобы действие было безразмерным при $d = 4 - 2\epsilon$, поле B_0 должно в единицах массы иметь размерность $M^{1-\epsilon}$. Тогда последующие выражения самосогласованы, если константа g_0 имеет размерность M^ϵ . Если мы все же хотим использовать перенормированные величины канонических размерностей, необходимо ввести некоторый массовый параметр μ и записать соотношения перенормировок для калибровочных величин в виде

$$\begin{aligned} B_{\mu,0} &= Z_B^{1/2} \mu^{-\epsilon} B_\mu, \\ g_0 &= Z_g \mu^\epsilon g. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Введение при перенормировках произвольной энергетической шкалы μ и является той причиной, по которой калибровочная теория характеризуется не безразмерной константой g , а неким параметром Λ размерности массы, являющимся определенной комбинацией g и μ (так называемая размерная трансмутация).

В качестве конкретного примера использования МФП приведем однопетлевое вычисление β -функции неабелевой калибровочной теории. β -функция по определению связана с зависимостью от μ константы перенормировки Z_g в виде

$$\beta = -g\mu \frac{\partial \ln Z_g}{\partial \mu}. \quad (2.46)$$

Аналогично аномальная размерность γ_B определяется в виде

$$\gamma_B = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \ln Z_B}{\partial \mu}. \quad (2.47)$$

В силу (2.42) β и γ_B в МФП связаны соотношением

$$\beta = g\gamma_B. \quad (2.48)$$

Таким образом, для вычисления β -функции достаточно ограничиться лишь двухточечной функцией фонового калибровочного поля. В отличие от обычного формализма никаких вершинных функций при этом не требуется. Становятся поэтому понятными значительные упрощения, возникающие в МФП.

Поскольку μ произвольно, необходимо потребовать, чтобы голая константа g_0 была от него независима, что дает [16]

$$\mu \frac{\partial g_0}{\partial \mu} = Z_g \mu^\epsilon \left(\epsilon g + g\mu \frac{\partial \ln Z_g}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \right) = 0, \quad (2.49)$$

или эквивалентно

$$\mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = -\epsilon g - g\mu \frac{\partial \ln Z_g}{\partial \mu}. \quad (2.50)$$

Иначе это соотношение можно записать как

$$\mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = -\epsilon g + \beta, \quad (2.51)$$

что в пределе $\epsilon = 0$ соответствует обычному выражению $\mu \partial g / \partial \mu = \beta$. Применяя к (2.50) правило дифференцирования сложной функции

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial g} \quad (2.52)$$

и используя (2.42), получаем

$$\beta = \frac{1}{2} g (\beta - \epsilon g) \frac{\partial \ln Z_B}{\partial g}. \quad (2.53)$$

Поскольку в пределе $\epsilon = 0$ функция β , связанная с перенормированными величинами, должна быть конечна, коэффициенты при различных степенях $1/\epsilon$ в (2.53) должны независимо сократиться. Используя разложение (2.43), получаем отсюда рекуррентное соотношение

$$\beta \left(2 - g \frac{\partial}{\partial g} \right) Z_B^{(n)} = -g^2 \frac{\partial}{\partial g} Z_B^{(n+1)}. \quad (2.54)$$

С учетом условия $Z_B^{(0)} = 1$ это дает окончательно

$$\beta = -\frac{1}{2} g^2 \frac{\partial Z_B^{(1)}}{\partial g}, \quad (2.55)$$

т.е. β -функция может быть вычислена с помощью вычета простого полюса $1/\epsilon$ в константе перенормировки фонового поля.

2.5. Вычисление β -функции

Продемонстрируем процедуру вычисления β -функции. Найдем предварительно ее ожидаемый вид. При разложении по петлям структура искомым величин такова: $Z_B = \sum_l \mathcal{O}(g^{2l})$ и $\beta = \sum_l \mathcal{O}(g^{2l+1})$. Далее, для части $Z_B^{(1)} \sim g^2$, согласно рекуррентному соотношению (2.54), имеет место $(2 - g \partial / \partial g) Z_B^{(1)} = 0$. Но тогда, согласно тому же соотношению, это означает, что член в $Z_B^{(2)}$, пропорциональный g^4 , равен нулю. Таким образом, при вычислении Z_B на двухпетлевом уровне не должно быть полюса $1/\epsilon^2$. Отсюда и из (2.55) следует, что при записи β в виде

$$\beta = -g \left(b_0 \left(\frac{g}{4\pi} \right)^2 + b_1 \left(\frac{g}{4\pi} \right)^4 \right) \quad (2.56)$$

Z_B в двухпетлевом приближении должно иметь структуру

$$Z_B = 1 + \left(b_0 \left(\frac{g}{4\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} b_1 \left(\frac{g}{4\pi} \right)^4 \right) \frac{1}{\epsilon}. \quad (2.57)$$

при $n_f < 11C_A/2T_F$ приводящий согласно (2.51) к асимптотической свободе этих теорий, т.е. к убыванию константы взаимодействия с ростом энергетической шкалы μ ($n_f < 11n$ для $SU(n)$ с дираковскими фермионами в фундаментальном представлении):

$$g^2(\mu) = \frac{g_*^2}{1 + \frac{b_0 g_*^2}{(4\pi)^2} \ln \frac{\mu^2}{\mu_*^2}} \equiv \frac{(4\pi)^2}{b_0 \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2}}. \quad (2.65)$$

Здесь μ_* — произвольная точки нормировки, $g_* \equiv g(\mu_*)$, а

$$\Lambda \equiv \mu_* e^{-\frac{1}{2} \frac{(4\pi)^2}{b_0 g_*^2}} \quad (2.66)$$

есть параметр, непосредственно определяемый из эксперимента и не зависящий от выбора μ_* .¹⁰

Хотя в рамках МФП однопетлевые вычисления в ненарушенных калибровочных теориях и упрощаются, тем не менее преимущества метода еще не проявляются в полную силу. В работе [7] калибровочная β -функция посчитана вплоть до двух петель. Здесь МФП становится действительно неочевидным и приводит к значительно-му сокращению труда по сравнению с обычным методом. Другой областью явных преимуществ, даваемых МФП, являются калибровочные теории со спонтанным нарушением симметрии, излагаемые в следующем разделе.

3. Теория электрослабых взаимодействий

3.1. Классический лагранжиан СМ электрослабых взаимодействий

В дальнейшем предполагается, что основы СМ электрослабых взаимодействий известны (см., например, [1,17]). Тем не менее, для напоминания и для того, чтобы определить необходимые величины, выпишем классический лагранжиан \mathcal{L} (минимальной) СМ. Он состоит из трех частей — калибровочной, хиггсовской и фермионной:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_F. \quad (3.1)$$

(i) Калибровочная часть представляется в виде

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W_{\mu\nu}^i, \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \\ W_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g_2 \varepsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \end{aligned} \quad (3.3)$$

¹⁰Выражение (2.65) справедливо при $\mu > \Lambda$. В точке $\mu = \Lambda$ бегущая константа $g(\mu)$ в однопетлевом приближении обращается в бесконечность, сигнализируя о наступлении сильной связи на соответствующих масштабах. Поэтому параметр Λ называется “параметром конфайнмента” (невылетания). Однако следует понимать условность этого наименования в данном контексте.

есть тензоры напряженности изосинглетного и изотриплетного полей соответственно. Здесь изосинглет B_μ соответствует гиперзаряду Y группы $U(1)_Y$, а изотриплет W_μ^i — генераторам T_i , $i = 1, 2, 3$ группы слабого изоспина $SU(2)_W$.¹¹ В синглетном представлении $T_i \equiv 0$, $Y = y$, в дублетном — $T_i = \tau_i/2$, $Y = y\tau_0$, где τ_0 — двумерная единичная матрица, а τ_i — матрицы Паули.

(ii) Хиггсовская часть имеет вид

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi) \quad (3.4)$$

с ковариантной производной, равной

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_1 Y B_\mu + ig_2 T_i W_\mu^i. \quad (3.5)$$

В (3.4) $\phi(x)$ обозначает комплексное скалярное поле $SU(2)_W$ -дублета минимального хиггсовского сектора с гиперзарядом $y_\phi = 1/2$

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

для которого хиггсовский потенциал имеет вид

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} \left(\phi^\dagger \phi - \frac{\eta^2}{2} \right)^2. \quad (3.7)$$

Слабый гиперзаряд Y определяется соотношением

$$Q = Y + T_3, \quad \langle Q \rangle = Y, \quad (3.8)$$

где Q — оператор электрического заряда, а $\langle Q \rangle$ — его среднее по мультиплету.

(iii) Фермионная часть представима в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= \sum_g \left(\bar{l}_L^g i \not{D} l_L^g + \bar{q}_L^g i \not{D} q_L^g \right) \\ &+ \sum_g \left(\bar{e}_R^g i \not{D} e_R^g + \bar{u}_R^g i \not{D} u_R^g + \bar{d}_R^g i \not{D} d_R^g \right) \\ &- \sum_g \left(\bar{l}_L^g h_l^g e_R^g \phi + \bar{q}_L^g h_a^g u_R^g \phi^C + \bar{q}_L^g h_d^g d_R^g \phi + \text{h.c.} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Левые фермионы лептонного (l) и кваркового (q) типов каждого из поколений группируются в $SU(2)_W$ -дублеты (цветовой индекс опускается)

$$l_L^g = P_L l^g = \begin{pmatrix} \nu_L^g \\ e_L^g \end{pmatrix}, \quad q_L^g = P_L q^g = \begin{pmatrix} u_L^g \\ d_L^g \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

¹¹Здесь и в дальнейшем используются общепринятые в СМ обозначения для классических векторных полей B и W . Их квантовые партнеры маркируются галочкой (знаком “чек”).

а правые фермионы — в синглеты:

$$l_R^g = P_R l^g, \quad u_R^g = P_R u^g, \quad d_R^g = P_R d^g, \quad (3.11)$$

где $P_{R,L} = (1 \pm \gamma_5)/2$ — это проекторы на право- и левокиральные поля соответственно, $g = 1, 2, 3$ — индекс поколения (семейства), а ν , e , u and d — нейтрино, заряженные лептоны, а также кварки u - и d -типов соответственно. Напомним, что фермионные поля являются антикоммутирующими грассмановыми переменными. В (3.9) h_e^g , h_u^g и h_d^g означают диагональные элементы матриц юкавских констант (в пренебрежении смешиванием кварков), $\phi^C \equiv i\tau_2 \phi^* = (\phi^{0*}, -\phi^-)^T$ является зарядово-сопряженным хиггсовским полем, а $\phi^- \equiv (\phi^+)^*$.

Хиггсовское поле ϕ имеет ненулевое вакуумное среднее $\langle \phi \rangle$, которое может быть выбрано в виде

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Величина v (наряду с параметрами классического лагранжиана) определяет классические массы частиц, связанные с коэффициентами при квадратах полей: для калибровочных бозонов

$$M_W = g_2 v/2, \quad M_Z = (g_1^2 + g_2^2)^{1/2} v/2, \quad (3.13)$$

для фермионов $f = u, d, e$

$$M_f = h_f v/\sqrt{2} \quad (3.14)$$

и, наконец, для хиггсовского бозона

$$M_H^2 = \lambda(3v^2 - \eta^2)/4 \equiv m_H^2 - \frac{1}{v} t_H. \quad (3.15)$$

Здесь

$$m_H = \sqrt{\lambda} v/\sqrt{2} \quad (3.16)$$

— классическая масса поля H , соответствующая условию $\eta = v$, а

$$t_H = \lambda v(\eta^2 - v^2)/4 \quad (3.17)$$

— классический головастик, описывающий линейный но хиггсовскому полю член в классическом лагранжиане, который равен $t_H H$. Подчеркнем, что априори v является независимым параметром теории. В общем случае $v \neq \eta$, где η — положение минимума классического хиггсовского потенциала (3.7). Единственным ограничением непротиворечивости, следующим из (3.15), является условие $3v^2 - \eta^2 > 0$. Совпадение положения минимума классического потенциала и вакуумного среднего хиггсовского поля соответствует обращению t_H в нуль.

Поля физических калибровочных бозонов, т.е. собственные состояния массы и электрического заряда, определяются соотношениями

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \quad \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

где

$$\begin{aligned} c_W \equiv \cos \theta_W &= \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} = \frac{e}{g_1} = \frac{M_W}{M_Z}, \\ s_W \equiv \sin \theta_W &= \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} = \frac{e}{g_2} = \left(1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

θ_W — угол Вайнберга электрослабого смешивания, а электромагнитная константа e равна

$$e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}. \quad (3.20)$$

В физическом базисе ковариантная производная имеет вид

$$D_\mu = \partial_\mu + ieQA_\mu + \frac{ie}{c_W s_W} (T_3 - s_W^2 Q) Z_\mu + \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{e}{s_W} (T_+ W_\mu^+ + \text{h.c.}), \quad (3.21)$$

где $T_\pm = T_1 \pm iT_2$.

Между различными наборами независимых параметров классического лагранжиана СМ существуют простые соотношения. До выбора схемы перенормировок все такие наборы априори эквивалентны. В схеме перенормировок на массовой поверхности, используемой в дальнейшем, в качестве независимых параметров выбираются электрический заряд и физические (полюсные) массы частиц, а также головастик (или вакуумное среднее v). Остальные параметры, в том числе $\sin \theta_W$, являются их функциями. Эффективно, как обсуждается в дальнейшем, головастик может быть положен равным нулю.

3.2. Квантование СМ электрослабых взаимодействий в МФП

(i) В обычном формализме при переходе от классической к квантовой теории квантуются непосредственно поля, входящие в классический лагранжиан. При этом к \mathcal{L} добавляется фиксирующий калибровку член, который нарушает явную калибровочную инвариантность. В отличие от этого в МФП поля V и S , коллективно обозначающие векторные и скалярные поля, соответственно, расщепляются на фоновые (классические) V, S и квантовые \check{V}, \check{S} поля, так что

$$\mathcal{L}(V, S) \rightarrow \check{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(V + \check{V}, S + \check{S}). \quad (3.22)$$

Квантовые поля являются переменными интегрирования в функциональном интеграле. Добавляемый член фиксации квантовой калибровки нарушает только квантовую калибровочную инвариантность, но сохраняет инвариантность эффективного действия по отношению к калибровочным преобразованиям фоновых полей.

(ii) Во избежание смешивания на древесном уровне между квантовыми калибровочными бозонами и соответствующими нефизическими хиггсовскими полями необходимо добавить калибровочное условие Тофта, обобщенное для МФП [18]:

$$\mathcal{L}_{\check{G}} = -\frac{1}{2\xi_B} (\check{G}^0)^2 - \frac{1}{2\xi_W} (\check{G}^i)^2, \quad (3.23)$$

где

$$\begin{aligned}\check{G}^0 &= \partial^\mu \check{B}^\mu + ig_1 \check{\xi}_B \frac{1}{2} (\phi^\dagger \tau_0 \check{\phi} - \check{\phi}^\dagger \tau_0 \phi), \\ \check{G}^i &= D_\mu^{ij}(W) \check{W}_\mu^j + ig_2 \check{\xi}_W \frac{1}{2} (\phi^\dagger \tau_i \check{\phi} - \check{\phi}^\dagger \tau_i \phi).\end{aligned}\quad (3.24)$$

Здесь $\check{\xi}_B$, $\check{\xi}_W$ являются параметрами, связанными с фиксацией калибровки квантовых полей, а $D_\mu^{ij}(W)$ — ковариантная по фоновому полю W производная

$$D_\mu^{ij}(W) = \delta_{ij} \partial_\mu - g_2 \varepsilon_{ijk} W_\mu^k. \quad (3.25)$$

Очевидно, что нарушающий калибровочную инвариантность квантовых полей член $\mathcal{L}_{\check{G}}$ тем не менее сохраняет фоновую калибровочную инвариантность.

Фоновое хиггсовское поле ϕ имеет обычное вакуумное среднее $\langle \phi \rangle$, даваемое (3.12), в то время как соответствующее значение для квантового поля $\check{\phi}$ равно нулю:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} iw^+(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H(x) + iz(x)) \end{pmatrix}, \quad \check{\phi}(x) = \begin{pmatrix} i\check{w}^+(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\check{H}(x) + i\check{z}(x)) \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Здесь H и \check{H} обозначают физические фоновое и квантовое хиггсовские поля соответственно, а w^+ , z , \check{w}^+ , \check{z} являются нефизическими голдстоуновскими степенями свободы. Напомним, что в общем случае $v \neq \eta$, где η — положение минимума классического хиггсовского потенциала (3.7). Фиксирующий квантовую калибровку член (3.23)–(3.25) переходит в обычный при замене фонового хиггсовского поля его вакуумным средним v и при отбрасывании фонового $SU(2)_W$ -триплетного поля W_μ^i . Фоновая калибровочная инвариантность ограничивает число квантовых калибровочных параметров максимально двумя: одним $\check{\xi}_B$ для $U(1)_Y$ и одним $\check{\xi}_W$ для $SU(2)_W$.

В духе МФП необходимо также расщепить фермионные поля на фоновые и квантовые. Однако для всех полей, которые не входят в калибровочное условие, квантование в МФП эквивалентно квантованию в обычном формализме. Правила Фейнмана для соответствующих фоновых и квантовых полей совпадают. Поэтому в дальнейшем для фермионных полей используется общий символ, т.е. знак галочки для квантовых фермионных полей опускается.

