ИФВЭ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 98–85
ОТФ

А.А. Логунов

О ПРЕЦЕССИИ ТОМАСА

Протвино 1998

УДК 539.1.01 М–24

Аннотация

Логунов А.А. О прецессии Томаса: Препринт ИФВЭ 98–85. – Протвино, 1998. – 6 с.

В работе дан элементарный вывод прецессии Томаса.

Abstract

Logunov A.A. On Tomas Precession: IHEP Preprint 98–85. – Protvino, 1998. – p. 6.

An elementary derivation of the Tomas precession is given in this paper.

Настоящая статья имеет методический интерес. Ее цель — показать элементарными вычислениями, что эффект прецессии Томаса является простым следствием псевдоевклидовой структуры пространства-времени при действии силы (без крутящего момента) на гироскоп. Суть теории относительности состоит в том, что все физические процессы протекают в четырехмерном пространстве-времени, геометрия которого псевдоевклидова.

Прежде чем описать прецессию Томаса, мы получим (для цельности изложения) общие преобразования Лоренца без вращений между двумя произвольными инерциальными системами отсчета. В пространстве Пуанкаре–Минковского в инерциальной системе координат возьмем декартовы (галилеевы) координаты. Пусть вектор $\vec{R}$ имеет координаты X, Y, Z, тогда интервал в пространстве Минковского можно записать в форме

$$ds^2 = c^2(dT)^2 - (d\vec{R})^2 = c^2(dT)^2 - (dX)^2 - (dY)^2 - (dZ)^2. \tag{1}$$

Перейдем к другой инерциальной системе координат с помощью общего преобразования Галилея

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{v}t, \quad t = T\ . \tag{2}$$

Выражение для интервала (1) в новых координатах принимает вид

$$ds^2 = c^2dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + 2(\vec{v}d\vec{r})dt - (d\vec{r})^2. \tag{3}$$

Введем обозначения

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{4}$$

Наша основная цель состоит в том, чтобы в новой инерциальной системе отсчета найти переменные $T', \vec{R}'$, в которых интервал (3) принимает форму

$$ds^2 = c^2(dT')^2 - (d\vec{R}')^2. \tag{5}$$

Для этой цели в интервале (3) выделим времениподобную и пространственноподобную части:

$$ds^2 = c^2 \left(\frac{1}{\gamma} dt + \frac{\gamma}{c^2} \vec{v} d\vec{r} \right)^2 - d\vec{r}^2 - \frac{\gamma^2}{c^2} (\vec{v} d\vec{r})^2. \tag{6}$$

На основании (6) мы можем ввести новое время

$$T' = \frac{1}{\gamma} t + \frac{\gamma}{c^2} (\vec{v} \vec{r}) \ . \tag{7}$$

При получении (7) из дифференциального выражения в первой скобке (6) мы положили постоянную интегрирования равной нулю, поскольку необходимо, чтобы при $\vec{v} = 0, \ \ T' = T$. Используя (2), перепишем (7) в форме

$$T' = \gamma \left(T + \frac{\vec{v} \vec{R}}{c^2} \right) \ . \tag{8}$$

Пространственноподобную часть интервала (6) также выразим через переменные исходной инерциальной системы $T, \vec{R}$

$$(d\vec{r})^2 + \frac{\gamma^2}{c^2} (\vec{v} d\vec{r})^2 = (d\vec{R})^2 + \frac{\gamma^2}{c^2} (\vec{v} d\vec{R})^2 + 2\gamma^2 (\vec{v} d\vec{R}) dT + \gamma^2 v^2 (dT)^2. \tag{9}$$

Легко убедиться в том, что первые два члена справа можно записать в виде квадрата некоторого вектора

$$(d\vec{R})^2 + \frac{\gamma^2}{c^2} (\vec{v} d\vec{R})^2 = [d\vec{R} + \frac{\gamma - 1}{v^2} \vec{v} (\vec{v} d\vec{R})]^2, \ \ v^2 = c^2 \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \ . \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9), имеем

$$(d\vec{r})^2 + \frac{\gamma^2}{c^2} (\vec{v} d\vec{r})^2 = [d\vec{R} + \frac{\gamma - 1}{v^2} \vec{v} (\vec{v} d\vec{R})]^2 + 2\gamma^2 (\vec{v} d\vec{R}) dT + \gamma^2 v^2 (dT)^2, \tag{11}$$

