



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 99–11

ОУ У-70

П.Т. Пашков

**ВОЗДЕЙСТВИЕ СИСТЕМЫ АВТОПОДСТРОЙКИ
ЧАСТОТЫ УСКОРЯЮЩЕГО НАПРЯЖЕНИЯ
НА КВАДРУПОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ
ПУЧКА ПРОТОНОВ**

Протвино 1999

Аннотация

Пашков П.Т. Воздействие системы автоподстройки частоты ускоряющего напряжения на квадрупольные колебания пучка протонов: Препринт ИФВЭ 99–11. – Протвино, 1999. – 13 с., 5 рис., библиогр.: 3.

Дан анализ воздействия системы автоподстройки частоты ускоряющего напряжения на квадрупольные колебания сгустков частиц. Известно, что в отсутствие чувствительности системы к форме сгустков, она вносит затухание в квадрупольные колебания. Рассчитаны соответствующие декременты для случая ускорителя ИФВЭ; они относительно невелики, в особенности если энергия пучка выше критической. Исследован также случай системы автоподстройки частоты, чувствительной к квадрупольным колебаниям сгустков; рассчитаны инкременты, приводится соответствующий графический материал. На основе численного интегрирования уравнения фазовых колебаний определены пределы применимости формул, полученных с использованием метода вторых моментов.

Abstract

Pashkov P.T. Influence of BCS over Quadrupole Oscillations: IHEP Preprint 99–11. – Protvino, 1999. – p. 13, figs. 5, refs.: 3.

Analysis of the beam-control system influence over quadrupole oscillations in the beam in the IHEP PS is given. If the system is not sensitive to bunch shape it suppresses quadrupole oscillations in the beam. The decrements calculated for that case are rather small especially if the beam is above transition energy. The contrary case of the system which is sensitive to quadrupole oscillations in the beam has been also investigated. The increments for the oscillations have been calculated and graphic data are presented. The limits of accuracy of the data obtained by the second moments method have been found in consequence of numerical integration of the phase equation.

Введение

Система автоматической подстройки частоты ускоряющего напряжения предназначена в основном для подавления синфазных дипольных колебаний в пучке протонов, которые могут возникать как в результате действия на процесс ускорения частиц различного рода возмущений, так и из-за изменения параметров протонного синхротрона в течение ускорительного цикла. Она также обеспечивает возможность ускорения частиц на постоянном радиусе. Оказалось, что кроме подавления синфазных дипольных колебаний данная система, как выяснено в работе [1], может воздействовать и на квадрупольные колебания сгустков частиц, что обусловлено нелинейностью внешнего ускоряющего поля. В работе [1], в частности, было показано, что в отсутствие зависимости сигналов, вырабатываемых системой, от формы сгустков, она препятствует возникновению синфазных квадрупольных колебаний в пучке. При наличии же чувствительности системы к форме сгустков может иметь место как раскачка, так и затухание квадрупольных колебаний, в зависимости от фазового сдвига сигнала на удвоенной частоте фазовых колебаний в системе автоподстройки частоты.

В работе [1] для анализа воздействия системы автоподстройки частоты ускоряющего напряжения на квадрупольные колебания сгустков частиц использовался метод вторых моментов, который с математической точки зрения относительно прост и достаточно эффективен, однако строго говоря, он применим только в случае достаточно коротких сгустков частиц. В работе [2] содержится сравнительный анализ двух математических методов — вторых моментов и кинетического уравнения, применённых для решения данной задачи. Дополнительно к тому, что даёт метод вторых моментов, кинетическое уравнение позволяет учесть влияние на процесс раскачки квадрупольных колебаний разброса синхротронных частот в пучке и вида функции распределения частиц в фазовом пространстве.

В настоящей работе анализируется воздействие системы автоподстройки частоты на квадрупольные колебания сгустков частиц в протонном синхротроне ИФВЭ (У-70). Выяснено, что качественный характер данного воздействия существенным

образом зависит от способа обработки сигнала от пучка в цепи фазового контура системы. В начальной части работы рассматривается идеальный случай, когда отсутствует зависимость сигналов, вырабатываемых системой, от формы сгустков. Полученные данные согласуются с аналогичными результатами работ [1, 2]. Далее анализируется случай фазового контура, чувствительного к форме сгустков. Показано, что при существовавшем до настоящего времени способе обработки сигнала от пучка в цепи фазового контура в У-70 могла иметь место раскачка квадрупольных колебаний. Приводятся формула для инкремента раскачки, а также полученный с её помощью графический материал.

Анализ воздействия системы автоподстройки на квадрупольные колебания в пучке в первых двух разделах ведётся с использованием метода вторых моментов. Для определения пределов применимости полученных формул было проведено непосредственное интегрирование исходных нелинейных уравнений движения. Обсуждение результатов численного счёта содержится в последнем разделе работы.

Методика расчёта, описанная в настоящей работе, может быть использована при выборе способа подавления синфазных квадрупольных колебаний сгустков частиц в У-70, а также для оптимизации параметров выбранной схемы.

