



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 99-40
ОТФ

В.Е. Рочев

О НЕПЕРТУРБАТИВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ
В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Протвино 1999

Аннотация

Рочев В.Е. О непертурбативных вычислениях в квантовой электродинамике: Препринт ИФВЭ 99–40. – Протвино, 1999. – 31 с., библиогр.: 28.

Предложен новый метод непертурбативных вычислений в квантовой электродинамике, основанный на регулярной итерационной схеме решения системы уравнений Швингера-Дайсона для производящего функционала функций Грина. Метод позволяет последовательно учитывать требования, налагаемые калибровочной инвариантностью (тождества Уорда), а также проводить программу перенормировок. Возможны два варианта итерационной схемы. В первом из них (“пертурбативный вакуум”), который на языке диаграмм соответствует суммированию цепочек, в четырехмерном случае возникает нефизическая особенность (полюс Ландау), что приводит к тривиализации перенормированной теории. Второй вариант (“непертурбативный вакуум”), соответствующий на языке диаграмм суммированию лестниц, позволяет производить непертурбативные вычисления физических величин несмотря на проблему тривиальности. Для кирально-симметричного главного приближения вычислены два первых члена разложения вершинной функции первого шага по импульсу фотона. Получена формула для аномального магнитного момента электрона. Рассмотрен вопрос о динамическом нарушении киральной симметрии (ДНКС), причем вычисления проведены для перенормированной теории в пространстве Минковского. В области сильной связи возникают решения с ДНКС. В перенормированной теории возможны также решения с ДНКС и в области слабой связи, но с дополнительным условием на величину α .

Abstract

Rochev V.E. On Nonperturbative Calculations in Quantum Electrodynamics: IHEP Preprint 99–40. – Protvino, 1999. – p. 31, refs.: 28.

A new approach to nonperturbative calculations in quantum electrodynamics is proposed. The approach is based on a regular iteration scheme for solution of Schwinger-Dyson equations for generation functional of Green functions. The approach allows one to take into account the gauge invariance conditions (Ward identities) and to perform the renormalization program. The iteration scheme can be realized in two versions. The first one (“perturbative vacuum”) corresponds to chain summation in the diagram language. In this version in four-dimensional theory the non-physical singularity (Landau pole) arises which heads to the triviality of the renormalized theory. The second version (“nonperturbative vacuum”) corresponds to ladder summation and permits one to make nonperturbative calculations of physical quantities in spite of the triviality problem. For chiral-symmetrical leading approximation two terms of the expansion of the first-step vertex function over photon momentum are calculated. A formula for anomalous magnetic moment is obtained. A problem of dynamical chiral symmetry breaking (DCSB) is considered, the calculations are performed for renormalized theory in Minkowsky space. In the strong coupling region DCSB-solutions arise. For the renormalized theory a DCSB-solution is also possible in the weak coupling region but with a subsidiary condition on the value of α .

Введение

Проблема непертурбативных вычислений в квантовой электродинамике возникла практически сразу же после принципиального решения проблемы вычислений пертурбативных, основой для которого послужила перенормированная теория возмущений по константе связи. Следует признать, однако, что прогресс в непертурбативных вычислениях за несколько последних десятилетий весьма невелик. Количественное описание непертурбативных эффектов либо базируется на нерелятивистской основе (примером может служить описание связанных состояний на основе нерелятивистской кулоновской задачи), либо весьма уязвимо для критики. Кроме того, существует проблема внутренней противоречивости квантовой электродинамики [1], нашедшая свое выражение в укоренившемся мнении о ее тривиальности в непертурбативной области (см., например, работы [2], [3] и цитируемую там литературу).

Тривиальность означает, что единственным значением перенормированного заряда, не приводящим к противоречиям, является нулевое значение. Отсутствие асимптотической свободы в квантовой электродинамике и безуспешные попытки поиска иного типа самосогласованного поведения в ультрафиолетовой области являются сильными аргументами в пользу тривиальности¹. Крайним выражением этой точки зрения является утверждение о том, что квантовую электродинамику можно понимать только как теорию возмущений по перенормированной константе связи, и таким образом любые непертурбативные вычисления исключаются из рассмотрения. По большому счету такая ситуация не является безвыходной, поскольку при очень больших энергиях квантовая электродинамика становится частью теории Великого объединения, основанной на неабелевой калибровочной теории, которая в свою очередь обладает самосогласованным асимптотически свободным ультрафиолетовым поведением. Представляется, однако, весьма странным то обстоятельство, что для последовательно релятивистского вычисления, например, уровней энергии позитрония нам необходимо привлекать теорию Великого объединения, в то время как вычисление сечений аннигиляции в этом не нуждается. Трудно усмотреть какие-либо физические причины для такого принципиального разделения этих задач. Поэтому возможность проводить приближенные непертурбативные вычисления физических величин в рамках самой квантовой электродинамики, не входя в противоречие с тривиальностью точной теории (так, как это делается в теории возмущений), кажется необходимым компонентом этой “самой прекрасной из теорий”.