Выразим член фиксации квантовой калибровки (3.23)–(3.25) в физическом базисе. Во избежание смешивания на древесном уровне между квантовым фотоном \check{A} и квантовым Z -бозоном \check{Z} необходимо дополнительно положить $\check{\xi}_B = \check{\xi}_W = \check{\xi}$.¹² Это дает

$$\mathcal{L}_{\check{G}} = -\frac{1}{2\check{\xi}} \left[(\check{G}^A)^2 + (\check{G}^Z)^2 + 2\check{G}^+ \check{G}^- \right], \quad (3.27)$$

¹²Напомним, что в обычном формализме допускается вплоть до трех калибровочных параметров: ξ_A , ξ_Z и ξ_W .

где

$$\begin{aligned}
\check{G}^A &= \partial^\mu \check{A}_\mu + ie(W_\mu^+ \check{W}_\mu^- - W_\mu^- \check{W}_\mu^+) + ie\check{\xi}(w^- \check{w}^+ - w^+ \check{w}^-), \\
\check{G}^Z &= \partial^\mu \check{Z}_\mu + ie \frac{c_W}{s_W} (W_\mu^+ \check{W}_\mu^- - W_\mu^- \check{W}_\mu^+) + ie\check{\xi} \frac{c_W^2 - s_W^2}{2c_W s_W} (w^- \check{w}^+ - w^+ \check{w}^-) + \\
&\quad + e\check{\xi} \frac{1}{2c_W s_W} [(v + H)\check{z} - z\check{H}], \\
\check{G}^\pm &= \partial^\mu \check{W}_\mu^\pm \pm ie(A_\mu + \frac{c_W}{s_W} Z_\mu) \check{W}_\mu^\pm \mp ieW_\mu^\pm (\check{A}_\mu + \frac{c_W}{s_W} \check{Z}_\mu) - \\
&\quad - e\check{\xi} \frac{1}{2s_W} [(v + H \mp iz)\check{w}^\pm - w^\pm (\check{H} \mp iz)].
\end{aligned} \tag{3.28}$$

(iii) Наконец, добавим духовый лагранжиан Фаддеева–Попова

$$\mathcal{L}_\Theta = \bar{\theta}^a \frac{\delta \check{G}^a}{\delta \check{\vartheta}^b} \theta^b, \tag{3.29}$$

где θ^a — комплексные антикоммутирующие грассмановы поля, а $\delta \check{G}^a / \delta \check{\vartheta}^b$ являются вариационными производными фиксирующих калибровку функций \check{G}^a , $a = 0, i$ по параметрам, соответствующим инфинитезимальным калибровочным преобразованиям квантовых полей

$$\begin{aligned}
\delta \check{B}_\mu &= -\partial_\mu \check{\vartheta}^0, \\
\delta \check{W}_\mu^i &= -D_\mu^{ij} (W + \check{W}) \check{\vartheta}^j, \\
\delta \check{\phi} &= \frac{i}{2} (g_1 \check{\vartheta}^0 \tau^0 + g_2 \check{\vartheta}^i \tau^i) (\phi + \check{\phi})
\end{aligned} \tag{3.30}$$

при нулевых вариациях фоновых полей:

$$\delta B_\mu = \delta W_\mu^i = \delta \phi = 0. \tag{3.31}$$

Поскольку духовые поля бывают только квантовыми, квантовый знак галочки над ними для простоты опускается.

В физическом базисе \mathcal{L}_Θ принимает вид ($\alpha = A, Z, \pm$)

$$\mathcal{L}_\Theta = \bar{\theta}^\alpha \frac{\delta \check{G}^\alpha}{\delta \check{\vartheta}^\beta} \theta^\beta \tag{3.32}$$

при вариациях квантовых полей

$$\begin{aligned}
\delta \check{A}_\mu &= -\partial_\mu \check{\vartheta}^A - ie [(W_\mu^+ + \check{W}_\mu^+) \check{\vartheta}^- - (W_\mu^- + \check{W}_\mu^-) \check{\vartheta}^+], \\
\delta \check{Z}_\mu &= -\partial_\mu \check{\vartheta}^Z - ie \frac{c_W}{s_W} [(W_\mu^+ + \check{W}_\mu^+) \check{\vartheta}^- - (W_\mu^- + \check{W}_\mu^-) \check{\vartheta}^+], \\
\delta \check{W}_\mu^\pm &= -\partial_\mu \check{\vartheta}^\pm \pm ie(W_\mu^\pm + \check{W}_\mu^\pm) (\check{\vartheta}^A + \frac{c_W}{s_W} \check{\vartheta}^Z) \mp ie \left[(A_\mu + \check{A}_\mu) + \frac{c_W}{s_W} (Z_\mu + \check{Z}_\mu) \right] \check{\vartheta}^\pm,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\check{H} &= \frac{e}{2c_W s_W} (z + \check{z}) \check{\vartheta}^Z - \frac{e}{2s_W} \left[(w^+ + \check{w}^+) \check{\vartheta}^- + (w^- + \check{w}^-) \delta\check{\vartheta}^+ \right], \\
\delta\check{z} &= -\frac{e}{2c_W s_W} (v + H + \check{H}) \check{\vartheta}^Z + \frac{ie}{2s_W} \left[(w^+ + \check{w}^+) \check{\vartheta}^- - (w^- + \check{w}^-) \check{\vartheta}^+ \right], \\
\delta\check{w}^\pm &= \pm ie (w^\pm + \check{w}^\pm) (\check{\vartheta}^A + \frac{c_W^2 - s_W^2}{2c_W s_W} \check{\vartheta}^Z) + \frac{e}{2s_W} \left[v + H + \check{H} \pm i(z + \check{z}) \right] \delta\check{\vartheta}^\pm. \quad (3.33)
\end{aligned}$$

(iv) Используя приведенный выше лагранжиан, можно, следуя [7], построить эффективное действие $\Gamma[V, S, F, \bar{F}]$, которое инвариантно относительно калибровочных преобразований фоновых полей

$$\begin{aligned}
\delta B_\mu &= -\partial_\mu \vartheta^0, \\
\delta W_\mu^i &= -D_\mu^{ij}(W) \vartheta^j, \\
\delta\phi &= \frac{i}{2} (g_1 \vartheta^0 \tau^0 + g_2 \vartheta^i \tau^i) \phi, \quad (3.34)
\end{aligned}$$

равных в физическом базисе

$$\begin{aligned}
\delta A_\mu &= -\partial_\mu \vartheta^A - ie(W_\mu^+ \vartheta^- - W_\mu^- \vartheta^+), \\
\delta Z_\mu &= -\partial_\mu \vartheta^Z - ie \frac{c_W}{s_W} (W_\mu^+ \vartheta^- - W_\mu^- \vartheta^+), \\
\delta W_\mu^\pm &= -\partial_\mu \vartheta^\pm \mp ie W_\mu^\pm (\vartheta^A + \frac{c_W}{s_W} \vartheta^Z) \mp ie (A_\mu + \frac{c_W}{s_W} Z_\mu) \vartheta^\pm, \\
\delta H &= \frac{e}{2c_W s_W} z \vartheta^Z - \frac{e}{2s_W} (w^+ \vartheta^- + w^- \vartheta^+), \\
\delta z &= -\frac{e}{2c_W s_W} (v + H) \vartheta^Z + \frac{ie}{2s_W} (w^+ \vartheta^- - w^- \vartheta^+), \\
\delta w^\pm &= \pm i e w^\pm (\vartheta^A + \frac{c_W^2 - s_W^2}{2c_W s_W} \vartheta^Z) + \frac{e}{2s_W} (v + H \pm iz) \vartheta^\pm, \quad (3.35)
\end{aligned}$$

а также соответствующих преобразований фермионных полей

$$\begin{aligned}
\delta f_L^u &= ie \left[Q_{f^u} \vartheta^A + \left(\frac{1}{2c_W s_W} - Q_{f^u} \frac{s_W}{c_W} \right) \vartheta^Z \right] f_L^u + \frac{ie}{\sqrt{2}s_W} f_L^d \vartheta^+, \\
\delta f_L^d &= ie \left[Q_{f^d} \vartheta^A - \left(\frac{1}{2c_W s_W} + Q_{f^d} \frac{s_W}{c_W} \right) \vartheta^Z \right] f_L^d + \frac{ie}{\sqrt{2}s_W} f_L^u \vartheta^-, \\
\delta f_R &= ie Q_f (\vartheta^A - \frac{s_W}{c_W} \vartheta^Z) f_R, \quad (3.36)
\end{aligned}$$

где f_L^u обозначают левые верхние кварки и нейтрино набора (3.10), f_L^d — их нижние изоспиновые партнеры, а f_R представляют правые синглеты набора (3.11).

Эффективное действие $\Gamma[V, S, F, \bar{F}]$ является производящим функционалом вершинных функций, т.е. одночастично-неприводимых (ОЧН) функций Грина, которые получаются при дифференцировании $\Gamma[V, S, F, \bar{F}]$ по своим аргументам при нулевых значениях последних. На практике вершинные функции могут быть вычислены с

помощью правил Фейнмана, которые различают фоновые и квантовые поля. В то время как квантовые поля появляются только внутри петель, фоновые поля соответствуют лишь внешним линиям. Однако помимо удвоения калибровочных и хиггсовских полей, фейнмановские правила МФП отличаются от обычных только из-за различий в фиксирующих калибровку и духовых членах. Последние, в свою очередь, влияют лишь на смешанные вершины, содержащие как фоновые, так и квантовые поля. Поскольку фиксирующий калибровку член нелинеен по полям, в вершины с калибровочными и, возможно, хиггсовскими бозонами, входит квантовый калибровочный параметр. Но, как упоминалось ранее, фейнмановские правила для фермионных полей остаются теми же, что и в обычном формализме.

В приложении II приведен полный набор правил Фейнмана в МФП для электро-слабых взаимодействий СМ при произвольном значении квантового калибровочного параметра ξ . Несмотря на различие между фоновыми и квантовыми полями, вычисления в МФП в общем случае проще, чем в обычном формализме. Это справедливо в особенности в калибровке Тофта–Фейнмана ($\xi = 1$) для квантовых полей, где многие вершины существенно упрощаются (см. приложение). Более того, фиксация калибровки фоновых полей полностью независима от фиксации калибровки квантовых полей. Эта свобода может быть использована для выбора наиболее подходящей в конкретной задаче фоновой калибровки, например унитарной или нелинейной калибровки [19]. Тем самым число фейнмановских диаграмм может быть существенно сокращено. Фиксация фоновой калибровки не влияет на $\Gamma[V, S, F, \bar{F}]$ и, следовательно, на ОЧН функции Грина. Она важна лишь для построения связанных функций Грина и S-матричных элементов. В частности, в линейной фоновой калибровке от фонового калибровочного параметра ξ зависят только (древесные) пропагаторы фоновых калибровочных бозонов.

▽ Упражнение 8

(v) И, наконец, S-матрица получается, как обычно путем построения древесных диаграмм из вершинных функций, следующих из $\Gamma[V, S, F, \bar{F}]$, при связывании этих вершин фоновыми пропагаторами низшего (древесного) порядка [7]. С учетом суммирования вкладов собственно энергетических функций это эквивалентно связыванию n -точечных ($n \geq 3$) вершин полными пропагаторами фоновых полей.

▽ Упражнения 9, 10

Поскольку фоновый калибровочный параметр входит только в древесные величины, его сокращение в S-матричных элементах является непосредственным следствием МФП-тождеств Уорда (см. далее). В качестве примера это можно проверить для фоновой R_ξ калибровки в четырехфермионных процессах. В этом случае МФП приводит к сокращению фонового калибровочного параметра независимо как для собственно энергетических, так и для вершинных вкладов в эти процессы (помимо боксовых вкладов). В обычном формализме от калибровочного параметра ξ не зависит только совокупность обоих вкладов, и для калибровочной независимости каждого из них в отдельности необходима их модификация путем перераспределения между ними части вкладов (см. обсуждение так называемой пинчевой техники в разделе 3.6).

▽ Упражнение 11

3.3. Тожества Уорда СМ электрослабых взаимодействий

Инвариантность эффективного действия относительно фоновых калибровочных преобразований, т.е. условие

$$\delta\Gamma = \sum_a \frac{\delta\Gamma[V, S, F, \bar{F}]}{\delta\vartheta_a} \vartheta_a = 0, \quad (3.37)$$

приводит к простым тождествам Уорда. Более подробно, с учетом (3.35) и (3.36), условие инвариантности эквивалентно

$$\begin{aligned} \delta\Gamma = & \sum_a \frac{\delta\Gamma[V, S, F, \bar{F}]}{\delta V_\mu^a} \delta V_\mu^a + \sum_b \frac{\delta\Gamma[V, S, F, \bar{F}]}{\delta S_b} \delta S_b + \\ & + \sum_c \left(\delta\bar{F}_c \frac{\delta\Gamma[V, S, F, \bar{F}]}{\delta\bar{F}_c} - \frac{\delta\Gamma[V, S, F, \bar{F}]}{\delta F_c} \delta F_c \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.38)$$

где a, b, c пробегают по всем фоновым калибровочным, фоновым хиггсовским и фермионным индексам соответственно. Ввиду независимости параметров ϑ_a , коэффициенты при них в тождестве (3.38) должны равняться нулю. МФП-тождества Уорда для вершинных функций получаются путем функционального дифференцирования по полям (при нулевых значениях последних) возникающих отсюда равенств.

Получаемые тождества справедливы во всех порядках теории возмущений. Следует подчеркнуть, что хотя эффективное действие, а, следовательно, в общем случае и сами вершинные функции зависят от квантового калибровочного параметра ξ , МФП-тождества Уорда справедливы при всех значениях этого параметра. Поскольку в МФП-формализме сохранена явная калибровочная инвариантность, эти тождества в точности те же, к которым приводит классический лагранжиан (классическое действие), и в этом смысле они являются “наивно ожидаемыми”. Это находится в контрасте с обычным формализмом, где вследствие процедуры фиксации калибровки при квантовании теряется явная калибровочная инвариантность и соответствующие тождества Уорда, именуемые в данном контексте тождествами Славнова-Тейлора, возникают благодаря некоторой остаточной глобальной симметрии (так называемой БРСТ-симметрии). Тожества Славнова-Тейлора имеют более сложную структуру и в общем случае включают также вклады духовых полей (см., например, [20]).

(i) Начнем с тождеств Уорда для собственно энергетических функций Σ .¹³ По-

¹³При рассмотрении тождеств Уорда следует помнить, что в единицах массы размерность эффективного действия Γ равна 4 и, следовательно, размерность n -точечной вершинной функции $\Gamma_n \sim \delta^n \Gamma / \prod_i \delta\varphi_i$ есть $\dim \Gamma_n = 4 - \sum_i \dim \varphi_i$, где φ_i , $i = 1, \dots, n$ коллективно обозначают все поля, входящие в вершину. Определения собственных энергий Σ таковы, что их размерности не всегда совпадают с размерностями соответствующих им Γ_2 .

следние по определению связаны с двухточечными вершинными функциями следующим образом: вектор–векторные вершинные функции

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{VV'}(k, -k) &= i(-g_{\mu\nu}k^2 + k_\mu k_\nu + g_{\mu\nu}M_V^2)\delta_{VV'} \\ &+ i\left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\Sigma_T^{VV'}(k^2) - i\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\Sigma_S^{VV'}(k^2),\end{aligned}\quad (3.39)$$

где V, V' обозначают векторные поля, а $\Sigma_T^{VV'}(k^2)$ и $\Sigma_S^{VV'}$ — поперечная и скалярная (продольная) части соответственно; вектор–скалярные вершинные функции

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu^{W^\pm w^\mp}(k, -k) &= ik_\mu \left[-iM_W + \Sigma^{W^\pm w^\mp}(k^2)\right], \\ \Gamma_\mu^{Zz}(k, -k) &= ik_\mu \left[-iM_Z + \Sigma^{Zz}(k^2)\right], \\ \Gamma_\mu^{Az}(k, -k) &= ik_\mu \Sigma^{Az}(k^2), \\ \Gamma_\mu^{ZH}(k, -k) &= ik_\mu \Sigma^{ZH}(k^2), \\ \Gamma_\mu^{AH}(k, -k) &= ik_\mu \Sigma^{AH}(k^2),\end{aligned}\quad (3.40)$$

скаляр–скалярные вершинные функции

$$\begin{aligned}\Gamma^{HH}(k, -k) &= i(k^2 - M_H^2) + i\Sigma^{HH}(k^2), \\ \Gamma^{zz}(k, -k) &= ik^2 + i\Sigma^{zz}(k^2), \\ \Gamma^{w^+ w^-}(k, -k) &= ik^2 + i\Sigma^{w^+ w^-}(k^2), \\ \Gamma^{Hz}(k, -k) &= i\Sigma^{Hz}(k^2)\end{aligned}\quad (3.41)$$

и, наконец, фермион–фермионные вершинные функции

$$\Gamma^{\bar{f}f}(p, -p) = -i(\not{p} + M_f) - i\not{p}P_L\Sigma_L^{\bar{f}f}(p^2) - i\not{p}P_R\Sigma_R^{\bar{f}f}(p^2) + iM_f\Sigma_M^{\bar{f}f}(p^2). \quad (3.42)$$

Здесь и далее все поля и импульсы считаются входящими. В дальнейшем второй аргумент двухточечных функций опускается, поскольку он фиксируется законом сохранения энергии-импульса. Отметим, что в вершинных функциях отсутствует вклад члена фиксации калибровки для фоновых полей, поэтому вклады низшего порядка в вершинные функции получаются непосредственно из классического \mathcal{L} .