1. Затухание квадрупольных колебаний сгустков частиц при идеальной работе системы

Рассмотрим пучок, состоящий из q одинаковых сгустков частиц (q — кратность ускорения). Уравнение фазовых колебаний частиц в пучке может быть записано в виде следующей системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d\Delta p}{dt} = \frac{eV}{2\pi R_0}(\cos \varphi - \cos \varphi_s); \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{q}{m_0 R_0} \frac{\eta}{\gamma} \Delta p + \Delta\omega_{RF}, \quad (2)$$

где $\Delta p = p - p_s$ — отклонение импульса частицы p от синхронного значения $p = p_s$; e , m_0 — соответственно заряд и масса покоя протона; φ — фаза частицы, отсчитываемая относительно максимума ускоряющего напряжения; φ_s — синхронная фаза; V — амплитуда ускоряющего напряжения; R_0 — средний радиус, на котором происходит ускорение частиц; γ — релятивистский фактор; $\eta = 1/\gamma_{tr}^2 - 1/\gamma^2$, γ_{tr} — критическая энергия ускорителя в единицах энергии покоя частицы; $\Delta\omega_{RF}$ — поправка к частоте ускоряющего напряжения ω_{RF} , вырабатываемая системой автоматической подстройки частоты в зависимости от положения центра тяжести пучка относительно фазы ускоряющего напряжения и заданного среднего радиуса R_0 .

Будем считать, что изменение параметров фазового движения, содержащихся в правых частях уравнений (1), (2), происходит медленно по сравнению с периодом синхротронных колебаний. Последнее предположение справедливо практически для всего цикла ускорения, исключение составляет лишь короткий промежуток времени,

в течение которого пучок пересекает район критической энергии, который здесь не рассматривается. Удобно в таком случае перейти от переменных $(\varphi, \Delta p)$ к новым переменным (x, y) , в которых в линейном приближении фазовые траектории частиц являются окружностями:

$$\begin{aligned} x &= \varphi - \varphi_s; \\ y &= \frac{|\eta|\omega_{RF}}{\Omega_0} \frac{\Delta p}{p_s}, \end{aligned}$$

где Ω_0 — частота малых фазовых колебаний,

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{q\eta eV \sin \varphi_s}{2\pi m_0 \gamma R_0^2}}. \quad (3)$$

На большей части цикла ускорения можно считать фазовые колебания частиц относительно синхронной фазы малыми — $|x| \ll 1$. При этом уравнения (1), (2) преобразуются к виду:

$$\dot{y} = ax + bx^2; \quad (4)$$

$$\dot{x} = -ay + \Delta\omega_{RF}, \quad (5)$$

в которых коэффициент a , равный по абсолютной величине частоте Ω_0 , положителен ниже критической энергии и отрицателен при $\gamma > \gamma_{tr}$. Отметим также, что при переходе от уравнения (1) к (4) удержан член, квадратичный по x , получающийся при разложении $\cos \varphi$ в ряд вблизи точки $\varphi = \varphi_s$, причём коэффициент $b = (a/2) \cot \varphi_s$. Именно посредством данного силового члена система обратной связи (точнее, её фазовый контур) может влиять на колебания формы сгустков, как было показано в работе [1].

Уравнения движения центра тяжести пучка получаются из уравнений (4), (5). Представив координаты (x, y) в виде $x = \bar{x} + \Delta x$ и $y = \bar{y} + \Delta y$, где через (\bar{x}, \bar{y}) обозначены координаты центра тяжести пучка, имеем после усреднения уравнений (4), (5) по распределению частиц в сгустках следующую систему дифференциальных уравнений для координат (\bar{x}, \bar{y}) :

$$\dot{\bar{y}} = a\bar{x} + b(\bar{x}^2 + \overline{(\Delta x)^2}); \quad (6)$$

$$\dot{\bar{x}} = -a\bar{y} + \Delta\omega_{RF}(\bar{x}, \bar{y}), \quad (7)$$

и уравнения движения частиц относительно центра тяжести пучка:

$$\frac{d}{dt}\Delta y = a\Delta x + 2b\bar{x}\Delta x; \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta x = -a\Delta y. \quad (9)$$

В качестве поправки к частоте $\Delta\omega_{RF}$ будем использовать линейную функцию от координат центра тяжести пучка

$$\Delta\omega_{RF} = -k_x\bar{x} - k_y\bar{y}, \quad (10)$$

где коэффициенты k_x и k_y пропорциональны коэффициентам усиления в цепях фазового и радиального контуров соответственно. Для затухания колебаний центра тяжести пучка необходимо иметь $k_x > 0$ и $\kappa = 1 + k_y/a > 0$, что нетрудно показать, проанализировав решения системы уравнений (6), (7) без учёта квадрупольных колебаний (формально полагая $b = 0$). Так как обычно $k_x, |k_y| \gg \Omega_0$, знак k_y должен совпадать со знаком коэффициента a — он должен изменяться с положительного на отрицательный в момент перехода пучка через критическую энергию.

Воздействие системы автоматической подстройки частоты на квадрупольные колебания сгустков частиц обусловлено, как уже отмечалось, нелинейностью ускоряющего поля. Поскольку в правой части уравнения (6) содержится силовой член, пропорциональный $(\Delta x)^2$, то одновременно с квадрупольными колебаниями должны также происходить дипольные колебания сгустков частиц с частотой $\omega = 2\Omega_0$. Колебания же центра тяжести пучка, в свою очередь, воздействуют на положение отдельных частиц относительно центров тяжести сгустков, что следует из уравнения (8). При этом второй член в правой части данного уравнения изменяется с частотой $\omega = 2\Omega_0$ и может при наличии обратной связи приводить либо к раскачке, либо к затуханию квадрупольных колебаний в зависимости от фазового сдвига между \bar{x} и $(\Delta x)^2$.