¹Отметим, что в электродинамике с динамическим нарушением киральной симметрии ситуация может быть иной [4],[5].

Основной проблемой непертурбативных вычислений в квантовой электродинамике представляется, на первый взгляд, отсутствие какого-либо универсального малого параметра кроме постоянной тонкой структуры. По этой причине любое частное суммирование ряда теории возмущений выглядит произвольной процедурой, оправданием которой может служить только физическая значимость результатов. В то же время ясно, что само по себе отсутствие малого параметра не является препятствием к использованию того или иного приближения. Даже без явного малого параметра мотивированные приближения могут давать вполне удовлетворительные результаты. Примером тому может служить применение различных вариационных методов или приближений типа самосогласованного поля в самых различных областях физической теории.

Общей проблемой для различного рода непертурбативных приближений в квантовой электродинамике является последовательный учет требований, налагаемых калибровочной инвариантностью и перенормируемостью. Ясно, что для учета этих требований необходимо, чтобы приближенные вычисления были оформлены в виде некоторой итерационной схемы, позволяющей, в принципе, проделать сколь угодно большое число шагов по направлению к точному решению задачи.

В настоящей работе предложена такого рода схема вычислений для квантовой электродинамики. Схема основана на аппроксимации системы уравнений Швингера-Дайсона для производящего функционала функций Грина квантовой электродинамики точно решаемым уравнением. Это решение генерирует линейную итерационную схему, каждый шаг которой описывается замкнутой системой интегро-дифференциальных уравнений. Требования, налагаемые калибровочной инвариантностью в виде тождеств Уорда, легко учитываются на каждом шаге итераций. Не представляет также принципиальных трудностей и перенормировка уравнений каждого шага. Отметим, что уравнения для функций Грина в главном приближении и на первом шаге итераций выглядят знакомо, и в иных контекстах уже выписывались и исследовались ранее. Новым является их появление в составе регулярной итерационной схемы, причем именно это обстоятельство и позволяет дать им последовательную квантовополевую интерпретацию.

Использование билокального источника фермионов позволяет сформулировать итерационную схему в двух вариантах. Первый из них на языке фейнмановских диаграмм теории возмущений можно сопоставить с суммированием цепочечных диаграмм с фермионной петлей. Этот вариант назван вычислениями над пертурбативным вакуумом, поскольку единственной связной функцией Грина главного (“вакуумного”) приближения является свободный пропагатор электрона. Вычисления над пертурбативным вакуумом в двумерной электродинамике уже на первом шаге дают точный результат модели Швингера для пропагатора фотона, но в четырехмерном случае приводят к появлению в пропагаторе фотона нефизического полюса Ландау и, как следствие, к тривиальности перенормированной теории. Таким образом, практическая ценность вычислений над пертурбативным вакуумом для четырехмерной электродинамики становится нулевой, хотя они и ухватывают главный непертурбативный эффект — тривиальность полной теории.

Другой вариант итерационной схемы на языке диаграмм можно сопоставить с суммированием лестниц. Этот вариант назван вычислениями над непертурбативным вакуумом, поскольку пропагатор электрона в главном вакуумном приближении есть решение нетривиального нелинейного уравнения. В этом варианте итерационной схемы становятся возможными непертурбативные вычисления физических величин, не входящие в противоречие с тривиальностью полной теории. Исследованию этого варианта итерационной

схемы посвящена основная часть статьи. Помимо формулировки основных положений и принципов перенормировки уравнений для функций Грина в работе проведены вычисления вершинной функции первого шага (в случае кирально-симметричного решения уравнения главного приближения), а также проведено исследование проблемы динамического нарушения киральной симметрии в линеаризированной версии теории.