Собственные энергии не содержат вкладов одноточечных вершинных функций, так называемых (ОЧН) головастика, которые входят в тождества Уорда явно как

$$\Gamma^H = i(t_H + T^H). \quad (3.43)$$

Здесь t_H — борновский головастик (3.17), а T^H — одноточечная вершинная функция поля H с произвольным количеством петель, или квантовый головастик (рис. 7). Последний определяет сдвиг в положении минимума хиггсовского потенциала, вызываемый радиационными поправками.

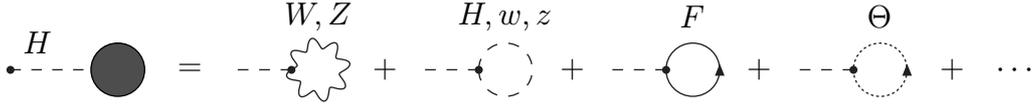


Рис. 7. Квантовый (ОЧН) головастик.

Имеем следующие тождества Уорда для собственных энергий:

$$\Sigma_S^{AA}(k^2) = 0, \quad (3.44)$$

$$\Sigma_S^{AZ}(k^2) = 0, \quad (3.45)$$

$$\Sigma^{Az}(k^2) = 0, \quad (3.46)$$

$$\Sigma^{AH}(k^2) = 0, \quad (3.47)$$

$$\Sigma_S^{ZZ}(k^2) + iM_Z \Sigma^{Zz}(k^2) = 0, \quad (3.48)$$

$$k^2 \Sigma^{Zz}(k^2) + iM_Z \Sigma^{zz}(k^2) = \frac{e}{2c_W s_W} \Gamma^H, \quad (3.49)$$

$$\Sigma_S^{W^\pm W^\mp}(k^2) + iM_W \Sigma^{W^\pm w^\mp}(k^2) = 0, \quad (3.50)$$

$$k^2 \Sigma^{W^\pm w^\mp}(k^2) + iM_W \Sigma^{w^\pm w^\mp}(k^2) = \frac{e}{2s_W} \Gamma^H. \quad (3.51)$$

В унитарной по фоновому полю калибровке нефизические фоновые голдстоуновские поля, а следовательно, и содержащие их вершины отсутствуют.

Как прямое следствие тождеств Уорда (3.44) и (3.45), а также аналитичности $\Gamma_{\mu\nu}^{AA}(k)$ и $\Gamma_{\mu\nu}^{AZ}(k)$ при $k^2 = 0$ их поперечные части обращаются в нуль при нулевом импульсе, т.е.

$$\Sigma_T^{AA}(0) = 0, \quad (3.52)$$

и

$$\Sigma_T^{AZ}(0) = 0. \quad (3.53)$$

В то время как КЭД-подобные соотношения (3.44) и (3.52) в СМ выполняются в МФП во всех порядках, в обычном формализме, в отличие от КЭД, они справедливы только до однопетлевого уровня. Тождества (3.45), (3.46) и (3.53) не имеют аналога в обычном формализме. Отметим, что обращение в ноль фотон- Z -бозонного смешивания при нулевом импульсе выполняется в МФП автоматически как следствие калибровочной инвариантности, тогда как в обычном формализме в схеме перенормировок на массовой поверхности оно налагается дополнительно (см., например, [21]). Уравнение (3.46) показывает, что в отличие от R_ξ -калибровки обычного формализма в МФП фотон не смешивается с нефизическим скаляром z . Для собственной энергии Z -бозона на однопетлевом уровне в обычном формализме имеет место тождество Славнова–Тейлора

$$k^2 \left[\Sigma_S^{ZZ}(k^2) + 2iM_Z \Sigma^{Zz}(k^2) \right] - M_Z^2 \Sigma^{zz}(k^2) = i \frac{eM_Z}{2c_W s_W} \Gamma^H. \quad (3.54)$$

В МФП это соотношение расщепляется на два более простых тождества Уорда (3.48) и (3.49), справедливых к тому же во всех порядках теории возмущений.

Влияние МФП на программу перенормировок более подробно обсуждается в следующем разделе.

(ii) Трехточечные функции $\Gamma_\mu^{A\bar{f}f}$ удовлетворяют соотношению

$$k^\mu \Gamma_\mu^{A\bar{f}f}(k, \bar{p}, p) = -e Q_f [\Gamma^{\bar{f}f}(\bar{p}) - \Gamma^{\bar{f}f}(-p)], \quad (3.55)$$

т.е. в точности тождеству Уорда КЭД. Следует отметить, что несмотря на $U(1)_{\text{em}}$ калибровочную инвариантность классического лагранжиана, обычный формализм не приводит в СМ к тождествам КЭД. Аналогичные тождества Уорда для вершин $Z\bar{f}f$ и $W\bar{f}f$ в МФП имеют вид

$$k^\mu \Gamma_\mu^{Z\bar{f}f}(k, \bar{p}, p) + i M_Z \Gamma^{z\bar{f}f}(k, \bar{p}, p) = -\frac{e}{s_W c_W} [\Gamma^{\bar{f}f}(\bar{p})(T_{3f} P_L - s_W^2 Q_f) - (T_{3f} P_R - s_W^2 Q_f) \Gamma^{\bar{f}f}(-p)], \quad (3.56)$$

$$k^\mu \Gamma_\mu^{W^+ \bar{f}^u f^d}(k, \bar{p}, p) + i M_W \Gamma^{w^+ \bar{f}^u f^d}(k, \bar{p}, p) = -\frac{e}{\sqrt{2} s_W} [\Gamma^{\bar{f}^u f^u}(\bar{p}) P_L - P_R \Gamma^{\bar{f}^d f^d}(-p)],$$

$$k^\mu \Gamma_\mu^{W^- \bar{f}^d f^u}(k, \bar{p}, p) + i M_W \Gamma^{w^- \bar{f}^d f^u}(k, \bar{p}, p) = -\frac{e}{\sqrt{2} s_W} [\Gamma^{\bar{f}^d f^d}(\bar{p}) P_L - P_R \Gamma^{\bar{f}^u f^u}(-p)]. \quad (3.57)$$

Аналогично тройные калибровочные вершины $\Gamma_{\mu\rho\sigma}^{AW^+W^-}$ в МФП удовлетворяют КЭД-подобным тождествам Уорда:

$$k^\mu \Gamma_{\mu\rho\sigma}^{AW^+W^-}(k, k_+, k_-) = e [\Gamma_{\rho\sigma}^{W^+W^-}(k_+) - \Gamma_{\rho\sigma}^{W^+W^-}(-k_-)], \quad (3.58)$$

$$k_+^\rho \Gamma_{\mu\rho\sigma}^{AW^+W^-}(k, k_+, k_-) + i M_W \Gamma_{\mu\sigma}^{Aw^+W^-}(k, k_+, k_-) = e [\Gamma_{\mu\sigma}^{W^+W^-}(-k_-) - \Gamma_{\mu\sigma}^{AA}(k) - \frac{c_W}{s_W} \Gamma_{\mu\sigma}^{AZ}(k)],$$

$$k_-^\sigma \Gamma_{\mu\rho\sigma}^{AW^+W^-}(k, k_+, k_-) + i M_W \Gamma_{\mu\rho}^{Aw^+W^-}(k, k_+, k_-) = -e [\Gamma_{\mu\rho}^{W^+W^-}(-k_+) - \Gamma_{\mu\rho}^{AA}(k) - \frac{c_W}{s_W} \Gamma_{\mu\rho}^{AZ}(k)]. \quad (3.59)$$

Примером тождества Уорда с трехточечной вершинной функцией, содержащей хиггсовский бозон, является

$$k_Z^\mu \Gamma_\mu^{ZzH}(k_Z, k_z, k_H) + i M_Z \Gamma^{zzH}(k_Z, k_z, k_H) = i \frac{e}{2 s_W c_W} [\Gamma^{HH}(k_H) - \Gamma^{zz}(k_z)]. \quad (3.60)$$

▽ Упражнение 12

Тождества Уорда налагают ограничения на возможные модификации вершинных функций СМ, которые могут вызываться так называемой “новой физикой”, при условии сохранения ею калибровочной инвариантности СМ. В частности, это касается поправок $\Delta \Gamma_{\mu\nu\rho}^{AW^+W^-}$ и $\Delta \Gamma_{\mu\nu\rho}^{ZW^+W^-}$ к трехбозонным вершинам, часто рассматриваемым в литературе. Существенно, что модификация тройных калибровочных вершин должна с неизбежностью сопровождаться надлежащей модификацией пропагаторов калибровочных и голдстоуновских полей.

3.4. Перенормировка СМ в схеме на массовой поверхности

Процедура перенормировок в квантовой теории поля учитывает (бесконечное) влияние радиационных поправок на классические (древесные) величины. Все предшествующее рассмотрение относилось, строго говоря, к перенормированным (голым) величинам, которые формально являются бесконечными. Будем теперь предполагать, что все они маркированы индексом нуль, а соответствующие им перенормированные (физические) величины будем по-прежнему обозначать теми же символами без этого индекса. Как показывается в этом разделе, калибровочная инвариантность МФП имеет важные следствия для структуры констант перенормировок, которые необходимо ввести, чтобы сделать функции Грина и S-матричные элементы конечными. Рассмотрение проводится явно в однопетлевом приближении, но может быть непосредственно обобщено по индукции для произвольного порядка теории возмущений.

(i) **Перенормировка в терминах физических полей.** Определим следующий набор констант перенормировок параметров:

$$\begin{aligned}
e_0 &= Z_e e = (1 + \delta Z_e) e, \\
M_{Z,0}^2 &= M_Z^2 + \delta M_Z^2, \\
M_{W,0}^2 &= M_W^2 + \delta M_W^2, \\
M_{H,0}^2 &= M_H^2 + \delta M_H^2, \\
M_{f,0} &= M_f + \delta M_f, \\
t_{H,0} &= t_H + \delta t_H
\end{aligned} \tag{3.61}$$

и полей

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Z_{AA}^{1/2} & Z_{AZ}^{1/2} \\ Z_{ZA}^{1/2} & Z_{ZZ}^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\delta Z_{AA} & \frac{1}{2}\delta Z_{AZ} \\ \frac{1}{2}\delta Z_{ZA} & 1 + \frac{1}{2}\delta Z_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix}, \\
W_0^\pm &= Z_W^{1/2} W^\pm = (1 + \frac{1}{2}\delta Z_W) W^\pm, \\
H_0 &= Z_H^{1/2} H = (1 + \frac{1}{2}\delta Z_H) H, \\
z_0 &= Z_z^{1/2} z = (1 + \frac{1}{2}\delta Z_z) z, \\
w_0^\pm &= Z_w^{1/2} w^\pm = (1 + \frac{1}{2}\delta Z_w) w^\pm, \\
f_{L,0} &= (Z_L^f)^{1/2} f_L = (1 + \frac{1}{2}\delta Z_L^f) f_L, \\
f_{R,0} &= (Z_R^f)^{1/2} f_R = (1 + \frac{1}{2}\delta Z_R^f) f_R.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Аналогично процедуре для точных калибровочных симметрий, в случае нарушенных симметрий можно ограничиться перенормировками только фоновых полей.

Перенормировки квантовых полей компенсируются заменой переменных в функциональном интеграле, и потому могут не рассматриваться. Контрчлен головастика δt_H перенормирует линейный но хиггсовскому полю H член в лагранжиане. Он корректирует сдвиг в положении минимума хиггсовского потенциала, вызываемый радиационными поправками.

Для сохранения в процессе перенормировок фоновой калибровочной инвариантности необходимо потребовать, чтобы перенормированные вершинные функции удовлетворяли тем же тождествам Уорда, что и перенормированные. Как следствие, и контрчлены должны удовлетворять тем же тождествам. Это приводит к определенным соотношениям между контрчленами. Например из (3.45) непосредственно получаем

$$0 = \Sigma_S^{AZ}(k^2) = \Sigma_{S,0}^{AZ}(k^2) - M_Z^2 \frac{1}{2} \delta Z_{ZA} = -M_Z^2 \frac{1}{2} \delta Z_{ZA}, \quad (3.63)$$

т.е.

$$\delta Z_{ZA} = 0. \quad (3.64)$$

Далее, выражая голую вершину, входящую в тождество Уорда (3.55), через перенормированную и контрчлены, имеем

$$k^\mu \Gamma_{\mu,0}^{A\bar{f}f}(k, \bar{p}, p) = k^\mu \Gamma_\mu^{A\bar{f}f}(k, \bar{p}, p) + ieQ_f \not{k} \left(\delta Z_e + \frac{1}{2} \delta Z_{AA} + \delta Z_R^f P_R + \delta Z_L^f P_L \right), \quad (3.65)$$

где использовано (3.64), а также равенство

$$\Gamma_0^{\bar{f}f}(\bar{p}) - \Gamma_0^{\bar{f}f}(-p) = \Gamma^{\bar{f}f}(\bar{p}) - \Gamma^{\bar{f}f}(-p) - i\not{k} \left(\delta Z_R^f P_R + \delta Z_L^f P_L \right) \quad (3.66)$$

и $k = -(\bar{p} + p)$. Применение тождества Уорда (3.55) как для голых, так и для перенормированных величин дает

$$\frac{1}{2} \delta Z_{AA} = -\delta Z_e. \quad (3.67)$$

Это не что иное, как хорошо известное из КЭД соотношение между перенормировкой фотонного поля A и электрического заряда e . Иными словами, МФП дает этот результат также и в рамках СМ в отличие от обычного формализма. Согласно данному тождеству, после перенормировки заряда в МФП не остается больше свободы для наложения дополнительного условия перенормировки фотонного поля. Как и в КЭД, задание перенормированного электрического заряда посредством фотонной вершины при нулевом переданном импульсе вместе с требованием калибровочной инвариантности автоматически фиксируют значение вычета фотонного пропагатора равным единице. Это можно получить из тождеств Уорда (3.53) и (3.55). В КЭД соотношение (3.67) означает простое равенство $e_0 A_0 = eA$ между голыми и перенормированными величинами. Однако в СМ вследствие смешивания (3.62) оно влечет более сложную связь.

▽ Упражнение 13

Из тождеств Уорда (3.56), (3.57) и (3.60) аналогичным образом выводятся следующие КЭД-подобные соотношения между константами перенормировок полей и зарядов:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\delta Z_{ZZ} &= -\delta Z_{gz} = -\delta Z_e - \frac{1}{2} \frac{c_W^2 - s_W^2}{s_W^2} \frac{\delta c_W^2}{c_W^2}, \\
\frac{1}{2}\delta Z_{AZ} &= -\delta Z_{gAZ} = -\frac{c_W}{s_W} \frac{\delta c_W^2}{c_W^2}, \\
\frac{1}{2}\delta Z_W &= -\delta Z_g = -\delta Z_e - \frac{1}{2} \frac{c_W^2}{s_W^2} \frac{\delta c_W^2}{c_W^2}, \\
\frac{1}{2}\delta Z_H &= \frac{1}{2}\delta Z_z = \frac{1}{2}\delta Z_w = \frac{\delta v}{v} = -\delta Z_e - \frac{1}{2} \frac{c_W^2}{s_W^2} \frac{\delta c_W^2}{c_W^2} + \frac{1}{2} \frac{\delta M_W^2}{M_W^2},
\end{aligned} \tag{3.68}$$

где

$$\frac{\delta c_W^2}{c_W^2} = \frac{\delta M_W^2}{M_W^2} - \frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} \tag{3.69}$$

и

$$\begin{aligned}
gz &= \frac{e}{s_W c_W}, \\
g_{AZ} &= \sqrt{egz}, \\
g &= \frac{e}{s_W}.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Наконец, для констант перенормировок фермионных полей имеем

$$\delta Z_L^f = \delta Z_L^{f^u} = \delta Z_L^{f^d}, \tag{3.71}$$

т.е. константы перенормировок полей обоих левых фермионов из одного дублета должны совпадать.

Соотношения (3.64)–(3.68) выражают константы перенормировок калибровочных бозонов и скаляров полностью в терминах констант перенормировок электрического заряда и масс частиц. Если перенормированные параметры идентифицируются с физическим зарядом электрона и с физическими массами частиц, они явно калибровочно независимы (иными словами, не зависят от квантового калибровочного параметра ξ). Более того, голые величины $g_{1,0}$, $g_{2,0}$, λ_0 , η_0 и $h_{f,0}^g$ в классическом лагранжиане, очевидно, также калибровочно независимы, поскольку они представляют свободные параметры теории. Согласно (3.19) и (3.20) то же самое справедливо для голого заряда и угла смешивания. Следовательно, контрчлены δZ_e и δc_W для калибровочных констант калибровочно независимы. Поэтому соотношения (3.67) и (3.68) означают, что константы перенормировок всех калибровочных полей являются калибровочно независимыми. Это следует сравнить с обычным формализмом для СМ, где аналогичные константы в схеме перенормировок на массовой поверхности калибровочно зависимы.