Рассмотрим вначале простейший случай, когда реакция радиального и фазового датчиков на форму сгустков отсутствует. Коротко очертим здесь основы метода вторых моментов, используемого ниже для решения поставленной задачи. С помощью переменных Δx и Δy образуем следующие комбинации:

$$\begin{aligned} u &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2; \\ v &= (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2; \\ w &= 2\Delta x \Delta y. \end{aligned} \tag{11}$$

Используя затем уравнения (8), (9), получаем систему из трёх обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно вторых моментов. Данная система уравнений после усреднения переменных u , v и w по распределению частиц в сгустках и отбрасывания членов третьего порядка малости — комбинаций типа $(\Delta x)^2 \Delta x$ с последующей линеаризацией правых частей уравнений по считающимся малыми величинам \bar{x} , \bar{y} , \bar{v} , \bar{w} , принимает окончательный вид:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{u}} &= u_0 = \text{const}; \\ \dot{\bar{v}} &= -2a\bar{w}; \\ \dot{\bar{w}} &= 2a\bar{v} + 2bu_0\bar{x}. \end{aligned} \tag{12}$$

Необходимо теперь найти связь между смещением центра тяжести пучка по фазе \bar{x} и средним значением второго момента \bar{v} , являющимся количественной характеристикой квадрупольных колебаний сгустков, который равен нулю в случае сгустка, имеющего форму круга на плоскости (x, y) , а при наличии квадрупольных колебаний изменяющего знак с отрицательного на положительный в момент

перехода длины сгустка через равновесное значение, если его длина уменьшается, и, наоборот, — с положительного на отрицательный при увеличивающейся длине сгустка. С этой целью воспользуемся системой уравнений (6), (7) с учётом формулы (10) для $\Delta\omega_{RF}$. Пренебрегая нелинейностью фазового движения — отбрасывая в правой части уравнения (6) член $b\bar{x}^2$ — и заменяя $\overline{(\Delta x)^2}$ выражением $\overline{(\Delta x)^2} \simeq (u_0 + \bar{v})/2$, которое следует из формул (11), а затем отбрасывая в (6) постоянный член $bu_0/2$, не влияющий на устойчивость квадрупольных колебаний, имеем следующее дифференциальное уравнение для фазы центра тяжести сгустков:

$$\ddot{\bar{x}} + k_x \dot{\bar{x}} + \kappa\Omega_0^2 \bar{x} = -\frac{1}{2}\kappa ab\bar{v}. \quad (13)$$

Полагая далее $\bar{x}, \bar{v} \sim \exp(-i\omega t)$, получаем, с учётом системы уравнений (12), следующее характеристическое уравнение:

$$(\omega^2 - 4\Omega_0^2)(\omega^2 + ik_x\omega - \kappa\Omega^2) = \frac{1}{2}\kappa ab^2. \quad (14)$$

Отсюда, в частности, видно, что при линейном ускоряющем поле ($b = 0$) полученное уравнение четвёртого порядка относительно частоты ω распадается на два независимых квадратных уравнения. При этом одно из них, имеющее корни $\omega = \pm 2\Omega_0$, показывает, что в пучке могут происходить квадрупольные колебания с амплитудой, зависящей от начальных условий. Из второго же квадратного уравнения можно найти частоты ω (вообще говоря, комплексные), описывающие воздействие системы автоподстройки частоты на дипольные колебания сгустков.

Процесс ускорения в протонном синхротроне может, однако, происходить лишь при $\cos\varphi_s \neq 0$. При этом правая часть уравнения (14) оказывается отличной от нуля, и для нахождения частот ω следовало бы искать решения алгебраического уравнения четвёртого порядка. Нетрудно, однако, показать, что в рассматриваемом здесь случае дипольные и квадрупольные колебания сгустков частиц связаны чрезвычайно слабо. Из анализа уравнения (14) следует, что это имеет место при условии $u_0 \cot^2\varphi_s \ll 8$, что на практике обычно выполняется с хорошей точностью. Поэтому интересующее нас решение для частоты ω можно найти, предположив, что оно мало отличается от $\omega = 2\Omega_0$, имевшего место в случае $b = 0$. В результате имеем

$$\omega \simeq 2\Omega_0 \left(1 + \frac{1}{16}\lambda u_0 \cot\varphi_s\right), \quad (15)$$

где комплексный коэффициент λ равен

$$\lambda = \frac{\kappa \cot\varphi_s}{4 + 2ik_x/\Omega_0 - \kappa}. \quad (16)$$

Таким образом, $Re\omega \simeq 2\Omega_0$, а мнимая часть частоты ω даётся в практически интересном случае $k_x, |k_y| \gg 1$ соотношением

$$Im\omega = -\frac{1}{4}u_0\Omega_0 \cot^2\varphi_s \frac{|k_y|k_x}{k_y^2 + 4k_x^2}. \quad (17)$$

Из формулы (17) следует, что $Im\omega < 0$ при любых значениях входящих в неё параметров, так как $\cot\varphi_s$ входит в формулу в квадрате, а коэффициент k_y — через его абсолютную величину. Данный результат согласуется, естественно, с упоминавшимся выше выводом работы [1] — при идеальной работе системы автоподстройки частоты ускоряющего напряжения она обеспечивает затухание квадрупольных колебаний сгустков на протяжении всего цикла ускорения. Максимальное затухание квадрупольных колебаний, как легко видеть, имеет место при $|k_y| = 2k_x$, а соответствующий декремент равен

$$Im\omega = -\frac{1}{16}u_0\Omega_0 \cot^2\varphi_s. \quad (18)$$

Чтобы прояснить количественную сторону рассматриваемого вопроса, рассчитаем в качестве примера декремент затухания квадрупольных колебаний сгустков частиц, даваемый формулой (17), для случая У-70. С этой целью воспользуемся средними значениями коэффициентов усиления k_x и k_R в цепях фазового и радиального контуров соответственно, которые на частоте среза 20 Гц примерно можно положить равными $k_x/2\pi \simeq 10^7$ с⁻¹, $k_R/2\pi \simeq 4 \cdot 10^8$ м⁻¹с⁻¹, а с ростом частоты их величины спадают на 6 дБ за октаву в рабочем частотном диапазоне системы. Зная k_R , нетрудно рассчитать коэффициент k_y , воспользовавшись равенством: $k_R\Delta R = k_y\bar{y}$, где ΔR — смещение пучка относительно радиуса, на котором происходит его ускорение. Полагая $\Delta R = \bar{D}\Delta p/p$ ($\bar{D} \simeq R_0/\gamma_{tr}^2$ — среднее значение дисперсионной функции ускорителя), а также используя приведенное в предыдущем разделе определение переменной y , получаем

$$|k_y| \simeq \frac{\Omega_0 R_0}{\omega_{RF}} \frac{\gamma^2}{|\gamma^2 - \gamma_{tr}^2|} k_R. \quad (19)$$