но правая часть равенства (11) есть квадрат некоторого вектора

$$(d\vec{r})^2 + \frac{\gamma^2}{c^2} (\vec{v} d\vec{r})^2 = [d\vec{R} + \frac{\gamma - 1}{v^2} \vec{v} (\vec{v} d\vec{R}) + \gamma \vec{v} dT]^2. \tag{12}$$

Таким образом мы можем ввести вектор $\vec{R}'$

$$\vec{R}' = \vec{R} + \frac{(\gamma - 1)}{v^2} \vec{v} (\vec{v} \vec{R}) + \gamma \vec{v} T \ . \tag{13}$$

Здесь также при получении (13) из дифференциального выражения мы положили постоянную интегрирования равной нулю, поскольку необходимо, чтобы при $\vec{v} = 0, \ \ R' = R$.

С помощью (8) и (13) интервал (6) принимает вид

$$ds^2 = c^2(dT')^2 - (d\vec{R}')^2. \tag{14}$$

Заметим, что проекции вектора $\vec{R}'$ вычислены на координатные оси исходной нештрихованной системы координат, поэтому они и выражены через проекции векторов $\vec{R}$ и $\vec{v}$ на эти же оси. Такие преобразования Лоренца называют общими преобразованиями без вращения. Они не образуют группы. Общие преобразования Лоренца без вращений только вместе с пространственными вращениями образуют группу. Выше мы получили общие преобразования Лоренца без вращений с помощью формальных преобразований.

Для освещения сути полученных формул (7) и (13) разложим векторы по направлению скорости $\vec{v}$ и по направлению $\vec{n}$, перпендикулярному скорости $\vec{v}$,

$$\vec{R}' = X'_{\parallel}\frac{\vec{v}}{v} + X'_{\perp}\vec{n},\ ; \vec{R} = X_{\parallel}\frac{\vec{v}}{v} + X_{\perp}\vec{n},\ \ (\vec{n}\vec{v}) = 0\ . \tag{15}$$

Подставляя эти выражения в формулы (7) и (13), получаем

$$T' = \gamma\left(T + \frac{v}{c^2}X_{\parallel}\right),\ \ X'_{\parallel} = \gamma(X_{\parallel} + vT),\ \ X'_{\perp} = X_{\perp}\ , \tag{16}$$

т.е. мы пришли к обычным преобразованиям Лоренца, согласно которым происходит сокращение Лоренца длины вдоль направления движения и ее неизменности в направлении, перпендикулярном к направлению движения. После подготовки необходимых сведений мы можем перейти к описанию прецессии Томаса.

Четырехвектор спина частицы S^{ν} имеет в системе покоя частицы компоненты $0, \vec{J}$. В любой произвольной инерциальной системе координат имеет место соотношение

$$S^{\nu}U_{\nu} = 0\ .$$

При действии на частицу силы $\vec{F}$ без крутящего момента должно иметь место ковариантное соотношение

$$\frac{dS^{\nu}}{d\tau} = ZU^{\nu}. \tag{17}$$

Здесь τ — собственное время; U^{ν} — четырехскорость частицы;

$$d\tau = dt\frac{1}{\gamma}\ .$$

Если скорость U^i не равна нулю, то величину Z можно определить из соотношения

$$\frac{d}{d\tau}(S^{\nu}U_{\nu}) = \frac{dS^{\nu}}{d\tau}U_{\nu} + \frac{dU_{\nu}}{d\tau}S^{\nu} = 0\ . \tag{18}$$

Подставляя (17) в (18), получаем

$$Z = -\left(S_{\mu}\frac{dU^{\mu}}{d\tau}\right)\ . \tag{19}$$

Вектор S_μ имеет компоненты

$$S_\mu = (S^0, -S^1, -S^2, -S^3)\ . \tag{20}$$

С учетом (19) уравнение (17) принимает вид

$$\frac{dS^\nu}{d\tau} = -\left(S_\mu \frac{dU^\mu}{d\tau}\right) U^\nu. \tag{21}$$