Здесь следует упомянуть, что в отличие от δZ_e и δc_W^2 контрчлены для масс и головастика не являются калибровочно независимыми. Это можно проследить, исходя из механизма спонтанного нарушения симметрии. Выбор ненулевого вакуумного среднего хиггсовского поля $\langle \phi \rangle$, генерирующего массовые члены, в виде (3.12) заведомо неинвариантен относительно калибровочных преобразований. Как следствие, хотя перенормированное значение v , выражаемое в схеме на массовой поверхности через наблюдаемые в виде $v = 2s_W M_W/e$, и не зависит от калибровки, голая величина v_0 и, следовательно, соответствующий контрчлен δv оказываются калибровочно зависящими [22]. В результате голые массы, которые определяются v_0 , являются калибровочно зависимыми. Тем самым и контрчлены δM_Z^2 , δM_W^2 , δM_H^2 , δM_f и δt_H также калибровочно зависимы. Однако физические массы определяются положением полюсов полных пропагаторов, т.е. нулями выражений $k^2 - M^2 - \delta M^2 + \Sigma_0(k^2) + C(t_H + T_0^H)/M_H^2 + C\delta t_H/M_H^2$, где коэффициенты C обозначают в обобщенном виде связь рассматриваемых полей с хиггсовским полем. Как следует из дальнейшего, линейная комбинация расходящихся частей $[\Sigma_0(M^2) + CT_0^H/M_H^2]^{\text{div}}$, а, значит, и контрчленов массы и головастика $\delta M^2 - C\delta t_H/M_H^2$ оказывается калибровочно независимой.

Соотношения (3.64)–(3.68) существенно сокращают число независимых констант перенормировок. Остаются константы перенормировок параметров, приводимые в (3.61), а также константы перенормировок фермионных полей δZ_L^f , δZ_R^{fu} и δZ_R^{fd} . Выберем условия перенормировок параметров на массовой поверхности как в работе [21]¹⁴ и выразим перенормированные константы через перенормированные и головастик, беря контрчлены в виде

$$\begin{aligned}
\delta Z_e &= \frac{1}{2} \left. \frac{\partial \Sigma_{T,0}^{AA}(k^2)}{\partial k^2} \right|_{k^2=0}, \\
\delta M_Z^2 &= \text{Re} \left(\Sigma_{T,0}^{ZZ}(M_Z^2) \right), \\
\delta M_W^2 &= \text{Re} \left(\Sigma_{T,0}^{WW}(M_W^2) \right), \\
\delta M_H^2 &= \text{Re} \left(\Sigma_0^{HH}(M_H^2) \right), \\
\delta M_f &= M_f \text{Re} \left[\frac{1}{2} \Sigma_{L,0}^{\bar{f}f}(M_f^2) + \frac{1}{2} \Sigma_{R,0}^{\bar{f}f}(M_f^2) + \Sigma_{M,0}^{\bar{f}f}(M_f^2) \right], \\
\delta t_H &= -(t_H + T_0^H).
\end{aligned} \tag{3.72}$$

В соответствии с (3.61) последнее условие означает, что голый головастик выбран в виде $t_{H,0} = -T_0^H$, где T_0^H — перенормированный квантовый головастик. При таком условии нормировки полный перенормированный вклад головастиков сокращается: $t_H + T^H = 0$. Физически это условие означает, что выбранный вакуум является

¹⁴Условие перенормировки заряда, принятое в [21], предполагает, что вычет перенормированного фотонного пропагатора равен единице и что фотон–Z-бозонное смешивание отсутствует для фотонов на массовой поверхности. В МФП вследствие тождеств Уорда последнее свойство выполняется автоматически и, следовательно, можно использовать то же условие перенормировок.

истинным, т.е. соответствует минимуму эффективного потенциала. В дальнейшем в конкретных формулах для простоты полагается $t_H = 0$ (и, как следствие, $T^H = 0$).¹⁵

Далее константы перенормировок фермионных полей могут быть зафиксированы, например, следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta Z_L^f &= -\operatorname{Re} \Sigma_{L,0}^{\bar{f}^d f^d}(M_{f^d}^2) - M_{f^d}^2 \frac{\partial}{\partial k^2} \operatorname{Re} \left(\Sigma_{L,0}^{\bar{f}^d f^d}(k^2) + \Sigma_{R,0}^{\bar{f}^d f^d}(k^2) + 2\Sigma_{M,0}^{\bar{f}^d f^d}(k^2) \right) \Big|_{k^2=M_{f^d}^2}, \\ \delta Z_R^{f^u} &= -\operatorname{Re} \Sigma_{R,0}^{\bar{f}^u f^u}(M_{f^u}^2) - M_{f^u}^2 \frac{\partial}{\partial k^2} \operatorname{Re} \left(\Sigma_{L,0}^{\bar{f}^u f^u}(k^2) + \Sigma_{R,0}^{\bar{f}^u f^u}(k^2) + 2\Sigma_{M,0}^{\bar{f}^u f^u}(k^2) \right) \Big|_{k^2=M_{f^u}^2}, \\ \delta Z_R^{f^d} &= -\operatorname{Re} \Sigma_{R,0}^{\bar{f}^d f^d}(M_{f^d}^2) - M_{f^d}^2 \frac{\partial}{\partial k^2} \operatorname{Re} \left(\Sigma_{L,0}^{\bar{f}^d f^d}(k^2) + \Sigma_{R,0}^{\bar{f}^d f^d}(k^2) + 2\Sigma_{M,0}^{\bar{f}^d f^d}(k^2) \right) \Big|_{k^2=M_{f^d}^2}.\end{aligned}\tag{3.73}$$

Хотя в МФП свобода выбора перенормировок калибровочных полей, скаляров и левых фермионов внутри дублета отсутствует, выбранного набора перенормировочных констант все же достаточно, чтобы сделать все вершинные функции фоновых полей конечными.¹⁶ Это следует из того, что на расходимости вершинных функций налагаются те же ограничения, что и на контрчлены. Для иллюстрации этого факта приведем расходящиеся части собственных энергий в МФП для размерной регуляризации, определяя размерность в виде $d = 4 - 2\epsilon$, $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned}\left(\Sigma_{T,0}^{AA}(k^2)\right)^{\operatorname{div}} &= \frac{e^2}{(4\pi)^2} k^2 \left(\frac{32}{9} n_g - 7 \right) \frac{1}{\epsilon}, \\ \left(\Sigma_{T,0}^{AZ}(k^2)\right)^{\operatorname{div}} &= \frac{e^2}{(4\pi)^2} k^2 \left(\frac{-32s_W^2 + 12}{9c_W s_W} n_g - \frac{42c_W^2 + 1}{6c_W s_W} \right) \frac{1}{\epsilon}, \\ \left(\Sigma_{T,0}^{ZZ}(k^2)\right)^{\operatorname{div}} &= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left[k^2 \left(\frac{32s_W^4 - 12(2s_W^2 - 1)}{9c_W^2 s_W^2} n_g - \frac{42c_W^4 + 2c_W^2 - 1}{6c_W^2 s_W^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_f \frac{M_f^2}{2c_W^2 s_W^2} + \frac{2M_W^2 + M_Z^2}{4c_W^2 s_W^2} (\check{\xi} + 3) \right] \frac{1}{\epsilon}, \\ \left(\Sigma_{T,0}^{W^+W^-}(k^2)\right)^{\operatorname{div}} &= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left[k^2 \left(\frac{4}{3s_W^2} n_g - \frac{43}{6s_W^2} \right) - \sum_f \frac{M_f^2}{2s_W^2} + \frac{2M_W^2 + M_Z^2}{4s_W^2} (\check{\xi} + 3) \right] \frac{1}{\epsilon},\end{aligned}$$

¹⁵Общий случай $t_H \neq 0$ технически сложнее, однако с учетом перенормировок головастика он результативно эквивалентен случаю $t_H = 0$. В последнем случае положения минимумов борновского и эффективного потенциалов совпадают, и линейные по полю H члены отсутствуют. Поэтому борновский лагранжиан имеет физический смысл, и его параметры могут быть непосредственно ассоциированы с наблюдаемыми. В отличие от этого, при $t_H \neq 0$ такое сравнение можно производить только после модификации борновского потенциала квантовыми поправками, что результативно устраняет артефактную зависимость от t_H .

¹⁶На однопетлевом уровне контрчлен квантового калибровочного параметра не входит в вершинные функции фоновых полей, поскольку $\check{\xi}$ не появляется в чисто фоновых вершинах. За пределами однопетлевого приближения необходимо дополнительно учесть такую перенормировку [7]. Ясно, что перенормировка $\check{\xi}$ не существенна для S-матричных элементов в любом петлевом порядке, так как S-матрица калибровочно независима.

$$\begin{aligned}
(\Sigma_0^{HH}(k^2))^{\text{div}} &= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left[k^2 \left(\sum_f \frac{M_f^2}{2M_W^2 s_W^2} - \frac{2c_W^2 + 1}{4c_W^2 s_W^2} (\check{\xi} + 3) \right) - \sum_f \frac{3M_f^4}{M_W^2 s_W^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3(5M_H^4 + 12M_W^4 + 6M_Z^4) + 5M_H^2(2M_W^2 + M_Z^2)\check{\xi}}{8M_W^2 s_W^2} \right] \frac{1}{\epsilon}, \\
(\Sigma_0^{zz}(k^2))^{\text{div}} &= (\Sigma_0^{w^+w^-}(k^2))^{\text{div}} \\
&= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left[k^2 \left(\sum_f \frac{M_f^2}{2M_W^2 s_W^2} - \frac{2c_W^2 + 1}{4c_W^2 s_W^2} (\check{\xi} + 3) \right) \right] \frac{1}{\epsilon} + \frac{e}{2M_W s_W} (T_0^H)^{\text{div}}, \\
(\Sigma_{L,0}^{\bar{f}f}(k^2))^{\text{div}} &= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{M_f^2 + m_{f'}^2}{4M_W^2 s_W^2} + \frac{4s_W^2 Q_f^2 - 8T_{3f} Q_f s_W^2 + 2c_W^2 + 1}{4c_W^2 s_W^2} \check{\xi} \right) \frac{1}{\epsilon}, \\
(\Sigma_{R,0}^{\bar{f}f}(k^2))^{\text{div}} &= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{M_f^2}{2M_W^2 s_W^2} + \frac{Q_f^2 \check{\xi}}{c_W^2} \right) \frac{1}{\epsilon}, \\
(\Sigma_{M,0}^{\bar{f}f}(k^2))^{\text{div}} &= -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{M_{f'}^2}{2M_W^2 s_W^2} + \frac{(Q_f - T_{3f})Q_f}{c_W^2} (\check{\xi} + 3) \right) \frac{1}{\epsilon}, \\
(T_0^H)^{\text{div}} &= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(-\sum_f \frac{2M_f^4}{eM_W s_W} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3(M_H^4 + 4M_W^4 + 2M_Z^4) + M_H^2(2M_W^2 + M_Z^2)\check{\xi}}{4eM_W s_W} \right) \frac{1}{\epsilon}, \tag{3.74}
\end{aligned}$$

где f' — изоспиновый партнер фермиона f , n_g означает число фермионных поколений, и суммирование идет по фермионным ароматам и цветам. Для полноты включены собственные энергии фермионов и вклады фермионов в собственные энергии калибровочных бозонов и скаляров. Они имеют тот же вид, что и в обычном формализме.

Используя (3.72) и (3.73), находим расходящиеся части констант перенормировок

$$\begin{aligned}
(\delta Z_e)^{\text{div}} &= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \left(\frac{32}{9} n_g - 7 \right) \frac{1}{\epsilon}, \\
\left(\frac{\delta M_W^2}{M_W^2} \right)^{\text{div}} &= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{4}{3s_W^2} n_g - \frac{43}{6s_W^2} - \sum_f \frac{M_f^2}{2M_W^2 s_W^2} + \frac{2c_W^2 + 1}{4c_W^2 s_W^2} (\check{\xi} + 3) \right) \frac{1}{\epsilon}, \\
\left(\frac{\delta c_W^2}{c_W^2} \right)^{\text{div}} &= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{-32s_W^2 + 12}{9c_W^2} n_g - 7 - \frac{1}{6c_W^2} \right) \frac{1}{\epsilon}, \\
(\delta M_H^2)^{\text{div}} &= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\sum_f \frac{M_f^2 (M_H^2 - 6M_f^2)}{2M_W^2 s_W^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3[5M_H^4 + 12M_W^4 + 6M_Z^4 + M_H^2(2M_W^2 + M_Z^2)(\check{\xi} - 2)]}{8M_W^2 s_W^2} \right) \frac{1}{\epsilon}, \\
(\delta M_f)^{\text{div}} &= \frac{e^2}{(4\pi)^2} M_f \left(\frac{3(M_f^2 - M_{f'}^2)}{8M_W^2 s_W^2} - \frac{3Q_f(Q_f - T_{3f})}{c_W^2} + \frac{(2c_W^2 + 1)\check{\xi}}{8c_W^2 s_W^2} \right) \frac{1}{\epsilon},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\delta t_H)^{\text{div}} &= - (T_0^H)^{\text{div}}, \\
(\delta Z_L^f)^{\text{div}} &= - (\Sigma_{L,0}^{\bar{f}^u f^u}(k^2))^{\text{div}} = - (\Sigma_{L,0}^{\bar{f}^d f^d}(k^2))^{\text{div}}, \\
(\delta Z_R^{f^u})^{\text{div}} &= - (\Sigma_{R,0}^{\bar{f}^u f^u}(k^2))^{\text{div}}, \\
(\delta Z_{R,0}^{f^d})^{\text{div}} &= - (\Sigma_{R,0}^{\bar{f}^d f^d}(k^2))^{\text{div}}.
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Согласно (3.67) и (3.68) это фиксирует также расходящиеся части констант перенормировок калибровочных бозонов и скаляров, давая

$$\begin{aligned}
(\delta Z_{AA})^{\text{div}} &= - \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{32}{9} n_g - 7 \right) \frac{1}{\epsilon}, \\
(\delta Z_{AZ})^{\text{div}} &= 2 \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{-32s_W^2 + 12}{9c_W s_W} n_g - \frac{42c_W^2 + 1}{6c_W s_W} \right) \frac{1}{\epsilon}, \\
(\delta Z_{ZZ})^{\text{div}} &= - \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{32s_W^4 - 12(2s_W^2 - 1)}{9c_W^2 s_W^2} n_g - \frac{42c_W^4 + 2c_W^2 - 1}{6c_W^2 s_W^2} \right) \frac{1}{\epsilon}, \\
(\delta Z_W)^{\text{div}} &= - \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{4}{3s_W^2} n_g - \frac{43}{6s_W^2} \right) \frac{1}{\epsilon}, \\
(\delta Z_H)^{\text{div}} &= (\delta Z_z)^{\text{div}} = (\delta Z_w)^{\text{div}} \\
&= - \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\sum_f \frac{M_f^2}{2M_W^2 s_W^2} - \frac{2c_W^2 + 1}{4c_W^2 s_W^2} (\check{\xi} + 3) \right) \frac{1}{\epsilon}.
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Видно, что расходящиеся части констант перенормировок, связанных с калибровочными полями, действительно не зависят от $\check{\xi}$ в соответствии с приведенным ранее общим обсуждением.

▽ Упражнение 14

Перенормированные собственные энергии получаются путем добавления контрчленов, определенных в (II.6)–(II.13), к перенормированным. Из (3.74)–(3.76) ясно, что хотя константы перенормировок полей в МФП не могут быть выбраны произвольно, тем не менее все перенормированные собственные энергии конечны. В то время как в обычном формализме константы перенормировок полей выбираются так, чтобы получить конечные собственные энергии, в МФП это происходит автоматически благодаря тождествам Уорда. Конечность выражений для продольных частей собственных энергий калибровочных бозонов и энергий смешивания калибровочных бозонов и скаляров следует непосредственно из конечности перенормированного головастика и собственной энергии скаляра, а также тождеств Уорда (3.46)–(3.51).

Таким образом, перенормировка, основанная на определении всех параметров на массовой поверхности, может быть последовательно использована в МФП. Она приводит к конечности всех вершинных функций, сохраняя одновременно полную калибровочную симметрию МФП. Поскольку расходящиеся части перенормированных собственных энергий сами по себе удовлетворяют тождествам Уорда, ясно,

что перенормировка в схеме минимальных вычитаний (MS или $\overline{\text{MS}}$) также сохраняет симметрию МФП.

Как упоминалось ранее, перенормировка в МФП в схеме на массовой поверхности фиксирует вычет фотонного пропагатора равным единице. Пропагаторы же остальных калибровочных полей, скаляров и левых фермионов верхнего типа приобретают отличные от единицы вычеты, что должно быть скорректировано в S-матричных элементах с помощью ультрафиолетово конечной перенормировки волновых функций. Возможно, это создает некоторые практические неудобства, однако это же необходимо и в обычном формализме в симметричной схеме перенормировок SM на массовой поверхности (см. далее).

Соотношения между константами перенормировок были получены с помощью тождеств Уорда МФП, приведенных в предшествующем разделе. В свою очередь, эти тождества следуют из калибровочной инвариантности эффективного действия. Поскольку в МФП эта инвариантность прямо связана с инвариантностью классического лагранжиана, данные соотношения могут быть получены также непосредственно из этого лагранжиана.

▽ Упражнение 15

Вследствие соотношений (3.64)–(3.71) контрчлены вершин фоновых полей имеют более простую структуру, чем контрчлены в обычном формализме (см., например, [21]). Их явная форма дана в приложении II. Более того, все вершины, происходящие из одной и той же неприводимой калибровочно-инвариантной части лагранжиана, и, в частности, все реализации одной типовой вершины, например $VVVV$, перенормируются одинаково. В приложении перечислены контрчлены для вершин, включающих только фоновые поля. Их достаточно для перенормировок всех однопетлевых процессов. Из-за перенормировок параметров и фоновых полей смешанные вершины, содержащие квантовые и фоновые поля, а также чисто квантовые вершины тоже приобретают контрчлены. Но они становятся существенными только в высших порядках.