Практически во все формулы для $Im\omega$ коэффициенты k_x и $|k_y|$ входят в виде отношения $|k_y|/k_x$, определяющего наряду с другими параметрами величины декрементов. Данное отношение, рассчитанное с учётом формулы (19), применительно к параметрам ускорителя — с использованием значений коэффициентов k_x и k_R , приведенных выше, представлено на рис. 1. По оси абсцисс отложена разность энергий $E - E_i$ (E_i — энергия инжекции), нормированная на значение критической энергии ускорителя E_{tr} .

При вычислении декремента затухания $Im\omega$ с помощью формулы (17) использовались значения отношений $|k_y|/k_x$, приведенные на рис. 1; величина $\cos\varphi_s$ считалась постоянной и бралась равной 0.35; в качестве u_0 использовалось его выражение для фазовой плотности $f(r)$, изменяющейся в зависимости от амплитуды синхронных колебаний $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ по закону — $f(r) \sim x_{max}^2 - r^2$, равное $u_0 \simeq x_{max}^2/3$ (x_{max} — фазовый полуразмер сгустков); инвариантный продольный фазовый объём сгустков $S = \oint \Delta p dx$ полагался при расчёте равным 42 МэВ/с (c — скорость света), что при инжекции соответствует длительности сгустков, равной ~ 100 нс.

Результаты такого расчёта даются на рис. 2, где показано изменение декремента затухания квадрупольных колебаний сгустков частиц при $E < E_{tr}$. Видно, что

величина декремента получается довольно значительной ($\sim 30 \text{ с}^{-1}$ на начальном участке ускорительного цикла (при $E \simeq E_i$)). Здесь, однако, следует отметить, что данный результат может оказаться существенно завышенным, как будет ясно из дальнейшего, так как основное условие применимости метода вторых моментов — малость длин сгустков, здесь не выполняется. С ростом энергии величина декремента быстро уменьшается, несмотря на быстрое увеличение отношения $|k_y|/k_x$ на данном участке (см. рис. 1). Последнее обстоятельство, согласно формуле (17), связано с адиабатическим затуханием фазовых колебаний и монотонным, весьма быстрым уменьшением частоты фазовых колебаний Ω_0 , что характерно для начальной стадии ускорения пучка в У-70.

За критической энергией декременты, рассчитанные с помощью формулы (17), имеют очень малые величины. Так, например, как показывает соответствующий расчёт, максимум декремента в этом районе, имеющий место при $E = \sqrt{3}E_{tr}$, равен для приведенных выше параметров У-70 $\sim 1 \text{ с}^{-1}$; далее происходит монотонный спад декремента с ростом энергии пучка — к концу цикла ускорения его величина уменьшается почти на порядок по сравнению с приведенной здесь цифрой.

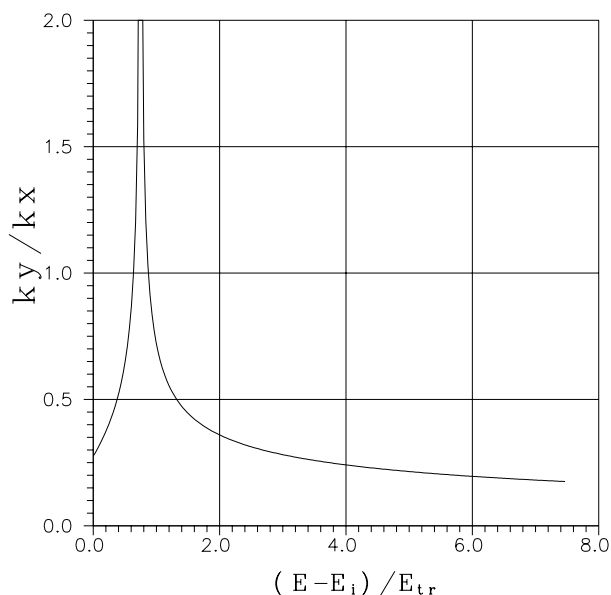


Рис. 1. Отношение коэффициентов $|k_y|/k_x$ в зависимости от энергии пучка.

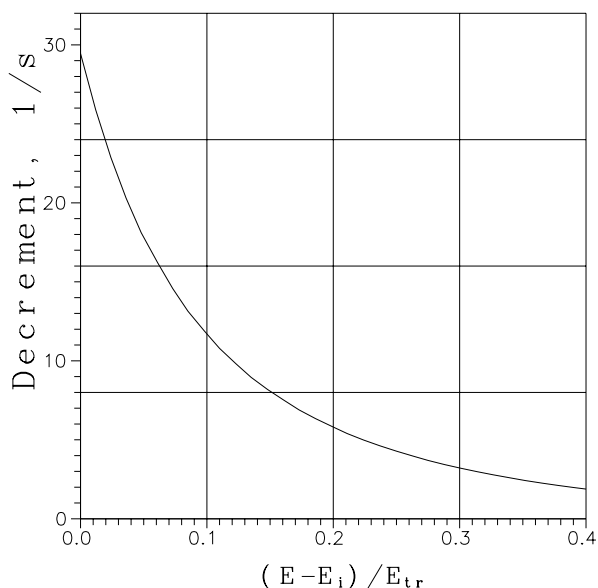


Рис. 2. Декремент затухания квадрупольных колебаний.