Пусть в лабораторной инерциальной системе отсчета частица со спином $\vec{J}$ движется со скоростью $\vec{v}$. В этом случае инерциальная лабораторная система отсчета относительно инерциальной системы, в которой частица покоится, будет двигаться со скоростью $-\vec{v}$. Используя формулы (8) и (13), найдем компоненты спина S^ν в лабораторной системе:

$$S^0 = \gamma \frac{(\vec{v}\vec{J})}{c}\ ,\quad \vec{S} = \vec{J} + \frac{\gamma - 1}{v^2}\vec{v}(\vec{v}\vec{J})\ . \tag{22}$$

Четырехмерные векторы U^μ, $\frac{dU^\mu}{d\tau}$ имеют следующие компоненты:

$$U^\mu = \left(\gamma, \gamma\frac{\vec{v}}{c}\right),\quad \frac{dU^\mu}{d\tau} = \left(\frac{d\gamma}{d\tau},\ \ \frac{\gamma}{c}\frac{d\vec{v}}{d\tau} + \frac{\vec{v}}{c}\frac{d\gamma}{d\tau}\right)\ . \tag{23}$$

Используя (20), (22) и (23), получаем

$$\left(S_\mu \frac{dU^\mu}{d\tau}\right) = \gamma\frac{(\vec{v}\vec{J})}{c}\frac{d\gamma}{d\tau} - \left(\frac{\gamma}{c}\frac{d\vec{v}}{d\tau} + \frac{\vec{v}}{c}\frac{d\gamma}{d\tau}\right)\left(\vec{J} + \frac{\gamma-1}{v^2}\vec{v}(\vec{v}\vec{J})\right)\ . \tag{24}$$

При вычислении в правой части выражения (24) останутся только члены, полученные путем умножения первого члена в скобке на два члена во второй скобке, все остальные члены взаимно уничтожаются

$$\left(S_\mu \frac{dU^\mu}{d\tau}\right) = -\frac{\gamma}{c}\left\{\left(\vec{J}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right) + \frac{\gamma-1}{v^2}\left(\vec{v}\vec{J}\right)\left(\vec{v}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right)\right\}\ . \tag{25}$$

Используя (22) и (25), запишем уравнение (21) отдельно для нулевой компоненты четырехмерного вектора спина S^ν и для его векторной части

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\gamma(\vec{v}\vec{J})\right\} = \gamma^2\left\{\left(\vec{J}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right) + \frac{\gamma-1}{v^2}\left(\vec{v}\vec{J}\right)\left(\vec{v}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right)\right\}, \tag{26}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\vec{J} + \frac{\gamma-1}{v^2}\vec{v}\left(\vec{v}\vec{J}\right)\right\} = \frac{\gamma^2}{c^2}\vec{v}\left\{\left(\vec{J}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right) + \frac{\gamma-1}{v^2}\left(\vec{v}\vec{J}\right)\left(\vec{v}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right)\right\}. \tag{27}$$

Из уравнений (26) и (27) находим

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\vec{J} + \frac{\gamma-1}{v^2}\vec{v}\left(\vec{v}\vec{J}\right)\right\} - \frac{\vec{v}}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left\{\gamma\left(\vec{v}\vec{J}\right)\right\} = 0\ . \tag{28}$$

Из уравнений (26) найдем

$$\gamma^2 \frac{\gamma - 1}{v^2} \left(\vec{v}\vec{J}\right) \left(\vec{v}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right) = \frac{d}{d\tau} \left\{\gamma \left(\vec{v}\vec{J}\right)\right\} - \gamma^2 \left(\vec{J}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right) \ . \tag{29}$$

Запишем первый член уравнения (28) в развернутой форме:

$$\frac{d\vec{J}}{d\tau} + \frac{\gamma^4}{c^4(1+\gamma)^2}\vec{v}\left(\vec{v}\vec{J}\right)\left(\vec{v}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right) + \frac{\gamma\vec{v}}{c^2(1+\gamma)}\frac{d}{d\tau}\left\{\gamma(\vec{v}\vec{J})\right\} + \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}\left(\vec{v}\vec{J}\right)\frac{d\vec{v}}{d\tau} \ . \tag{30}$$

При вычислении были учтены равенства

$$\frac{\gamma - 1}{v^2} = \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)} \ , \ \ \frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{\gamma^3}{c^2}\left(\vec{v}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right) \ . \tag{31}$$

Второй член в выражении (30) можно преобразовать, используя уравнение (29). После этого второй и третий члены вместе приводятся к виду

$$\frac{\vec{v}}{c^2}\frac{d}{d\tau}\left\{\gamma(\vec{v}\vec{J})\right\} - \frac{\gamma^2\vec{v}}{c^2(1+\gamma)}\left(\vec{J}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right) \ . \tag{32}$$