(ii) **Симметричная схема перенормировок.** Константы перенормировок, введенные в (3.61) и (3.62), соответствуют физическим полям A , Z , W^\pm и H , т.е. собственным состояниям массы и электрического заряда. Иначе, можно ввести константы перенормировок в терминах полей B , W^i и ϕ до спонтанного нарушения и смешивания (см., например, [20]), что приводит к более экономной схеме перенормировок на массовой поверхности с меньшим количеством констант перенормировок полей. В бозонном секторе соответствующие перенормировочные константы даются соотношениями

$$\begin{aligned} B_0 &= (Z_2^B)^{1/2} B, \\ W_0^i &= (Z_2^W)^{1/2} W^i, \\ \phi_0 &= (Z^\phi)^{1/2} \phi, \\ g_{1,0} &= Z_1^B (Z_2^B)^{-3/2} g_1 = Z_{g_1} g_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{2,0} &= Z_1^W (Z_2^W)^{-3/2} g_2 = Z_{g_2} g_2, \\
\lambda_0 &= Z^\lambda (Z^\phi)^{-2} \lambda, \\
\eta_0 &= (Z^\phi)^{1/2} (\eta + \delta\eta), \\
v_0 &= (Z^\phi)^{1/2} (v + \delta v).
\end{aligned} \tag{3.77}$$

В этой формулировке калибровочная симметрия МФП приводит к соотношениям [20]

$$\begin{aligned}
Z_1^W &= Z_2^W \equiv Z^W, \\
\delta v &= 0
\end{aligned} \tag{3.78}$$

в дополнение к обычному для абелевого поля соотношению

$$Z_1^B = Z_2^B \equiv Z^B. \tag{3.79}$$

Таким образом, как для изосинглетного поля $U(1)_Y$, так и для изотриплетного поля $SU(2)_W$ справедливы КЭД-подобные соотношения между перенормировками констант и полей. К тому же нет перенормировки вакуумного среднего сверх того, которое связано с перенормировкой хиггсовского поля. Другие ограничения, следующие из (3.64)–(3.71), уже учтены в анзаце (3.77) для перенормировки полей. Ясно, что в этом варианте схемы перенормировок на массовой поверхности константы перенормировок калибровочных полей также калибровочно независимы. С учетом ограничений, налагаемых МФП, эти два варианта становятся в действительности эквивалентными, т.е. оба приводят к идентичными перенормированным функциям Грина.¹⁷

▽ Упражнение 16

3.5. Свойства вершинных функций СМ в методе фонового поля

Как упоминалось ранее, вершинные функции МФП обладают улучшенными теоретическими свойствами в сравнении с их аналогами в обычном формализме. Причем улучшенное ультрафиолетовое и инфракрасное поведение возникает автоматически без наложения дополнительных требований. Как будет показано в данном

¹⁷Перенормировке электрослабой СМ (без фермионов) в рамках МФП в симметричном базисе посвящена также работа [14]. Поскольку в этой работе налагается требование, чтобы вычет хиггсовского пропагатора равнялся единице, в отличие от (3.78) необходима ненулевая конечная поправка к вакуумному среднему δv хиггсовского поля. Это нарушает наивные тождества Уорда и исправляется в [14] с помощью включения δv в перенормированные тождества Уорда. Поскольку перенормировка в МФП включает и другие поля с отличными от единицы вычетами, удобнее проводить ее так, чтобы сохранить полную калибровочную инвариантность и, следовательно, оставить неизменной форму тождеств Уорда. Кроме того, нельзя согласиться с утверждением [14], что на фоновые поля должна быть обязательно наложена калибровка Тофта–Ландау $\xi = 0$. В действительности, не видно причин, по которым необходимо потребовать такое ограничение. Более того, это противоречило бы самой сути МФП.

разделе, эти свойства могут быть получены непосредственно из тождеств Уорда, рассмотренных в разделе 3.3. В свою очередь, тождества Уорда являются прямым следствием инвариантности относительно фоновых калибровочных преобразований, которые справедливы независимо от значения квантового калибровочного параметра ξ . В результате, свойства вершинных функций МФП, следующие из этих тождеств, также справедливы для произвольных значений параметра ξ .

(i) Рассмотрим сначала вершинную функцию калибровочного бозона и двух фермионов. Можно убедиться, что в однопетлевом приближении она оказывается ультрафиолетово конечной после добавления перенормировок фермионных полей. В действительности, в МФП этот факт является прямым следствием соотношений между константами перенормировок, которые были выведены в предыдущем разделе. Как следует из (II.28), контрчлен для вершины $V\bar{F}F$ полностью определяется константами перенормировок фермионных полей. Поэтому добавление последних к вершинной функции сокращает ультрафиолетовые расходимости. Очевидно, что этот факт справедлив при всех значениях квантового калибровочного параметра ξ .

Учитывая структуру контрчленов, приведенных в приложении II, аналогичные заключения могут быть получены и для других вершинных функций. В частности, вершины VWW и $VV'WW$ становятся ультрафиолетово конечными после добавления перенормировок двух W -полей, как можно усмотреть из (II.14) и (II.16). Можно также убедиться, что однопетлевая фермион–фотонная вершина с включением перенормировки фермионов оказывается равной нулю при нулевом переданном импульсе. Это связано с тем, что включение перенормировки фермионов приводит в МФП к полной перенормировке этой вершины, а конечная поправка к данной перенормированной вершине обращается в нуль вследствие выбора условия нормировки электрического заряда в схеме на массовой поверхности.

(ii) Исследуем асимптотическое поведение собственных энергий калибровочных бозонов в МФП при $|q^2| \rightarrow \infty$. В работах [13] был получен явный однопетлевой результат для ведущих логарифмов бозонных вкладов в бозонные собственные энергии в МФП, показывающий, что коэффициенты при логарифмах не зависят от ξ . Однако это свойство может быть выведено также из тождеств Уорда следующим образом. В размерной регуляризации неперенормированные однопетлевые собственно энергетические функции удовлетворяют следующим соотношениям ($V, V' = A, Z, W$):

$$\begin{aligned} \Pi_0^{VV'}(q^2) &\equiv \frac{\Sigma_{T,0}^{VV'}(q^2) - \Sigma_{T,0}^{VV'}(0)}{q^2} \\ &= g_{VV'}^2 \mu^{2\epsilon} \left(-c_{VV'} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \mu^2 \right) + UV \text{ конечные члены} \right), \end{aligned} \quad (3.80)$$

где $c_{VV'}$ — это не зависящий от q^2 коэффициент, который может быть найден из сравнения с (3.74), $g_{AA} = e$, $g_{WW} = g_2 = e/s_W$, $g_{ZZ} = e/(c_W s_W)$, $g_{AZ} = e/\sqrt{c_W s_W}$ и μ является массовым параметром, вводимым для безразмерности $g_{VV'}^2$. Поэтому в

пределе $|q^2| \rightarrow \infty$, когда всеми массами можно пренебречь, вследствие размерных соображений собственные энергии должны вести себя как

$$\Pi_0^{VV'}(q^2) \underset{|q^2| \rightarrow \infty}{\sim} g_{VV'}^2 \left(-c_{VV'} \frac{1}{\epsilon} + c_{VV'} \ln \frac{|q^2|}{\mu^2} + UV \text{ конечная const} \right). \quad (3.81)$$

Используя далее равенства

$$\begin{aligned} (\delta Z_{VV})^{\text{div}} &= - \left(\Pi_0^{VV}(q^2) \right)^{\text{div}}, \\ (\delta Z_{AZ})^{\text{div}} &= -2 \left(\Pi_0^{AZ}(q^2) \right)^{\text{div}}, \end{aligned} \quad (3.82)$$

можно найти, что расходящиеся части δZ_{VV} и δZ_{AZ} равны

$$\begin{aligned} (\delta Z_{VV})^{\text{div}} &= g_{VV}^2 c_{VV} \frac{1}{\epsilon}, \\ (\delta Z_{AZ})^{\text{div}} &= 2g_{AZ}^2 c_{AZ} \frac{1}{\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Согласно результатам раздела 3.4 константы перенормировок полей и, следовательно, $(\delta Z_{VV})^{\text{div}}$ не зависят от калибровки ξ . В результате, коэффициенты $c_{VV'}$ перед ведущими логарифмами в $\Sigma_{T,0}^{VV'}(q^2)$ также являются калибровочно независимыми.

В разделе 2 было показано, что в МФП β -функция калибровочной константы КХД связана с аномальной размерностью и, значит, с константой перенормировки калибровочного поля. То же относится к электрослабой СМ. Из условия $Z_e = Z_{AA}^{-1/2}$ следует, что β -функция электромагнитной константы в схеме минимальных вычитаний удовлетворяет соотношению

$$\beta_e(e) = c_{AA} e^3 + \mathcal{O}(e^5), \quad (3.84)$$

т.е. в СМ коэффициент перед ведущим логарифмом собственной энергии фотона в МФП равен коэффициенту однопетлевой β -функции, как и в КЭД. Аналогично, соотношение $Z_{g_2} = (Z_2^W)^{-1/2} = Z_W^{-1/2}$, которое может быть получено из (3.68) и (3.78), дает для константы заряженных токов

$$\beta_{g_2}(g_2) = c_{WW} g_2^3 + \mathcal{O}(g_2^5). \quad (3.85)$$

Можно ввести следующие эффективные константы, определяя их с помощью дайсоновского суммирования перенормированных собственных энергий:

$$\begin{aligned} e^2(q^2) &= \frac{e^2}{1 + \text{Re} \Pi^{AA}(q^2)}, \\ g_2^2(q^2) &= \frac{g_2^2}{1 + \text{Re} \Pi^{WW}(q^2)}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Тот факт, что коэффициенты ведущих логарифмов в собственных энергиях равны коэффициентам β -функций, означает, что асимптотическое поведение констант

связи $e^2(q^2)$ и $g_2^2(q^2)$ управляется ренормгруппой и при $|q^2| \gg M^2$ они совпадают с соответствующими бегущими константами: $e^2(q^2) = \bar{e}^2(\mu^2)|_{\mu^2=|q^2|}$ (и аналогично для $g_2^2(q^2)$). Асимптотически эти константы эквивалентны тем, которые определены в [23]–[26], но для конечных значений q^2 имеются различия.¹⁸ Более того, эффективные константы (3.86) зависят от ξ в неасимптотической области. Это означает, что любое определение эффективных констант с помощью дайсоновского суммирования собственных энергий, включающее массовые эффекты, не является единственно возможными, а зависит от соглашения. Эта неоднозначность существует всегда, но в МФП она становится явной и, следовательно, может быть учтена на практике.

Можно определить также эффективный параметр электрослабого смешивания $s_W(q^2)$ как отношение эффективной электромагнитной константы и аналогичной константы заряженных токов

$$s_W^2(q^2) = \frac{e^2(q^2)}{g_2^2(q^2)} = \frac{e^2}{g_2^2} \frac{1 + \text{Re } \Pi^{WW}(q^2)}{1 + \text{Re } \Pi^{AA}(q^2)}. \quad (3.87)$$

В ведущем логарифмическом приближении это дает

$$s_W^2(q^2) \Big|_{|q^2| \rightarrow \infty} \widetilde{\sim} s_W^2 \left(1 - \frac{c_W}{s_W} \text{Re } \Pi^{AZ}(q^2) \right) + \mathcal{O}(e^4), \quad (3.88)$$

что соответствует эффективному $s_W^2(q^2)$, использованному например в работе [27]. Все сделанные выше замечания относительно эффективных констант $e^2(q^2)$ и $g_2^2(q^2)$ остаются в силе и здесь.

3.6. Сравнение МФП с пинчевой техникой

(i) Вопрос получения функций Грина с подходящими теоретическими свойствами в последние годы привлек к себе значительное внимание в литературе. Он особенно актуален для приложений, имеющих дело с функциями Грина вне массовой поверхности. Последние становятся важными, когда суммируются собственно энергетические вклады фиксированного порядка в разложении по петлям для введения бегущих констант или для учета эффектов конечности ширины в резонансной области. Собственно энергетические функции вне массовой поверхности часто вводятся также для параметризации электрослабых радиационных поправок СМ или для модельно независимого описания эффектов новой физики. Более того, часто обсуждаются формфакторы вне массовой поверхности, например для t и b -кварков или для нейтрино.

Большинство предшествующих попыток построения функций Грина, подходящих для этих целей, были направлены на устранение их зависимости от калибровочного параметра в каком-нибудь специальном классе калибровок — обычно R_ξ -калибровок. С этой целью строились новые “функции Грина” путем перераспределения вкладов собственно энергетических, вершинных и боксовых диаграмм [23]–[26].

¹⁸Подобные же различия существует также между различными вариантами в указанных работах.

В частности, пинчевая¹⁹ техника (ПТ) [25,26] дает конкретные предписания для такого “расщепления” и получения калибровочно независимых величин на однопетлевом уровне. Было найдено, что эти величины удовлетворяют простым тождествам Уорда и обладают рядом других желательных свойств.

Несмотря на эти успехи, имеется множество проблем, связанных с подходом ПТ. Обобщение ПТ на высшие порядки довольно сложно [28], и даже на однопетлевом уровне ПТ неприменима непосредственно ко всем возможным функциям Грина. В дополнение к этим техническим трудностям ПТ имеет также ряд концептуальных проблем. Строго говоря, получаемые строительные блоки S-матрицы не следует называть функциями Грина, поскольку их теоретико-полевой смысл не был прояснен. Независимость от процессов этих новых “функций Грина”, построенных в рамках ПТ, не была доказана. Более того, простые тождества Уорда и прочие желательные свойства в рамках ПТ были не выведены, а просто проверены на ряде конкретных однопетлевых примеров.

В работе [13] было показано, что в рамках МФП эти теоретические проблемы естественным образом разрешаются. Было найдено, что результаты, полученные с помощью ПТ в КХД и СМ электрослабых взаимодействий, совпадают с результатами МФП в частном случае $\check{\xi} = 1$, где $\check{\xi}$ — это квантовый калибровочный параметр, связанный с фиксацией калибровки квантовых полей.²⁰ Вершинные функции МФП выводятся непосредственно из эффективного действия во всех порядках петлевой теории возмущений и очевидным образом не зависят от процессов. Справедливость КЭД-подобных тождеств Уорда является прямым следствием инвариантности эффективного действия. Более того, тождества Уорда в МФП с неизбежностью влекут за собой другие желательные свойства функций Грина.

Из самой формулировки МФП следует, что тождества Уорда и хорошие свойства функций Грина справедливы для любых значений квантового калибровочного параметра $\check{\xi}$. Этот факт особенно важен в связи с предшествующими рассмотрениями [23]–[26], в основе которых лежало устранение зависимости от калибровочного параметра. Анализ МФП показывает, что в его рамках критерием получения функций Грина с подходящими свойствами является не независимость от калибровочного параметра, а тождества Уорда, следующие из калибровочной инвариантности. Произвол в вершинных функциях, параметризуемый в МФП остаточной зависимостью вершин от квантового калибровочного параметра $\check{\xi}$, имеет место также и в предшествующих подходах, где этот произвол соответствует неоднозначности выбора различных предписаний устранения зависимости от калибровочного параметра. В то время как в других формулировках указанный неустраняемый произвол неконтролируем, достоинством МФП является то, что этот произвол выделен в явь и, следовательно, может быть учтен.

¹⁹От слова “pinch” — щипок, щепотка.

²⁰Совпадение результатов для КХД, полученных с помощью МФП при $\check{\xi} = 1$, и соответствующих результатов ПТ при $\xi = 1$ было найдено также в [9].

(ii) В данном пособии изложено применение МФП к электрослабой СМ, следуя в основном работам [13]. Приведен полный классический лагранжиан СМ электрослабых взаимодействий и показано, как с его помощью строятся калибровочно-инвариантное эффективное действие, функции Грина и S-матрица. Приведен также полный набор правил Фейнмана для произвольных значений квантового калибровочного параметра, включая все контрчлены, необходимые для однопетлевых вычислений. Подчеркнем еще раз основные моменты МФП в сравнении как с обычным формализмом вообще, так и с ПТ в рамках обычного формализма, в частности.

Показано, что из калибровочной инвариантности МФП следуют простые тождества Уорда, аналогичные тождествам КЭД. Проведено их обсуждение в сравнении с тождествами Славнова–Тейлора обычного формализма. Вследствие тождеств Уорда вершинные функции МФП обладают улучшенными теоретическими свойствами по сравнению с их обычными аналогами. В частности, это было продемонстрировано на примере бегущих констант, определенных непосредственно с помощью дайсоновского суммирования. В отличие от обычного формализма асимптотическое поведение этих констант в МФП автоматически управляется ренормгруппой и не зависит от квантового калибровочного параметра. В сравнении с предшествующими рассмотрениями, например пинчевой техникой, где желаемые свойства функций Грина могли быть проверены только явным вычислением, МФП дает четко определенный базис для изучения свойств функций Грина вне массовой поверхности, связывая эти свойства с калибровочной инвариантностью эффективного действия.