2. Случай фазового контура, чувствительного к изменениям формы сгустков

Чувствительность фазового датчика к форме сгустков может приводить как к дополнительному затуханию квадрупольных колебаний в пучке, так и к их раскачке, в зависимости от фазы сигнала на частоте $\omega = 2\Omega_0$, вырабатываемого системой автоподстройки. Рассчитаем сигнал, получаемый от фазового датчика У-70 при

возникновении радиально-фазовых колебаний в пучке. Он пропорционален произведению суммарного ускоряющего поля $U(\varphi) \sim \sin \varphi$, создаваемого резонаторами, и q -ой гармоники тока пучка $J_q \sim F(x_{max}) \cos(\varphi - \chi - \bar{x})$, где χ — фаза сгустков, а функция F учитывает зависимость амплитуды гармоники тока пучка J_q от фазового полуразмера сгустков x_{max} .

Перемножая гармонику тока $J_q(\varphi)$ и напряжение $U(\varphi)$, имеем промежуточный результат:

$$J_q U(\varphi) \sim F(x_{max} + \Delta x_{max}) [\sin(\chi + \bar{x}) + \sin(2\varphi - \chi - \bar{x})],$$

который после усреднения по периоду ВЧ-напряжения и исключения постоянной составляющей принимает следующий вид:

$$\langle J_q U \rangle \sim F'(x_{max}) \Delta x_{max} \sin \chi + F(x_{max}) \bar{x} \cos \chi. \quad (20)$$

Фаза χ обычно располагается в области линейности $U(\varphi)$, причём $\tan \chi \simeq \cot \varphi_s$. Учитывая это, а также включив произведение $F(x_{max}) \cos \chi$ в коэффициент k_x , получаем для сигнала Δ_x , вырабатываемого фазовым датчиком, выражение

$$\Delta_x = \bar{x} + \frac{F'(x_{max})}{F(x_{max})} \Delta x_{max} \cot \varphi_s. \quad (21)$$

Отсюда видно, что сигнал Δ_x содержит в рассматриваемом здесь случае два слагаемых, первое из которых связано с дипольными, а второе — с квадрупольными колебаниями сгустков частиц.

При нахождении связи между переменными \bar{x} и \bar{v} можно не учитывать квадратичные члены в (6), так как все величины, входящие в уравнения (6), (7), малы по предположению. Это даёт основание для независимого рассмотрения различных факторов, оказывающих влияние на квадрупольные колебания сгустков частиц, а конечный результат может быть получен простым суммированием рассматриваемых эффектов. С учётом сделанных замечаний, а также используя распределение $f(r) \sim \sqrt{x_{max}^2 - r^2}$ (при этом форма тока сгустка описывается параболой), для которого $\Delta x_{max} \simeq 0.8\bar{v}/\sqrt{u_0}$, запишем систему уравнений (6), (7) в виде, подобном (13),

$$\ddot{\bar{x}} + k_x \dot{\bar{x}} + \kappa \Omega_0^2 \bar{x} = -\frac{0.8k_x \cot \varphi_s}{\sqrt{u_0}} \frac{F'(x_{max})}{F(x_{max})} \dot{\bar{v}}. \quad (22)$$

Полагая далее $\bar{x}, \bar{v} \sim \exp(-i\omega t)$, снова приходим к характеристическому уравнению относительно частоты ω , подобному уравнению (14), но с другой правой частью, равной $i\omega k_x \sqrt{3u_0} \Omega_0^2 (F'/F) \cot^2 \varphi_s$. Нетрудно показать, что при условии $\cot^2 \varphi_s < 4$, которое обычно выполняется, связь дипольных и квадрупольных колебаний может считаться слабой, так что для нахождения добавки к частоте квадрупольных колебаний может быть использована та же схема, что и в предыдущем разделе. Для вычисления частоты ω можно воспользоваться формулой (15), если в качестве λ подставить в неё следующее выражение:

$$\lambda = \frac{6.4 \cot \varphi_s}{\sqrt{u_0}} \frac{F'(x_{max})}{F(x_{max})} \frac{ik_x}{\kappa \Omega_0 - 2ik_x - 4\Omega_0}. \quad (23)$$

После подстановки (23) в соотношение (15) и выделения мнимой части из частоты ω , имеем (с учётом $k_x, |k_y| \gg \Omega_0$)

$$Im \omega \simeq 0.8 \sqrt{u_0} \Omega_0 \cot^2 \varphi_s \frac{F'(x_{max})}{F(x_{max})} \frac{k_x |k_y|}{4k_x^2 + k_y^2}. \quad (24)$$

При обработке сигнала от пучка в фазовом контуре системы автоподстройки У-70 пиковое значение тока сгустков поддерживается постоянным. При этом оказывается, что производная функции F имеет положительный знак в области длин сгустков, представляющих практический интерес, и, как следствие, может происходить раскачка квадрупольных колебаний в пучке. Покажем это на примере, используя для описания формы импульса тока сгустков параболу. В таком случае для $F(x_{max})$ получается следующее выражение:

$$F = \frac{1}{x_{max}^2} (\sin x_{max} - x_{max} \cos x_{max}), \quad (25)$$

откуда, в частности, для коротких сгустков ($x_{max} \ll 1$) имеем $F'/F \simeq 1/x_{max} = 0,63/\sqrt{u_0}$.