С учетом (30) и (32) уравнение (28) принимает вид

$$\frac{d\vec{J}}{d\tau} + \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}\left\{\frac{d\vec{v}}{d\tau}(\vec{v}\vec{J}) - \vec{v}\left(\vec{J}\frac{d\vec{v}}{d\tau}\right)\right\} = 0 \ . \tag{33}$$

Используя формулу

$$[\vec{a}\ [\vec{b}\ \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}\,) - \ \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) \ ,$$

и выбирая векторы

$$\vec{a} = \vec{J}, \ \ \vec{b} = \frac{d\vec{v}}{d\tau}, \ \ \vec{c} = \vec{v} \ ,$$

уравнение (33) можно записать в форме

$$\frac{d\vec{J}}{d\tau} = [\vec{\Omega} \times \vec{J}], \ \ \vec{\Omega} = -\frac{\gamma - 1}{v^2}\left[\vec{v} \times \frac{d\vec{v}}{d\tau}\right] \ . \tag{34}$$

Вектор спина $\vec{J}$ прецессирует вокруг направления $\vec{\Omega}$ с угловой скоростью $|\vec{\Omega}|$. Этот эффект впервые был открыт Томасом.

Уравнение релятивистской механики можно записать в форме

$$m\frac{d\vec{v}}{d\tau} = \vec{F} - \frac{\vec{v}}{c^2}(\vec{v}\vec{F}) \ . \tag{35}$$

Из (34) и (35) следует, что

$$\vec{\Omega} = -\frac{\gamma - 1}{mv^2}[\vec{v} \times \vec{F}] \ .$$

Таким образом, сила без крутящего момента в силу псевдоевклидовой структуры пространства-времени вызывает прецессию спина, если ее действие приводит к криволинейному движению в данной инерциальной системе отсчета. В том случае, когда сила направлена, в некоторой инерциальной системе отсчета, по направлению скорости частицы прецессия спина отсутствует. Но параллельность векторов силы $\vec{F}$ и скорости $\vec{v}$ нарушается даже при галилеевых преобразованиях, не говоря уже о лоренцевских преобразованиях от одной инерциальной системы отсчета к другой. Поэтому эффект прецессии, равный нулю, для наблюдателя в одной инерциальной системе отсчета будет отличен от нуля для наблюдателя, находящегося в некоторой другой инерциальной системе отсчета. Является ли это обстоятельство неравноправностью инерциальных систем отсчета? Конечно нет. Все дело в том, что самой постановкой физической задачи мы уже фиксировали класс инерциальных систем отсчета тем, что направили действие силы $\vec{F}$ вдоль направления скорости движения частицы. Равноправность инерциальных систем отсчета имела место до момента выбора инерциальной системы, в которой мы приложили силу $\vec{F}$ и направили ее вдоль скорости частицы. Все это в какой-то степени напоминает ситуацию с электрическим и магнитным полями.

Если в некоторой инерциальной системе отсчета электрический заряд покоится, то для наблюдателя в этой системе отсчета существует только электрическое поле, тогда как для наблюдателя, находящегося в другой инерциальной системе отсчета наряду с электрическим полем будет существовать и магнитное поле. Является ли это признаком неравноправности инерциальных систем отсчета? Совершенно очевидно, что нет. Это объясняется тем, что самой постановкой физической задачи мы уже фиксировали определенную инерциальную систему отсчета, поместив в нее покоящийся электрический заряд. Равноправность инерциальных систем отсчета имела место до момента выбора той инерциальной системы отсчета, в которой мы поместили покоящийся заряд.

Автор выражает благодарность С.С. Герштейну и А.А.Тяпкину за ценные обсуждения.

Рукопись поступила 11 декабря 1998 г.

А.А. Логунов.
О прецессии Томаса.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы LaTeX.
Редактор Н.В.Ежела. Технический редактор Н.В.Орлова.

Подписано к печати 11.12.98. Формат $60 \times 84/8$. Офсетная печать.
Печ.л. 0,7. Уч.-изд.л. 0,57. Тираж 120. Заказ 323. Индекс 3649
ЛР №020498 17.04.97.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 98–85, И Ф В Э, 1998