Структура статьи следующая. В первом разделе, носящем вводный характер, даны необходимые обозначения и определения, введены уравнения Швингера-Дайсона для производящего функционала функций Грина квантовой электродинамики в формализме билокального источника фермионов, а также рассмотрены производящие соотношения для тождеств Уорда. Во втором разделе проведено общее построение итерационной схемы решения уравнений Швингера-Дайсона, а также рассмотрены главное приближение и первый шаг итераций над пертурбативным вакуумом. В разделе 3 произведена перенормировка уравнений первого шага и показано, что в четырехмерной теории вычисления над пертурбативным вакуумом приводят к тривиальной теории уже на первом шаге. В разделе 4 сформулирована схема вычислений над непертурбативным вакуумом. В разделе 5 вычислены два первых члена разложения вершинной функции по импульсу фотона (для кирально-симметричного вакуума). Эти вычисления позволяют получить простую формулу для аномального магнитного момента $f_2 = \alpha/(2\pi - \alpha)$, где α — постоянная тонкой структуры. Раздел 6 посвящен исследованию проблемы динамического нарушения симметрии в квантовой электродинамике. В заключении приводится обсуждение результатов.

1. Уравнения Швингера-Дайсона и тождества Уорда.

Мы будем рассматривать теорию спинорного поля $\psi(x)$ (электрон), взаимодействующего с абелевым калибровочным полем $A_\mu(x)$ (фотон) в n -мерном пространстве Минковского с метрикой $x^2 \equiv x_\mu x_\mu = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2$. (Для упрощения обозначений мы все векторные индексы пишем внизу.)

Лагранжиан, включающий член, фиксирующий калибровку, имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2d_l}(\partial_\mu A_\mu)^2 + \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m + e\hat{A})\psi. \quad (1)$$

Здесь $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$; $\hat{A} \equiv A_\mu \gamma_\mu$; $\bar{\psi} = \psi^* \gamma_0$; m — масса электрона; e — заряд (константа связи); d_l — калибровочный параметр; γ_μ — матрицы Дирака.

Производящий функционал функций Грина (вакуумных средних T -произведения полей) может быть представлен в виде функционального интеграла

$$G(J, \eta) = \int D(\psi, \bar{\psi}, A) \exp i \left\{ \int dx (\mathcal{L} + J_\mu(x) A_\mu(x)) - \int dx dy \bar{\psi}^\beta(y) \eta^{\beta\alpha}(y, x) \psi^\alpha(x) \right\}. \quad (2)$$

Здесь $J_\mu(x)$ — источник калибровочного поля, а $\eta^{\beta\alpha}(y, x)$ — билокальный источник спинорного поля (α и β — спинорные индексы). Нормировочная постоянная опущена.

Функциональные производные G по источникам есть вакуумные средние

$$\frac{\delta G}{\delta J_\mu(x)} = i < 0 | A_\mu(x) | 0 >, \quad \frac{\delta G}{\delta \eta^{\beta\alpha}(y, x)} = i < 0 | T \{ \psi^\alpha(x) \bar{\psi}^\beta(y) \} | 0 >. \quad (3)$$

Эвристический вывод уравнений Шингера-Дайсона для производящего функционала G основан на соотношениях (см., например, [6], [7])

$$0 = \int D(\psi, \bar{\psi}, A) \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \exp i \left\{ \int dx (\mathcal{L} + J_\mu(x) A_\mu(x)) - \int dxdy \bar{\psi}(y) \eta(y, x) \psi(x) \right\}, \quad (4)$$

$$0 = \int D(\psi, \bar{\psi}, A) \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(x)} \bar{\psi}(y) \exp i \left\{ \int dx (\mathcal{L} + J_\mu(x) A_\mu(x)) - \int dxdy \bar{\psi}(y) \eta(y, x) \psi(x) \right\}. \quad (5)$$

Произведя в (4) и (5) дифференцирования и принимая во внимание (3), получаем уравнения Шингера-Дайсона для производящего функционала функций Грина квантовой электродинамики

$$(g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{d_l} \partial_\mu \partial_\nu) \frac{1}{i} \frac{\delta G}{\delta J_\nu(x)} + ie \text{tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{\delta G}{\delta \eta(x, x)} \right\} + J_\mu(x) G = 0, \quad (6)$$

$$\delta(x - y) G + (i\hat{\partial} - m) \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x)} + \frac{e}{i} \gamma_\mu \frac{\delta^2 G}{\delta J_\mu(x) \delta \eta(y, x)} - \int dx' \eta(x, x') \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x')} = 0. \quad (7)$$

(Здесь и всюду в дальнейшем ∂_μ означает дифференцирование по переменной x , дифференцирование же по иным переменным будет обозначаться указанием этой переменной в качестве верхнего индекса. Например, дифференцирование по переменной y будет обозначаться как ∂_μ^y .)

Для того чтобы не загромождать изложение, мы рассматриваем в этом и в последующем разделах неперенормированную теорию, поэтому для всех сингулярных расходящихся величин предполагается некоторая регуляризация. Перенормировка уравнений Шингера-Дайсона рассмотрена ниже (раздел 3).