Подставляя последнее соотношение в формулу (24), нетрудно оценить максимальное значение инкремента $(Im \omega)_{max}$, которое достигается при $|k_y|/k_x = 2$ — $(Im \omega)_{max} \simeq 0,115 \Omega_0 \cot^2 \varphi_s$. Например, для У-70 при энергии пучка выше критической $(\Omega_0)_{max} \simeq 2\pi \cdot 180 \text{ с}^{-1}$, $\cot \varphi_s = 0,4$ и, следовательно, $(Im \omega)_{max} \simeq 20Б5 \text{ с}^{-1}$.

На рис. 3 представлены инкременты $Im \omega$ для квадрупольных колебаний сгустков частиц в У-70 в зависимости от фактора группировки частиц по фазе $B = x_{max}/\pi$. Расчёт выполнен с помощью формулы (24) для $\cos \varphi_s = 0,35$. В качестве параметра взято отношение коэффициентов $|k_y|/k_x$.

Обсудим качественно пределы применимости метода вторых моментов, с помощью которого были получены приведенные выше результаты. Как уже отмечалось во введении, он применим в случае очень коротких сгустков частиц, так как при его использовании невозможно учесть влияние разброса синхротронных частот $\Delta\Omega$, который, как следует ожидать, должен оказывать стабилизирующее действие на пучок и, в частности, приводить к снижению величин инкрементов, представленных на рис. 3. Данный недостаток можно преодолеть, используя, например, для решения данной задачи метод численного анализа исходной системы уравнений (1), (2), позволяющий получить полную физическую картину процесса в отсутствие всяких ограничений как на нелинейность фазовых колебаний, так и на величины возмущений.

Обсуждению результатов численного решения данной системы посвящён следующий раздел, а здесь целесообразно привести лишь качественную оценку величины продольного размера сгустков, при превышении которого безусловно необходим учёт разброса синхротронных частот в сгустках $\Delta\Omega$ при вычислении инкремента $Im \omega$.

В случае малых фазовых колебаний разброс $\Delta\Omega$ даётся формулой

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} = \frac{x_{max}^2}{16} \left(1 + \frac{5}{3} \cot^2 \varphi_s \right). \quad (26)$$

Разброс $\Delta\Omega/\Omega_0$, рассчитанный для приведенных выше параметров У-70 с помощью формулы (26), представлен на рис. 3 пунктирной линией. Для того чтобы оценить продольный размер сгустков, соответствующий порогу раскачки квадрупольных колебаний ($Im\omega = 0$), обусловленной рассматриваемой здесь чувствительностью фазового датчика к форме сгустков, можно в грубом приближении исходить из следующего условия: $\Delta\Omega \simeq 2Im\omega$, где величина $Im\omega$ рассчитывается без учёта разброса $\Delta\Omega$ с помощью формулы (24), что подтверждается результатами численных расчётов. Определённая таким образом “предельная” продольная длина сгустков зависит, как видно из рис. 3, от отношения коэффициентов $|k_y|/k_x$ — она уменьшается с уменьшением этого отношения. Так, например, в случае $|k_y|/k_x = 0,5$ неравенство $\Delta\Omega > 2Im\omega$ имеет место при $B > 0,14$, что следует из данных, представленных на рис. 3.

В настоящее время интенсивность $\sim 10^{13}$ протонов в импульсе достигается в У-70 с использованием предварительной продольной раскачки сгустков частиц перед критической энергией. При этом за критической энергией обычно обеспечивается выполнение условия $B \geq 0,15$, так что раскачка квадрупольных колебаний, обусловленная чувствительностью фазового датчика к форме сгустков, могла, в принципе, легко устраняться в этом районе соответствующим уменьшением коэффициента усиления в цепи радиального контура.

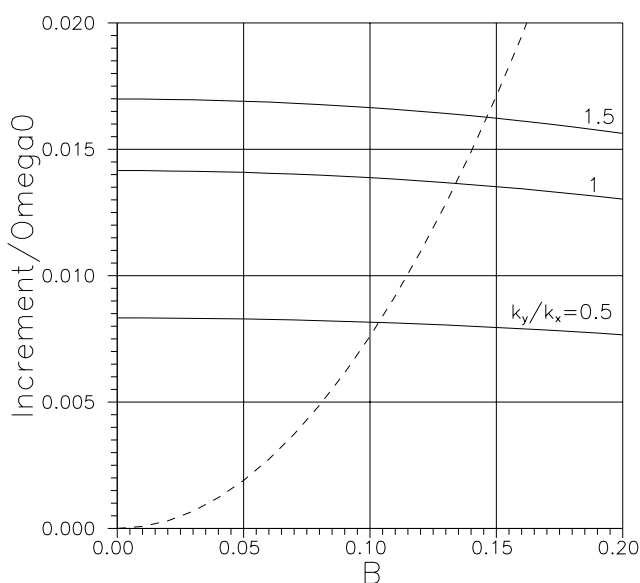


Рис. 3. Инкременты $Im\omega/\Omega_0$ (сплошные линии) и разброс синхротронных частот $\Delta\Omega/\Omega_0$ (пунктир) в зависимости от длины сгустков.