Более того, практические вычисления S-матричных элементов в МФП существенно упрощаются. Свобода выбора надлежащей, например унитарной ($\xi \rightarrow \infty$), калибровки для фоновых полей независимо от квантовой калибровки позволяет значительно сократить число петлевых фейнмановских диаграмм, дающих вклад в определенный процесс. В дополнение к этому упрощается также и вычисление самих петлевых диаграмм. Это происходит, например, в калибровке Тофта–Фейнмана ($\xi = 1$) для квантовых полей.

При рассмотрении приложений МФП в СМ крайне важно использовать согласованную схему перенормировок, не нарушающую явную калибровочную инвариантность, или иными словами, не изменяющую форму тождеств Уорда. Это было сделано, исходя из двух различных схем — полной и минимальной схем перенормировок на массовой поверхности. Было показано, что калибровочная симметрия налагает определенные соотношения между константами перенормировок полей и параметров СМ, т.е. электрического заряда и масс частиц. Однако было указано, что даже при этом редуцированном наборе независимых констант перенормировок все функции Грина СМ становятся конечными. Это было проверено в явном виде на однопетлевом уровне с помощью вычислений соответствующих величин. Константы перенормировок физических параметров остаются все еще независимыми друг от друга, так что все условия перенормировок в схеме на массовой поверхности могут быть выполнены. Таким образом, схема перенормировок на массовой поверхности согласуется с симметриями МФП. Более того, это же справедливо для схемы минимальных вычитаний (\overline{MS} или \overline{MS}).

Вследствие калибровочной инвариантности перенормировки в МФП существенно упрощаются в сравнении с обычным формализмом как технически, так и концептуально. В МФП требуется меньше независимых констант перенормировок, а контрчлены имеют более простую структуру. Все конкретные реализации одной типовой вершины имеют один общий универсальный контрчлен. При выборе в качестве заряда и масс частиц их физических значений константы перенормировок всех калибровочных полей становятся не зависящими от калибровочного параметра.

Благодаря всем вышеуказанным свойствам, МФП в СМ электрослабых взаимодействий и в калибровочных теориях поля вообще является формализмом, чрезвычайно полезным как для технического и концептуального упрощения вычислений S-матричных элементов, так и для исследования величин вне массовой поверхности. Последнее обстоятельство особенно важно в контексте модельно независимых расширений СМ, часто включающих модификацию пропагаторов и вершин. МФП дает надежную основу для поисков выхода за рамки СМ, что является основной проблемой современной физики высоких энергий.

Приложение

I. Правила Фейнмана неабелевой калибровочной теории в МФП

В этом приложении приводятся МФП-правила Фейнмана точной неабелевой калибровочной теории в R_ξ -калибровке для произвольного значения калибровочного параметра ξ [7]. Частные случаи этого параметра соответствуют калибровке Тофта–Ландау при $\xi = 0$ и калибровке Тофта–Фейнмана при $\xi = 1$. Ниже V обозначает обобщенное калибровочное поле ($V = B, Q$), где B — фоновое, Q — квантовое поля. Индексы $a, b \dots = 1, \dots, N$ соответствуют присоединенному представлению калибровочной группы; $A, B \dots = 1, \dots, n$ — фундаментальному представлению этой группы ($N = n^2 - 1$ для $SU(n)$). Первыми приводятся смешанные вершины с числом квантовых линий не более двух, которые необходимы для однопетлевых вычислений, затем вершины для двухпетлевых вычислений и вычислений более высокого порядка. Все частицы и импульсы в вершинах считаются входящими.

(i) Пропагаторы:

- калибровочные поля $V = B, Q$ ($\xi_B \equiv \xi, \xi_Q \equiv \check{\xi}$)

$$\boxed{V_\mu^a \text{---} k \text{---} V_\nu^b} = \frac{-i\delta^{ab}}{k^2} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi_V) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (\text{I.1})$$

- духи

$$\boxed{\theta^a \text{---} k \text{---} \bar{\theta}^b} = \frac{i\delta^{ab}}{k^2}, \quad (\text{I.2})$$

- фермионы

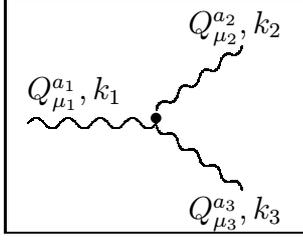
$$\boxed{f_A \text{---} p \text{---} \bar{f}^B} = \frac{i(\not{p} + M_f)}{p^2 - M_f^2} \delta_A^B. \quad (\text{I.3})$$

(ii) Вершины VVV:

- BQQ вершина

$$\boxed{B_{\mu_1}^{a_1}, k_1 \text{---} Q_{\mu_2}^{a_2}, k_2 \text{---} Q_{\mu_3}^{a_3}, k_3} = g f^{a_1 a_2 a_3} \left[g_{\mu_1 \mu_2} (k_2 - k_1 + \check{\xi}^{-1} k_3)_{\mu_3} + g_{\mu_3 \mu_1} (k_1 - k_3 - \check{\xi}^{-1} k_2)_{\mu_2} + g_{\mu_2 \mu_3} (k_3 - k_2)_{\mu_1} \right] \quad (\text{I.4})$$

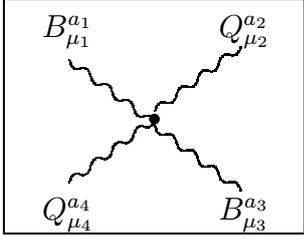
- QQQ вершина



$$= g f^{a_1 a_2 a_3} \left[g_{\mu_1 \mu_2} (k_2 - k_1)_{\mu_3} + g_{\mu_2 \mu_3} (k_3 - k_2)_{\mu_1} + g_{\mu_3 \mu_1} (k_1 - k_3)_{\mu_2} \right] \quad (\text{I.5})$$

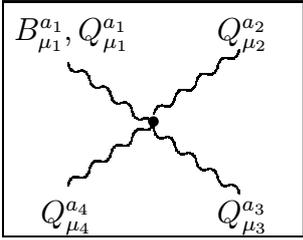
(iii) Вершины $VVVV$:

- $BVQQ$ вершина



$$= -ig^2 \left[f^{a_1 a_2 b} f^{b a_3 a_4} (g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} - g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3} + \check{\xi}^{-1} g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4}) + f^{a_1 a_4 b} f^{b a_2 a_3} (g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} - g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} - \check{\xi}^{-1} g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3}) + f^{a_1 a_3 b} f^{b a_2 a_4} (g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} - g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3}) \right] \quad (\text{I.6})$$

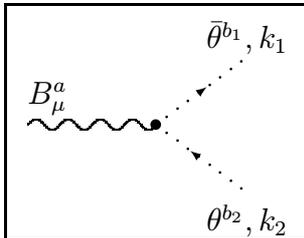
- $BQQQ, QQQQ$ вершины



$$= -ig^2 \left[f^{a_1 a_2 b} f^{b a_3 a_4} (g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} - g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3}) + f^{a_1 a_4 b} f^{b a_2 a_3} (g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} - g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4}) + f^{a_1 a_3 b} f^{b a_2 a_4} (g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} - g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3}) \right] \quad (\text{I.7})$$

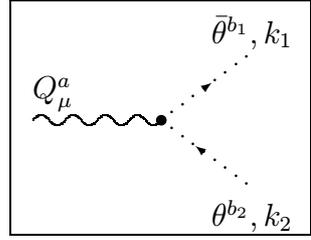
(iv) Вершины $V\bar{\theta}\theta$:

- $B\bar{\theta}\theta$ вершина



$$= -g f^{a b_1 b_2} (k_1 - k_2)_{\mu} \quad (\text{I.8})$$

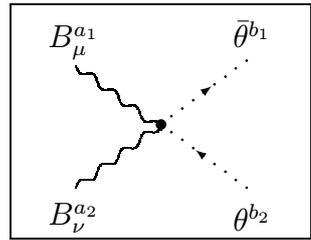
- $Q\bar{\theta}\theta$ вершина



$$= -g f^{ab_1 b_2} k_{1\mu} \quad (\text{I.9})$$

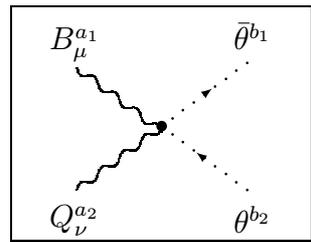
(v) Вершины $VV\bar{\theta}\theta$:

- $BV\bar{\theta}\theta$ вершина



$$= ig^2 (f^{a_1 b_1 c} f^{c a_2 b_2} + f^{a_1 b_2 c} f^{c a_2 b_1}) g_{\mu\nu} \quad (\text{I.10})$$

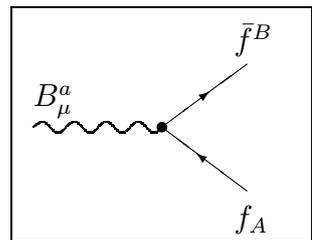
- $BQ\bar{\theta}\theta$ вершина



$$= ig^2 f^{a_1 b_1 c} f^{c a_2 b_2} g_{\mu\nu} \quad (\text{I.11})$$

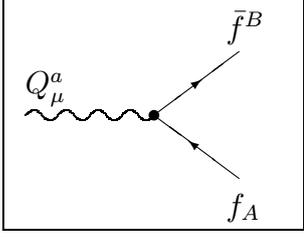
(vi) Вершины $V\bar{f}f$:

- $B\bar{f}f$ вершина



$$= ig \gamma_\mu (T^a)_A^B \quad (\text{I.12})$$

- $Q\bar{f}f$ вершина



$$= ig\gamma_\mu(T^a)_A^B \quad (\text{I.13})$$

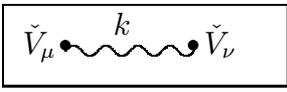
II. Правила Фейнмана СМ электрослабых взаимодействий в МФП

В этом приложении приводятся правила Фейнмана СМ электрослабых взаимодействий в МФП для произвольного значения квантового калибровочного параметра $\check{\xi} = \check{\xi}_B = \check{\xi}_W$ [13]. Частные случаи этого параметра соответствуют калибровке Гюфта–Ландау при $\check{\xi} = 0$, калибровке Гюфта–Фейнмана при $\check{\xi} = 1$ и, наконец, унитарной калибровке при $\check{\xi} \rightarrow \infty$. Ниже выписываются базисные правила Фейнмана для всех типов однопетлевых вершин и даются возможные конкретные вставки в них. В дальнейшем все частицы и импульсы в вершинах рассматриваются как входящие и используются следующие сокращенные обозначения: $c \equiv c_W$, $s \equiv s_W$. Приводимые правила соответствуют значению борновского головастика $t_H = 0$.

Используя представленные здесь фейнмановские правила, можно найти вершинные функции, соответствующие калибровочно-инвариантному эффективному действию МФП. Важно, что член, фиксирующий калибровку фоновых полей, нигде не присутствует. Подобный член существует лишь при нахождении связанных функций Грина и S-матричных элементов с помощью вершинных функций. Он может быть выбран независимо от фиксации калибровки квантовых полей. При этом, если используется линейная фоновая калибровка, зависящими от нее оказываются только пропагаторы фоновых полей. Чисто квантовые вершины имеют тот же вид, что и в обычном формализме, однако в однопетлевом приближении они не требуются.

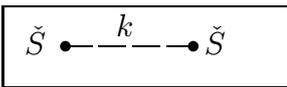
(i) **Пропагаторы.** Начнем с пропагаторов квантовых полей:

- калибровочные бозоны $\check{V} = \check{A}, \check{Z}, \check{W}$ ($M_{\check{A}} = 0$)



$$= -i \left[\frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - M_{\check{V}}^2} - \frac{(1 - \check{\xi})k_\mu k_\nu}{(k^2 - M_{\check{V}}^2)(k^2 - \check{\xi}M_{\check{V}}^2)} \right], \quad (\text{II.1})$$

- скалярные поля $\check{S} = \check{H}, \check{z}, \check{w}$ ($M_{\check{z}} = \check{\xi}M_Z, M_{\check{w}} = \check{\xi}M_W$)



$$= \frac{i}{k^2 - M_{\check{S}}^2}, \quad (\text{II.2})$$

- духи Фаддеева–Попова $\Theta = \theta^A, \theta^Z, \theta^\pm$ ($M_{\theta^A} = 0, M_{\theta^Z} = \check{\xi}M_Z, M_{\theta^\pm} = \check{\xi}M_W$)

$$\boxed{\Theta \cdots \overset{k}{\dashrightarrow} \cdots \bar{\Theta}} = \frac{i}{k^2 - M_\Theta^2}, \quad (\text{II.3})$$

- и, наконец, фермионные поля $F = f$

$$\boxed{F \xrightarrow{p} \bar{F}} = \frac{i(\not{p} + M_F)}{p^2 - M_F^2}. \quad (\text{II.4})$$

В фоновой R_ξ -калибровке пропагаторы фоновых полей имеют тот же вид, что и пропагаторы квантовых полей (без духов) с заменой $\check{\xi}$ на фоновый калибровочный параметр ξ . Отметим, однако, что иногда предпочтительнее использовать более удобную калибровку для фоновых полей, например унитарную ($\xi \rightarrow \infty$) или нелинейную калибровку [19].

(ii) **Фоновые контрчлены и вершины.** Перечислим контрчлены и вершины, содержащие только фоновые поля. В низшем (древесном) порядке эти вершины идентичны вершинам в обычном формализме (см., например, [21]). Однако соответствующие им контрчлены в МФП имеют значительно более простую структуру. Отметим, что за исключением двухточечных функций, каждая типовая вершина в МФП имеет универсальный контрчлен. Как говорилось ранее, этих контрчленов достаточно для перенормировки всех однопетлевых вкладов.

1. Контрчлены:

- головастик

$$\boxed{\times \text{---} \frac{H}{\text{---}}} = i\delta t_H \quad (\text{II.5})$$

- VV контрчлен

$$\boxed{V_{1,\mu,k} \text{---} \times \text{---} V_{2,\nu}} = i \left[(-g_{\mu\nu}k^2 + k_\mu k_\nu) C_1 + g_{\mu\nu} C_2 \right] \quad (\text{II.6})$$

с вставками

$V_1 V_2$	$W^+ W^-$	ZZ	AZ	AA
C_1	δZ_W	δZ_{ZZ}	$\frac{1}{2} \delta Z_{AZ}$	δZ_{AA}
C_2	$M_W^2 \delta Z_W + \delta M_W^2$	$M_Z^2 \delta Z_{ZZ} + \delta M_Z^2$	0	0

(II.7)

- VS контрчлен

$$\boxed{V_{\mu,k} \text{ --- } \times \text{ --- } S} = ik_{\mu} C \delta Z_H \quad (\text{II.8})$$

с вставками

VS	$W^{\pm} w^{\mp}$	Zz
C	$-iM_W$	$-iM_Z$

(II.9)

- SS контрчлен

$$\boxed{S_{1,k} \text{ --- } \times \text{ --- } S_2} = i[\delta Z_H k^2 - C] \quad (\text{II.10})$$

с вставками

$S_1 S_2$	HH	$zz, w^{\pm} w^{\mp}$
C	$M_H^2 \delta Z_H + \delta M_H^2$	$-\frac{e}{2s} \frac{\delta t_H}{M_W}$

(II.11)

- $F\bar{F}$ контрчлен

$$\boxed{F_{1,p} \text{ --- } \times \text{ --- } \bar{F}_2} = i[C_L \not{p} P_L + C_R \not{p} P_R - C_M] \quad (\text{II.12})$$

с вставками

$F_1 \bar{F}_2$	$f \bar{f}$
C_L	δZ_L^f
C_R	δZ_R^f
C_M	$\frac{1}{2} M_f (\delta Z_L^f + \delta Z_R^f) + \delta M_f$

(II.13)

2. Вершины:

- $VVVV$ вершина

$= ie^2 C [2g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\nu\rho} g_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}] (1 + \delta Z_W)$

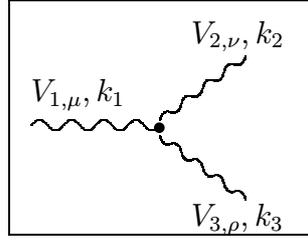
(II.14)

с вставками

$V_1 V_2 V_3 V_4$	$W^+ W^+ W^- W^-$	$W^+ W^- Z Z$	$W^+ W^- A Z$	$W^+ W^- A A$
C	$\frac{1}{s^2}$	$-\frac{c^2}{s^2}$	$-\frac{c}{s}$	-1

(II.15)

- VVV вершина



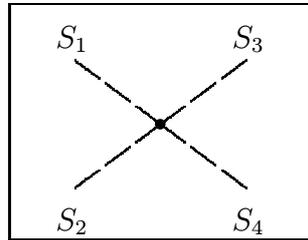
$$= -ieC \left[g_{\mu\nu} (k_2 - k_1)_\rho + g_{\nu\rho} (k_3 - k_2)_\mu + g_{\mu\rho} (k_1 - k_3)_\nu \right] (1 + \delta Z_W) \quad (\text{II.16})$$

с вставками

$V_1 V_2 V_3$	AW^+W^-	ZW^+W^-
C	1	$\frac{c}{s}$

(II.17)

- $SSSS$ вершина



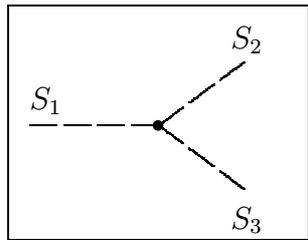
$$= ie^2 C \left[1 + \frac{\delta M_H^2}{M_H^2} + \frac{e}{2s} \frac{\delta t_H}{M_W M_H^2} + \delta Z_H \right] \quad (\text{II.18})$$