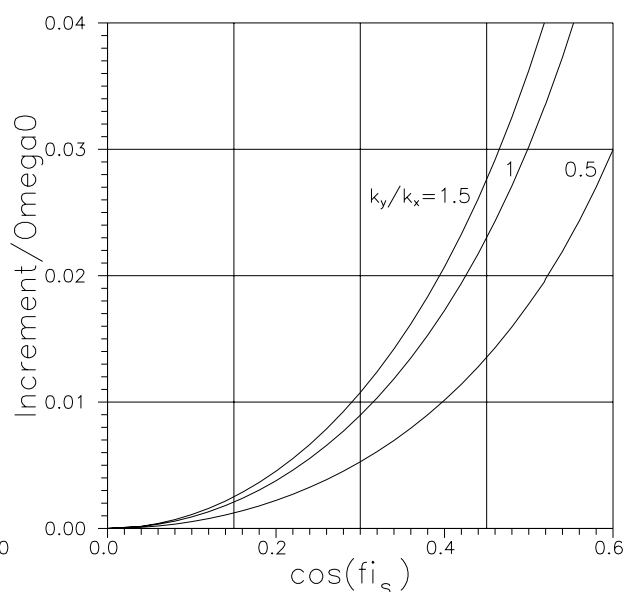


Рис. 4. Зависимость инкремента от $\cos\varphi_s$.

Зависимость инкрементов $Im\omega$ от $\cos\varphi_s$, рассчитанная с помощью формулы (24) для случая достаточно коротких сгустков (для которых возможно пренебречь влиянием на точность вычисления инкремента разброса $\Delta\Omega$), представлена на рис. 4 (в качестве параметра, как и на рис. 3, отложены отношения коэффициентов $|k_y|/k_x$).

Рис. 4 показывает, что с увеличением $\cos \varphi_s$ инкременты $Im\omega$ возрастают примерно по параболическому закону. По этой причине следует ожидать ухудшения ситуации с раскачкой квадрупольных колебаний в пучке при уменьшении амплитуды ускоряющего напряжения (например, при выходе из строя части ускоряющих станций). Данное обстоятельство также может играть заметную роль при ускорении пучка интенсивных сгустков частиц из-за переходных процессов, связанных с нагрузкой резонаторов током пучка и смещающих фазы центров тяжести сгустков с ростом интенсивности пучка в область более нелинейного ускоряющего поля.

3. Результаты численного интегрирования фазового уравнения

Численное моделирование работы системы автоподстройки с фазовым датчиком, чувствительным к форме сгустков, позволяет уточнить пределы применимости формулы (24) для инкремента $Im\omega$, полученной с использованием довольно формального метода вторых моментов. С этой целью было проведено численное интегрирование непосредственно исходной системы уравнений (1), (2), описывающей фазовые колебания частиц в отсутствие всяких ограничений на величины возмущений, воздействующих на анализируемую здесь систему обратной связи. Уравнения (1), (2) интегрировались в конечных разностях, для чего данная система была преобразована к виду

$$y_{n+1} = y_n + aT \frac{\cos(x_n + \varphi_s) - \cos \varphi_s}{|\sin \varphi_s|}; \quad (27)$$

$$x_{n+1} = x_n - aTy_{n+1} + T\Delta\omega_{RF}(\bar{x}_n, \bar{y}_n), \quad (28)$$

где $T = 2\pi/\omega_0$ — период обращения пучка в ускорителе; n — номер оборота. Для изображения сгустка частиц на фазовой плоскости бралось 2000 “макрочастиц”, “вес” которых в зависимости от амплитуды фазовых колебаний задавался в соответствии с распределением Гаусса. Начальная амплитуда квадрупольных колебаний сгустка создавалась за счёт рассогласования его формы с фазовыми траекториями частиц, для чего после заполнения заданного продольного фазового объёма “макрочастицами” сгусток на фазовой плоскости деформировался — осуществлялось его сжатие в продольном направлении на 10% и на такую же величину растяжение по оси y , так что продольный фазовый объём при этом оставался неизменным.

Для вычисления сигнала, вырабатываемого фазовым датчиком, использовалась формула (21), в которой полагалось $(F'/F)\Delta x_{max} = \Delta F/F = -\Delta\rho_{max}/\rho_{max}$, где $\Delta\rho_{max} = \rho_{max} - \rho_{max,0}$ — отклонение максимума линейной плотности заряда ρ_{max} от своего среднего значения $\rho_{max,0}$, равного максимуму линейной плотности заряда в согласованном сгустке. Для вычисления ρ_{max} определялся суммарный “вес” частиц с координатами $|x - \bar{x}| \leq 0, 2x_{max}$.

Необходимо отметить, что метод конечных разностей, используемый при численном интегрировании системы уравнений, вносит в систему обратной связи

естественное запаздывание, равное одному периоду обращения. При наличии же запаздывания в системе автоподстройки частоты, как известно [3], величина коэффициента k_x ограничена сверху условием $k_x < \pi/2T$. Это подтверждается соответствующим результатом численного расчёта — при превышении уровня $k_x = \pi/2T$ имеет место самопроизвольная раскачка дипольных колебаний, и численное интегрирование системы (27), (28) становится невозможным.

Большинство численных расчётов было проведено для энергии пучка $E = \sqrt{3}E_{tr}$, которой соответствуют максимальные значения инкрементов при энергии пучка, выше критического значения. С учётом спада коэффициентов обратной связи на 6 дБ за октаву, желательно было бы полагать при расчётах $k_x \simeq 6 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ при удвоенной частоте фазовых колебаний, равной 360 Гц. Однако в связи с условием $k_x/2\pi < 1/4T = 5 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ допустимая величина k_x оказалась в данном случае примерно на порядок ниже. Это тем не менее не могло заметным образом повлиять на точность расчётов, так как декременты затухания квадрупольных колебаний в случае $|k_y|, k_x \gg \Omega_0$ зависят в основном не от конкретных величин коэффициентов k_x и $|k_y|$, а от их отношения, что видно, например, из формул (17) и (24).

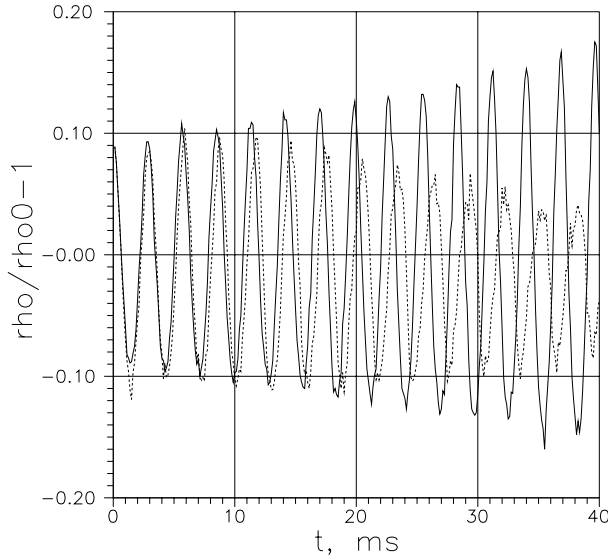


Рис. 5. Колебания максимума линейной плотности заряда ($B = 0,1$ — сплошная линия; $B = 0,25$ — пунктир).

Так, при $\Delta\Omega \simeq 2Im\omega$, где, как и выше, под $Im\omega$ понимается величина инкремента, рассчитанная в пренебрежении разбросом $\Delta\Omega$ с помощью формулы (24), нет ни раскачки, ни затухания квадрупольных колебаний, а при $\Delta\Omega > 2Im\omega$ начальное возмущение формы сгустков с течением времени рассасывается. Пунктирная линия на рис. 5 иллюстрирует поведение длинных сгустков — кривая получена для случая $B = 0,25$ при тех же остальных условиях, что и в случае сплошной линии ($B = 0,1$). Видно, что при $B = 0,25$ начальное возмущение, обусловленное рассогласованием исходных сгустков частиц, затухает с декрементом $\sim 15 \text{ с}^{-1}$ за счёт

Результаты численного интегрирования системы уравнений (27), (28) иллюстрирует рис. 5. Данные получены для следующих параметров У-70: $E = \sqrt{3}E_{tr}$, $|k_y| = k_x$, $a = -2\pi \cdot 180 \text{ с}^{-1}$ (остальные параметры приводились выше). Инкремент в случае $B = 0,1$ (сплошная линия на рис. 4) равен $\sim 15 \text{ с}^{-1}$, что хорошо согласуется с результатом, получающимся из формулы (24) (см. соответствующую кривую на рис. 3). Отсюда можно сделать следующий вывод: при $B \leq 0,1$ можно с хорошей точностью рассчитывать инкремент $Im\omega$ с помощью формулы (24). Так как $\Delta\Omega \sim x_{max}^2$, то с увеличением длины сгустков происходит довольно быстрое изменение как качественной картины, так и количественной стороны дела.

разброса синхротронных частот $\Delta\Omega$, в соответствии с результатами качественного анализа, проведенного в предыдущем разделе.

В заключение коротко обсудим возможность подавления квадрупольных колебаний сгустков частиц. С этой целью можно, например, подать в фазовый контур системы автоподстройки сигнал, пропорциональный изменению равновесной длины сгустков частиц. При этом результирующий сигнал Δ_x , поступающий в фазовый контур, может быть записан в виде $\Delta_x = x + G\Delta x_{max}$. Соответствующим выбором амплитуды и фазы коэффициента G можно обеспечить подавление квадрупольных колебаний на протяжении всего цикла ускорения. Расчёт показывает, что наибольшая эффективность подавления достигается при чисто мнимой величине G , причём знак G , подобно знаку коэффициента k_y , должен изменяться на противоположный в момент перехода пучка через критическую энергию.

Подобный способ имеет ряд преимуществ перед подавлением квадрупольных колебаний с помощью обратной связи, воздействующей с удвоенной частотой фазовых колебаний на амплитуду ускоряющего напряжения (см., например, [3]). Так, например, в отличие от последнего подавление квадрупольных колебаний не сопровождается снижением эффективной амплитуды ускоряющего напряжения, кроме того, при изменении энергии пучка не возникает проблемы с фазированием сигнала относительно квадрупольных колебаний — необходимо только, как уже отмечалось, скачкообразное изменение фазы G на 180 градусов в момент прохождения критической энергии.

Автор благодарен С.В. Иванову и Е.Ф. Троянову за обсуждение работы и замечания, а также Н.А. Игнашину за информацию о конструктивных особенностях и параметрах системы автоподстройки частоты У-70.

Список литературы

- [1] Hereward H.G. – In: *Proc. 1961 Intern. Conf. on High Energy Accel.* Upton, BNL, 1962, p. 236.
- [2] Жильков Э.А., Лебедев А.Н.//*АЭ.* 1965, т. 18, с. 22.
- [3] Schneider G.C. — Preprint CERN/PS/90-59 (RF). Geneva, 1990.

Рукопись поступила 23 февраля 1999 г.

П.Т. Пашков.

Воздействие системы автоподстройки частоты ускоряющего напряжения на квадрупольные колебания пучка протонов.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы \LaTeX .

Редактор Н.В.Ежела.

Технический редактор Н.В.Орлова.

Подписано к печати 03.03.99. Формат $60 \times 84/8$. Офсетная печать.
Печ.л. 1,62. Уч.-изд.л. 1,24. Тираж 120. Заказ 63. Индекс 3649.
ЛР №020498 17.04.97.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