с вставками

$S_1 S_2 S_3 S_4$	$HHHH, zzzz$	$HHzz, HHw^+w^-, zzw^+w^-$	$w^+w^-w^+w^-$
C	$-\frac{3}{4s^2} \frac{M_H^2}{M_W^2}$	$-\frac{1}{4s^2} \frac{M_H^2}{M_W^2}$	$-\frac{1}{2s^2} \frac{M_H^2}{M_W^2}$

(II.19)

- SSS вершина



$$= ieC \left[1 + \frac{\delta M_H^2}{M_H^2} + \frac{e}{2s} \frac{\delta t_H}{M_W M_H^2} + \delta Z_H \right] \quad (\text{II.20})$$

с вставками

$S_1 S_2 S_3$	HHH	Hzz, Hw^+w^-
C	$-\frac{3}{2s} \frac{M_H^2}{M_W}$	$-\frac{1}{2s} \frac{M_H^2}{M_W}$

(II.21)

- $VVSS$ вершина

$$= ie^2 g_{\mu\nu} C(1 + \delta Z_H) \quad (\text{II.22})$$

с вставками

$V_1 V_2 S_1 S_2$	$ZZHH$	$W^+ W^- HH, W^+ W^- w^+ w^-$	$AAw^+ w^-$	$ZAw^+ w^-$
C	$\frac{1}{2c^2 s^2}$	$\frac{1}{2s^2}$	2	$\frac{c^2 - s^2}{cs}$

$V_1 V_2 S_1 S_2$	$ZZw^+ w^-$	$W^\pm Aw^\mp H$	$W^\pm Aw^\mp z$	$W^\pm Zw^\mp H$	$W^\pm Zw^\mp z$
C	$\frac{(c^2 - s^2)^2}{2c^2 s^2}$	$\mp \frac{i}{2s}$	$\frac{1}{2s}$	$\pm \frac{i}{2c}$	$-\frac{1}{2c}$

$$(\text{II.23})$$

- VSS вершина

$$= ieC(k_1 - k_2)_\mu(1 + \delta Z_H) \quad (\text{II.24})$$

с вставками

$VS_1 S_2$	ZzH	$Aw^+ w^-$	$Zw^+ w^-$	$W^\pm w^\mp H$	$W^\pm w^\mp z$
C	$\frac{i}{2cs}$	-1	$-\frac{c^2 - s^2}{2cs}$	$-\frac{i}{2s}$	$\pm \frac{1}{2s}$

$$(\text{II.25})$$

- SVV вершина

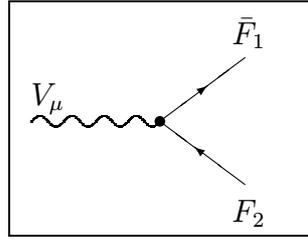
$$= ieg_{\mu\nu} C(1 + \delta Z_H) \quad (\text{II.26})$$

с вставками

$SV_1 V_2$	HZZ	$HW^+ W^-$	$w^\pm W^\mp A$	$w^\pm W^\mp Z$
C	$\frac{1}{c^2 s} M_W$	$\frac{1}{s} M_W$	$\pm i M_W$	$\pm \frac{is}{c} M_W$

$$(\text{II.27})$$

- $V\bar{F}F$ вершина



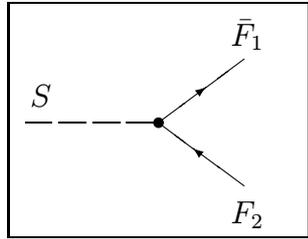
$$= ie\gamma_\mu \left[C_L P_L (1 + \delta Z_L^{F_1}) + C_R P_R \left(1 + \frac{1}{2}(\delta Z_R^{F_1} + \delta Z_R^{F_2}) \right) \right] \quad (\text{II.28})$$

с вставками

$V\bar{F}_1 F_2$	$A\bar{f}f$	$Z\bar{f}f$	$W^+ \bar{f}^u f^d, W^- \bar{f}^d f^u$
C_L	$-Q_f$	$-\frac{T_{3f} - s^2 Q_f}{cs}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}s}$
C_R	$-Q_f$	$\frac{s}{c} Q_f$	0

(II.29)

- $S\bar{F}F$ вершина



$$= ie \left[C_L P_L \left(1 + \frac{\delta M_{F_1}}{M_{F_1}} + \frac{1}{2} \delta Z_L^{F_1} + \frac{1}{2} \delta Z_R^{F_1} \right) + C_R P_R \left(1 + \frac{\delta M_{F_2}}{M_{F_2}} + \frac{1}{2} \delta Z_L^{F_1} + \frac{1}{2} \delta Z_R^{F_2} \right) \right] \quad (\text{II.30})$$

с вставками

$S\bar{F}_1 F_2$	$H\bar{f}f$	$z\bar{f}f$	$w^+ \bar{f}^u f^d$	$w^- \bar{f}^d f^u$
C_L	$-\frac{1}{2s} \frac{M_f}{M_W}$	$-\frac{iT_{3f}}{s} \frac{M_f}{M_W}$	$\frac{i}{\sqrt{2}s} \frac{M_{fu}}{M_W}$	$\frac{i}{\sqrt{2}s} \frac{M_{fd}}{M_W}$
C_R	$-\frac{1}{2s} \frac{M_f}{M_W}$	$\frac{iT_{3f}}{s} \frac{M_f}{M_W}$	$\frac{-i}{\sqrt{2}s} \frac{M_{fd}}{M_W}$	$\frac{-i}{\sqrt{2}s} \frac{M_{fu}}{M_W}$

(II.31)

Отметим, что в отличие от обычного формализма для вершин $Z\bar{A}H$, $Z\bar{A}z$, AzH и HZA не требуется никаких контрчленов.

(iii) **Смешанные вершины.** Выпишем теперь правила Фейнмана для смешанных вершин, содержащих как квантовые, так и фоновые поля. Поскольку в однопетлевом приближении эти вершины рассматриваются в низшем порядке, контрчлены для них в явном виде не приводятся. Как отмечалось ранее, все вершины низшего порядка, содержащие фермионы, имеют обычный вид. Так как фиксирующий квантовую калибровку член квадратичен по квантовым полям, то за исключением вершин с духовыми полями, только вершины точно с двумя квантовыми полями отличаются от обычных. Таким образом, другие вершины, включающие квантовые поля, имеют в низшем порядке тот же вид, что и чисто фоновые вершины, приведенные выше. Соответствующие им вставки могут быть получены из вставок, приведенных выше для чисто фоновых вершин, с помощью всех возможных комбинаций

фоновых и квантовых полей. Например, вставки $W^+ \check{W}^- \check{A} \check{Z}$, $\check{W}^+ W^- \check{A} \check{Z}$, $\check{W}^+ \check{W}^- A \check{Z}$ и $\check{W}^+ \check{W}^- \check{A} Z$ могут быть получены как возможные вставки для вершины $V \check{V} \check{V} \check{V}$, соответствующие вставке $W^+ W^- A Z$ в вершину $V V V V$.

Некоторые из вершин, содержащих два квантовых поля, также соответствуют обычным правилам Фейнмана. Таковыми являются $V V \check{S} \check{S}$, $S S \check{V} \check{V}$, $V \check{S} \check{S}$ и $S \check{V} \check{V}$. В дальнейшем приводятся только вершины, для которых типовая форма конкретных вставок отличается от их аналога в обычном формализме. Отметим, что некоторые из вставок, возникающие для обычных вершин, здесь не имеют аналога и равны нулю. Приведем лишь отличные от нуля вставки.

- $V V \check{V} \check{V}$ вершина:

Вершина $V V \check{V} \check{V}$ имеет две типовые формы в зависимости от конкретных вставок, а именно,

$$V_{1,\mu} V_{2,\nu} \check{V}_{3,\rho} \check{V}_{4,\sigma} : ie^2 C \left[2g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} (1 - \xi^{-1}) - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} (1 - \xi^{-1}) \right] \quad (\text{II.32})$$

для вставок

$V_1 V_2 \check{V}_3 \check{V}_4$	$W^\pm W^\pm \check{W}^\mp \check{W}^\mp$	$Z Z \check{W}^+ \check{W}^-$	$A Z \check{W}^+ \check{W}^-$	$A A \check{W}^+ \check{W}^-$	
		$W^+ W^- \check{Z} \check{Z}$	$W^+ W^- \check{A} \check{Z}$	$W^+ W^- \check{A} \check{A}$	(II.33)
C	$\frac{1}{s^2}$	$-\frac{c^2}{s^2}$	$-\frac{c}{s}$	-1	

и

$$V_{1,\mu} V_{2,\nu} \check{V}_{3,\rho} \check{V}_{4,\sigma} : ie^2 C \left[2g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} (1 + \xi^{-1}) \right] \quad (\text{II.34})$$

для вставок

$V_1 V_2 \check{V}_3 \check{V}_4$	$W^+ W^- \check{W}^+ \check{W}^-$	$W^\pm Z \check{W}^\mp \check{Z}$	$W^\pm A \check{W}^\mp \check{Z}$	$W^\pm A \check{W}^\mp \check{A}$	
		$W^\pm Z \check{W}^\mp \check{A}$			(II.35)
C	$\frac{1}{s^2}$	$-\frac{c^2}{s^2}$	$-\frac{c}{s}$	-1	

- $V \check{V} \check{V}$ вершина:

$$V_{1,\mu}(k_1) \check{V}_{2,\nu}(k_2) \check{V}_{3,\rho}(k_3) : -ieC \left[g_{\nu\rho}(k_3 - k_2)_\mu + g_{\mu\nu}(k_2 - k_1 + \xi^{-1} k_3)_\rho + g_{\rho\mu}(k_1 - k_3 - \xi^{-1} k_2)_\nu \right] \quad (\text{II.36})$$

с вставками

$V_1 \check{V}_2 \check{V}_3$	$A \check{W}^+ \check{W}^-, W^+ \check{W}^- \check{A}, W^- \check{A} \check{W}^+$	$Z \check{W}^+ \check{W}^-, W^+ \check{W}^- \check{Z}, W^- \check{Z} \check{W}^+$	
C	1	$\frac{c}{s}$	(II.37)

- $SS\check{S}\check{S}$ вершина:

$$S_1 S_2 \check{S}_3 \check{S}_4 : ie^2 C \quad (\text{II.38})$$

с вставками

$S_1 S_2 \check{S}_3 \check{S}_4$	$HH\check{H}\check{H}$ $zz\check{z}\check{z}$	$HH\check{z}\check{z}$ $zz\check{H}\check{H}$	$Hz\check{H}\check{z}$
C	$-\frac{3}{4s^2} \frac{M_H^2}{M_W^2}$	$-\frac{1}{4s^2} \frac{M_H^2}{M_W^2} - \frac{\xi}{2c^2 s^2}$	$-\frac{1}{4s^2} \frac{M_H^2}{M_W^2} + \frac{\xi}{4c^2 s^2}$

$S_1 S_2 \check{S}_3 \check{S}_4$	$w^+ w^- \check{H}\check{H}, HH\check{w}^+ \check{w}^-$ $w^\pm z \check{w}^\mp \check{z}$	$w^\pm H \check{w}^\mp \check{H}$	$w^+ w^- \check{w}^+ \check{w}^-$ $w^+ w^- \check{z}\check{z}, zz\check{w}^+ \check{w}^-$
C	$-\frac{1}{4s^2} \frac{M_H^2}{M_W^2} + \frac{\xi}{4s^2}$	$-\frac{1}{2s^2} \frac{M_H^2}{M_W^2} - \frac{\xi}{4c^2 s^2}$	$-\frac{1}{4s^2} \frac{M_H^2}{M_W^2} - \frac{\xi}{2s^2}$

$S_1 S_2 \check{S}_3 \check{S}_4$	$w^\pm w^\pm \check{w}^\mp \check{w}^\mp$	$w^\pm H \check{w}^\mp \check{z}$ $w^\mp z \check{w}^\pm \check{H}$
C	$-\frac{1}{2s^2} \frac{M_H^2}{M_W^2} + \frac{\xi}{2c^2 s^2}$	$\mp \frac{i\xi}{4c^2}$

$$(\text{II.39})$$

- $S\check{S}\check{S}$ вершина:

$$S_1 \check{S}_2 \check{S}_3 : ieC \quad (\text{II.40})$$

с вставками

$S_1 \check{S}_2 \check{S}_3$	$H\check{H}\check{H}$	$H\check{z}\check{z}$	$z\check{H}\check{z}$	$H\check{w}^+ \check{w}^-$
C	$-\frac{3}{2s} \frac{M_H^2}{M_W}$	$-\frac{1}{2s} \frac{M_H^2}{M_W} - \xi \frac{M_W}{c^2 s}$	$-\frac{1}{2s} \frac{M_H^2}{M_W} + \xi \frac{M_W}{2c^2 s}$	$-\frac{1}{2s} \frac{M_H^2}{M_W} - \xi \frac{M_W}{s}$

$S_1 \check{S}_2 \check{S}_3$	$w^\pm \check{w}^\mp \check{H}$	$w^\pm \check{w}^\mp \check{z}$
C	$-\frac{1}{2s} \frac{M_H^2}{M_W} + \xi \frac{M_W}{2s}$	$\mp \xi \frac{isM_W}{2c^2}$

$$(\text{II.41})$$

- $V\check{V}S\check{S}$ вершина:

$$V_{1,\mu} \check{V}_{2,\nu} S_1 \check{S}_2 : ie^2 g_{\mu\nu} C \quad (\text{II.42})$$

с вставками

$V_1 \check{V}_2 S_1 \check{S}_2$	$Z\check{Z}H\check{H}$ $Z\check{Z}z\check{z}$	$W^\pm \check{W}^\mp H\check{H}$ $W^\pm \check{W}^\mp z\check{z}$	$W^\pm \check{W}^\mp w^\mp \check{w}^\pm$	$A\check{A}w^\pm \check{w}^\mp$	$Z\check{A}w^\pm \check{w}^\mp$ $A\check{Z}w^\pm \check{w}^\mp$
C	$\frac{1}{2c^2 s^2}$	$\frac{1}{2s^2}$	$\frac{1}{s^2}$	2	$\frac{c^2 - s^2}{cs}$

$V_1 \check{V}_2 S_1 \check{S}_2$	$Z\check{Z}w^\pm \check{w}^\mp$ $A\check{W}^\pm w^\mp \check{H}$	$W^\pm \check{A}H\check{w}^\mp$ $A\check{W}^\pm w^\mp \check{z}$	$W^\pm \check{A}z\check{w}^\mp$ $Z\check{W}^\pm H\check{w}^\mp$	$W^\pm \check{Z}w^\mp H$ $Z\check{W}^\pm z\check{w}^\mp$	$W^\pm \check{Z}w^\mp \check{z}$
C	$\frac{(c^2 - s^2)^2}{2c^2 s^2}$	$\mp \frac{i}{s}$	$\frac{1}{s}$	$\pm \frac{i}{2cs^2}$	$-\frac{1}{2cs^2}$

$V_1 \check{V}_2 S_1 \check{S}_2$	$W^\pm \check{Z} H \check{w}^\mp$	$W^\pm \check{Z} z \check{w}^\mp$	$W^\pm \check{W}^\mp z \check{H}$
	$Z \check{W}^\pm w^\mp \check{H}$	$Z \check{W}^\pm w^\mp \check{z}$	$W^\mp \check{W}^\pm H \check{z}$
C	$\mp i \frac{c^2 - s^2}{2cs^2}$	$\frac{c^2 - s^2}{2cs^2}$	$\pm \frac{i}{2s^2}$

(II.43)

- $\check{V}S\check{S}$ вершина:

$$\check{V}_\mu S_1(k_1) \check{S}_2(k_2) : ieC2k_{1,\mu} \quad (II.44)$$

с вставками

$\check{V}S_1\check{S}_2$	$\check{Z}z\check{H}$	$\check{Z}H\check{z}$	$\check{A}w^\pm\check{w}^\mp$	$\check{Z}w^\pm\check{w}^\mp$	$\check{W}^\pm w^\mp \check{H}$	$\check{W}^\pm H \check{w}^\mp$
C	$\frac{i}{2cs}$	$-\frac{i}{2cs}$	∓ 1	$\mp \frac{c^2 - s^2}{2cs}$	$-\frac{i}{2s}$	$\frac{i}{2s}$

$\check{V}S_1\check{S}_2$	$\check{W}^\pm w^\mp \check{z}$	$\check{W}^\pm z \check{w}^\mp$
C	$\mp \frac{1}{2s}$	$\pm \frac{1}{2s}$

(II.45)

- $\check{S}V\check{V}$ вершина:

$$\check{S}V_{1,\mu} \check{V}_{2,\nu} : ieg_{\mu\nu}C \quad (II.46)$$

с вставками

$\check{S}V_1\check{V}_2$	$\check{H}Z\check{Z}$	$\check{H}W^\pm\check{W}^\mp$	$\check{z}W^\pm\check{W}^\mp$	$\check{w}^\pm W^\mp \check{A}$	$\check{w}^\pm W^\mp \check{Z}$	$\check{w}^\pm Z \check{W}^\mp$
C	$\frac{1}{c^2s}M_W$	$\frac{1}{s}M_W$	$\mp \frac{i}{s}M_W$	$\pm 2iM_W$	$\pm i \frac{c^2 - s^2}{cs}M_W$	$\mp \frac{i}{cs}M_W$

(II.47)

(iv) **Духовые вершины.** В заключение приведем фейнмановские правила для вершин, содержащих духовые поля. Как и прежде, чисто квантовые вершины, необходимые лишь для многопетлевых вычислений, имеют обычные правила Фейнмана.

- $V\bar{\Theta}\Theta$ вершина:

$= ie(k_1 - k_2)_\mu C$

(II.48)

с вставками

$V\bar{\Theta}_1\Theta_2$	$A\bar{\theta}^\mp\theta^\pm, W^\pm\bar{\theta}^A\theta^\mp, W^\mp\bar{\theta}^\pm\theta^A$	$Z\bar{\theta}^\mp\theta^\pm, W^\pm\bar{\theta}^Z\theta^\mp, W^\mp\bar{\theta}^\pm\theta^Z$
C	± 1	$\pm \frac{c}{s}$

(II.49)

- $VV\bar{\Theta}\Theta$ вершина:

$$= ie^2 g_{\mu\nu} C \quad (\text{II.50})$$

с вставками

$V_1 V_2 \bar{\Theta}_1 \Theta_2$	$W^\pm W^\pm \bar{\theta}^\mp \theta^\mp$	$W^+ W^- \bar{\theta}^A \theta^A$ $AA \bar{\theta}^\mp \theta^\pm$	$W^+ W^- \bar{\theta}^A \theta^Z, AZ \bar{\theta}^\mp \theta^\pm$ $W^+ W^- \bar{\theta}^Z \theta^A$
C	$-\frac{2}{s^2}$	2	$\frac{2c}{s}$

$V_1 V_2 \bar{\Theta}_1 \Theta_2$	$W^+ W^- \bar{\theta}^Z \theta^Z$ $ZZ \bar{\theta}^\mp \theta^\pm$	$W^+ W^- \bar{\theta}^\mp \theta^\pm$	$AW^\pm \bar{\theta}^\mp \theta^A$ $AW^\pm \bar{\theta}^A \theta^\mp$
C	$\frac{2c^2}{s^2}$	$\frac{1}{s^2}$	-1

$V_1 V_2 \bar{\Theta}_1 \Theta_2$	$ZW^\pm \bar{\theta}^\mp \theta^A, AW^\pm \bar{\theta}^\mp \theta^Z$ $ZW^\pm \bar{\theta}^A \theta^\mp, AW^\pm \bar{\theta}^Z \theta^\mp$	$ZW^\pm \bar{\theta}^\mp \theta^Z$ $ZW^\pm \bar{\theta}^Z \theta^\mp$	(II.51)
C	$-\frac{c}{s}$	$-\frac{c^2}{s^2}$	

- $S\bar{\Theta}\Theta$ вершина:

$$= ieC\xi \quad (\text{II.52})$$

с вставками

$S\bar{\Theta}_1 \Theta_2$	$H\bar{\theta}^Z \theta^Z$	$H\bar{\theta}^\mp \theta^\pm$	$w^\pm \bar{\theta}^\mp \theta^A, w^\pm \bar{\theta}^A \theta^\mp$	$w^\pm \bar{\theta}^\mp \theta^Z, w^\pm \bar{\theta}^Z \theta^\mp$	(II.53)
C	$-\frac{1}{c^2 s} M_W$	$-\frac{1}{s} M_W$	$\mp i M_W$	$\mp \frac{is}{c} M_W$	

- $SS\bar{\Theta}\Theta$ вершина:

$$= ie^2 C \check{\xi} \quad (\text{II.54})$$

с вставками

$S_1 S_2 \bar{\Theta}_1 \Theta_2$	$HH\bar{\theta}^Z \theta^Z$ $zz\bar{\theta}^Z \theta^Z$	$HH\bar{\theta}^\mp \theta^\pm, w^+ w^- \bar{\theta}^\mp \theta^\pm$ $zz\bar{\theta}^\mp \theta^\pm$	$w^+ w^- \bar{\theta}^A \theta^A$	$w^+ w^- \bar{\theta}^A \theta^Z$ $w^+ w^- \bar{\theta}^Z \theta^A$
C	$-\frac{1}{2c^2 s^2}$	$-\frac{1}{2s^2}$	-2	$-\frac{c^2 - s^2}{cs}$

$S_1 S_2 \bar{\Theta}_1 \Theta_2$	$w^+ w^- \bar{\theta}^Z \theta^Z$	$Hw^\pm \bar{\theta}^\mp \theta^A$ $w^\pm H\bar{\theta}^A \theta^\mp$	$zw^\pm \bar{\theta}^\mp \theta^A$ $w^\pm z\bar{\theta}^A \theta^\mp$	$Hw^\pm \bar{\theta}^\mp \theta^Z$ $w^\pm H\bar{\theta}^Z \theta^\mp$	$zw^\pm \bar{\theta}^\mp \theta^Z$ $w^\pm z\bar{\theta}^Z \theta^\mp$
C	$-\frac{(c^2 - s^2)^2}{2c^2 s^2}$	$\mp \frac{i}{2s}$	$-\frac{1}{2s}$	$\mp \frac{i}{2c}$	$-\frac{1}{2c}$

$$(\text{II.55})$$

Упражнения

К разделу 1.1

1. Найти выражение для $(1/i)^3 \delta^4 W / \delta J^4$, рассмотреть его графически и убедиться, что оно дает связную четырехточечную функцию Грина. Завершить по индукции доказательство утверждения в тексте для n -точечной связной функции Грина (стр. 6).
2. Рассмотреть $\delta^4 \Gamma / \delta \bar{Q}^4$, представить графически соответствующее равенство и доказать справедливость утверждения в тексте для четырехточечной функции Грина. Доказать по индукции справедливость этого утверждения для произвольной n -точечной функции Грина (стр. 8).

К разделу 2.1

3. Выписать тождества Уорда МФП для трехточечной вершинной функции калибровочных бозонов $\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}$ и для трехточечной фермион-бозонной вершинной функции $\Gamma_{\mu A}^{aB}$, соответствующей вершине $B\bar{f}f$ (стр. 16).
4. Доказать тождество Уорда МФП, утверждающее о поперечности собственно-энергетической вершиной функции фоновых калибровочных бозонов $\Sigma_{\mu\nu}^{ab}$ (стр. 16).

К разделу 2.2

5. Вывести приведенные в приложении I правила Фейнмана в МФП для неабелевой калибровочной теории (стр. 17).

К разделу 2.3

6. Доказать соотношение $Z_g = Z_B^{-1/2}$ с помощью тождеств Уорда МФП для трехточечной вершинной функции калибровочных бозонов $\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}$ и для вершинной функции $\Gamma_{\mu}^{a\bar{f}f}$, соответствующей вершине $B\bar{f}f$ (стр. 19).
7. Найти расходящуюся часть собственно энергетической вершинной функции $\Sigma_{\mu\nu}^{ab}$ фоновых калибровочных бозонов (стр. 22).

К разделу 3.2

8. Вывести приведенные в приложении II правила Фейнмана в МФП для СМ электрослабых взаимодействий (стр. 30).
9. Посчитать однопетлевой процесс $Z \rightarrow b\bar{b}$ для произвольных значений $\check{\xi}$ и убедиться, что S-матричный элемент действительно не зависит от $\check{\xi}$ и совпадает с тем, который получается в обычном формализме (стр. 30).
10. Исследовать процесс $Z \rightarrow 3\gamma$ в однопетлевом приближении (стр. 30).

Замечание Следует отметить, что фиксирующий калибровку член, использованный в работе [12], нарушает фоновую калибровочную инвариантность, поскольку там не вводилось фонового хиггсовского поля. Это изменяет вершинные функции с внешними хиггсовскими полями. Однако, поскольку в рассматриваемый процесс подобные вершины вклада не дают, результат, полученный в этой работе, остается тем не менее в силе. Правила Фейнмана для вершин, содержащих в точности два квантовых фотона и не содержащих фоновых хиггсовских полей, даны в этой работе для специального случая $\check{\xi} = 1$. Полагая $\check{\xi} = 1$ в соответству-

ющих правилах Фейнмана, приведенных в приложении II, можно увидеть соответствие с [12], за исключением одного правила в таблице (II.51), отличающегося множителем 2.

11. Проверить в однопетлевом приближении в квантовой R_ξ -калибровке, что для четырехфермионных процессов МФП приводит к сокращению квантового калибровочного параметра в совокупности собственно энергетических и вершинных вкладов, а также отдельно для боксовых вкладов. Убедиться в нарушении такого сокращения при дайсоновском суммировании собственно-энергетических вкладов в пропагатор (стр. 31).

К разделу 3.3

12. Выписать тождества Уорда МФП для трехточечной вершинной функции $\Gamma_{\mu\rho\sigma}^{ZW^+W^-}$, а также для вершинных функций $\Gamma_{\mu\nu\rho\sigma}^{VVVV}$ с четырьмя калибровочными бозонами (стр. 34).

К разделу 3.4

13. Убедиться, что в МФП тождество Уорда (3.67) может быть получено не только исходя из вершинной функции $\Gamma_\mu^{A\bar{f}f}$ как в КЭД, но и с помощью неабелевой вершинной функции $\Gamma_{\mu\rho\sigma}^{AW^+W^-}$ (стр. 37).
14. Используя приведенные в приложении II коэффициенты C для связи различных полей с хиггсовским полем (в случае $t_H = 0$), показать сокращение калибровочного параметра в комбинации контрчленов массы и головастика $\delta M^2 - C\delta t_H/M_H^2$ (стр. 41).
15. Убедиться, что указанные в разделе соотношения между константами перенормировок являются в точности теми, которые требуются, чтобы оставить перенормированный классический лагранжиан \mathcal{L} калибровочно-инвариантным (стр. 42).
16. Убедиться в эквивалентности двух рассмотренных вариантов перенормировок СМ электрослабых взаимодействий в схеме на массовой поверхности. Показать, что константы перенормировок в этих вариантах могут быть связаны невырожденным преобразованием (стр. 43).

Список литературы

- [1] Ченг Т.-П., Ли Л.-Ф. Калибровочные теории в физике элементарных частиц — М.: Мир, 1987.
- [2] Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
- [3] Schwinger J. // *Phys. Rev.* **82** (1951) 664. (Имеется перевод в сборнике “Новейшее развитие квантовой электродинамики”, ред. Д. Д. Иваненко. М.: ИЛ, 1954, с. 254.)
- [4] Yang C.N. and Mills R.L. // *Phys. Rev.* **96** (1954) 191. (Имеется перевод в сборнике “Элементарные частицы и компенсирующие поля”, ред. Д.Д. Иваненко. М.: Мир, 1964, с. 28.)
- [5] DeWitt B.S. // *Phys. Rev.* **162** (1967) 1195;
Девитт Б.С. Динамическая теория групп и полей. — М.: Наука, 1987.
- [6] Hooft G. 't. *Nucl. Phys.* **B62** (1973) 444; *Acta Universitatis Wratislavenensis* **368** (1976) 345;
DeWitt B.S., in *Quantum Gravity 2*, ed. C.J. Isham, R. Penrose and D.W. Sciama (Oxford University Press, New York, 1981), p. 449;
Boulware D.G. // *Phys. Rev.* **D23** (1981) 389;
Hart C.F. // *Phys. Rev.* **D28** (1983) 1993.
- [7] Abbott L.F. // *Nucl. Phys.* **B185** (1981) 189; *Acta Phys. Pol.* **B13** (1982) 33.
- [8] Ichinose S. and Omote M. // *Nucl. Phys.* **B203** (1982) 221;
Capper D.M. and MacLean A. // *Nucl. Phys.* **B203** (1982) 413.
- [9] Hashimoto S., Kodaira J., Yasui Y. and Sasaki K. // *Phys. Rev.* **D50** (1994) 7066, hep-ph/9406271.
- [10] Weinberg S. // *Phys. Lett.* **91B** (1980) 51.
- [11] Abbott L.F., Grisaru M.T. and Schaefer R.K. // *Nucl. Phys.* **B229** (1983) 372;
Rebhan A. and Wirthumer G. // *Z. Phys. C – Part. and Fields* **28** (1985) 269;
McKeon G., Phillips S.B., Samant S.S. and Sherry T.N. // *Nucl. Phys.* **B267** (1986) 566.
- [12] Bern Z. and Morgan A.G. // *Phys. Rev.* **D49** (1994) 6155.
- [13] Denner A., Weiglein G. and Dittmaier S. // *Phys. Lett.* **B333** (1994) 420, hep-ph/9406204; *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **B37** (1994) 87, hep-ph/9406400; *Nucl. Phys.* **B440** (1995) 95, hep-ph/9410338; *Acta Phys. Polon.* **B27** (1996) 3645, hep-ph/9609422; in *Proc. of the Ringberg Workshop on Perspectives for Electroweak Interactions in e^+e^- Collisions*, Ringberg Castle, 1995, ed. B. Kniel, hep-ph/9505271.

- [14] Li X. and Liao Y. ASITP-94-50 (1994), hep-ph/9409401.
- [15] Coleman S. and Weinberg E. // *Phys. Rev.* **D7** (1973) 1888.
- [16] Gross D. in *Methods in field theory*, ed. C. R. Balian and J. Zinn-Justin (North Holland, Amsterdam, 1976).
- [17] Окунь Л.Б. Лептоны и кварки. — М.: Наука, 1981.
- [18] Shore G. // *Ann. Phys.* **137** (1981) 262;
Einhorn M.B. and Wudka J. // *Phys. Rev.* **D39** (1989) 2758.
- [19] Gavela M.B., Girardi G., Malleville C. and Sorba P. // *Nucl. Phys.* **B193** (1981) 257.
- [20] Böhm M., Hollik W. and Spiesberger H. // *Fortschr. Phys.* **34** (1986) 687.
- [21] Denner A. // *Fortschr. Phys.* **41** (1993) 307.
- [22] Lee B.W. // *Phys. Rev.* **D9** (1974) 933.
- [23] Kennedy D.C. and Lynn B.W. // *Nucl. Phys.* **B322** (1989) 1;
Kennedy D.C., Lynn B.W., Im C.J.-C. and Stuart R.G. // *Nucl. Phys.* **321** (1989) 83;
Kennedy D.C. In: *Proc. of the 1991 Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics*, eds. R.K. Ellis et al. (World Scientific, Singapore, 1992), p. 163.
- [24] Kuroda M., Moultaqa G. and Schildknecht D. // *Nucl. Phys.* **B350** (1991) 25.
- [25] Cornwall J.M. // *Phys. Rev.* **D26** (1982) 1453; In: *Proc. of the French-American Seminar on Theoretical Aspects of Quantum Chromodynamics*, ed. J.W. Dash (Centre de Physique Théorique, Report No. CPT-81/P-1345, Marseille, 1982);
Cornwall J.M. and Papavassiliou J. // *Phys. Rev.* **D40** (1989) 3474;
Papavassiliou J. // *Phys. Rev.* **D41** (1990) 3179; *Phys. Rev.* **D47** (1992) 4728;
Phys. Rev. **D51** (1995) 856, hep-ph/9410385;
Watson N.J. In: *Proc. of the Ringberg Workshop on Perspectives for Electroweak Interactions in e^+e^- Collisions*, Ringberg Castle, 1995, ed. B. Kniel, hep-ph/9506276;
Pilafsis A. // *Nucl. Phys.* **B487** (1997) 467, hep-ph/9607451.
- [26] Degrassi G. and Sirlin A. // *Phys. Rev.* **D46** (1992) 3104;
Degrassi G., Kniel B. and Sirlin A. *Phys. Rev.* **D48** (1993) 4255.
- [27] Consoli M. and Hollik W. In: *Z Physics at LEP1*, eds. G. Altarelli, R. Kleiss and C. Verzegnassi, CERN 89-08 (1989) p. 7.
- [28] Bauberger S., Berends F.A., Böhm M., Buza M. and Weiglein G. // *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **B37** (1994) 95, hep-ph/9406404.

Рукопись поступила 11 ноября 1998 г.

Содержание

Введение	1
1. Метод фонового поля	3
1.1. Эффективное действие	3
1.2. Эффективное действие в МФП	9
2. Неабелевы калибровочные теории	11
2.1. Калибровочно инвариантное эффективное действие	11
2.2. Правила Фейнмана в МФП	16
2.3. Перенормировки	17
2.4. Схема минимальных вычитаний	19
2.5. Вычисление β -функции	21
3. Теория электрослабых взаимодействий	23
3.1. Классический лагранжиан СМ электрослабых взаимодействий	23
3.2. Квантование СМ электрослабых взаимодействий в МФП	26
3.3. Тожества Уорда СМ электрослабых взаимодействий	31
3.4. Перенормировка СМ в схеме на массовой поверхности	35
3.5. Свойства вершинных функций СМ в МФП	43
3.6. Сравнение МФП с пинчевой техникой	46
Приложение	50
I. Правила Фейнмана неабелевой калибровочной теории в МФП	50
II. Правила Фейнмана СМ электрослабых взаимодействий в МФП	53
Упражнения	64
Список литературы	66

Ю.Ф.Пирогов.
Метод фонового поля в калибровочных теориях.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы \LaTeX .
Редактор Н.В.Ежела. Технический редактор Н.В.Орлова.

Подписано к печати 12.11.1998. Формат $60 \times 84/8$. Офсетная печать. Печ.л.
8,3. Уч.-изд.л. 5,4. Тираж 150. Заказ 327. Индекс 3649. ЛР № 020498 06.04.92.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