Калибровочная инвариантность накладывает на решения уравнений Шингера-Дайсона (6) и (7) ограничения, известные под названием тождеств Уорда. Подействовав оператором ∂_μ на уравнение (6), получим соотношение

$$\frac{1}{d_l} \partial^2 \partial_\mu \frac{1}{i} \frac{\delta G}{\delta J_\mu(x)} + e \text{tr} \left\{ i\hat{\partial} \frac{\delta G}{\delta \eta(x, x)} \right\} + \partial_\mu J_\mu(x) G = 0, \quad (8)$$

которое мы будем называть первым производящим соотношением. Еще одно производящее соотношение следует из уравнения (7) и сопряженного ему уравнения Шингера-Дайсона

$$\delta(x - y) G + \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x)} (-i\hat{\partial}^y - m) + \frac{e}{i} \frac{\delta^2 G}{\delta J_\mu(y) \delta \eta(y, x)} \gamma_\mu - \int dx' \frac{\delta G}{\delta \eta(x', x)} \eta(x', y) = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) есть следствие соотношения

$$0 = \int D(\psi, \bar{\psi}, A) \frac{\delta}{\delta \psi(y)} \psi(x) \exp i \left\{ \int dx (\mathcal{L} + J_\mu(x) A_\mu(x)) - \int dxdy \bar{\psi}(y) \eta(y, x) \psi(x) \right\}, \quad (10)$$

сопряженного к соотношению (5). Вычтем из уравнения (7) уравнение (9), возьмем след по спинорным индексам и положим $y = x$. В результате этих нехитрых манипуляций мы получаем соотношение

$$\text{tr} \left\{ i\hat{\partial} \frac{\delta G}{\delta \eta(x, x)} \right\} = \int dx' \text{tr} \left\{ \eta(x, x') \frac{\delta G}{\delta \eta(x, x')} - \frac{\delta G}{\delta \eta(x', x)} \eta(x', x) \right\}, \quad (11)$$

которое будем называть вторым производящим соотношением. Соотношение (11), на самом деле, справедливо для весьма широкого класса взаимодействий, локальных по фермионам (см. [8]). Для электродинамики мы можем объединить оба соотношения в одно, подставив $\text{tr} \left\{ i\hat{\partial}_{\frac{\delta G}{\delta \eta(x,x')}} \right\}$ из соотношения (11) в (8). В результате мы приходим к соотношению

$$\frac{i}{d_l} \partial^2 \partial_\mu \frac{\delta G}{\delta J_\mu(x)} = \partial_\mu J_\mu(x) G + e \int dx' \text{tr} \left\{ \eta(x, x') \frac{\delta G}{\delta \eta(x, x')} - \frac{\delta G}{\delta \eta(x', x)} \eta(x', x) \right\}, \quad (12)$$

которое является производящим соотношением тождеств Уорда квантовой электродинамики.

Дифференцируя (12) по J_λ и выключая источники, мы получаем известное соотношение

$$\partial^2 \partial_\mu D_{\mu\lambda}(x - y) = d_l \partial_\lambda \delta(x - y), \quad (13)$$

где

$$D_{\mu\lambda}(x - y) \equiv i \frac{\delta^2 G}{\delta J_\lambda(y) \delta J_\mu(x)} \Big|_{J=\eta=0} \quad (14)$$

есть пропагатор фотона. Из соотношения (13) следует, что продольная часть полного пропагатора фотона есть (в импульсном пространстве)

$$D_{\mu\lambda}^{long}(k) = -d_l \frac{k_\mu k_\lambda}{(k^2)^2}. \quad (15)$$

Продифференцировав (12) по η , мы получим после выключения источников другое известное соотношение

$$\frac{i}{d_l} \partial^2 \partial_\mu F_\mu(x; x', y') = e[\delta(x - y') - \delta(x - x')] S(x' - y'). \quad (16)$$

Здесь

$$F_\mu(x; x', y') \equiv \frac{\delta^2 G}{\delta J_\mu(x) \delta \eta(y', x')} \Big|_{J=\eta=0} \quad (17)$$

является трехточечной функцией, а

$$S(x - y) \equiv \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x)} \Big|_{J=\eta=0} \quad (18)$$

есть полный пропагатор электрона. Соотношение (16) принимает знакомый вид, если перейти к ампутированной трехточке (вершинной функции) Γ_μ , определенной как

$$\Gamma_\mu(x | x', y') \equiv \int dx_1 dx'_1 dy'_1 S^{-1}(x' - x'_1) F_\nu(x_1; x'_1, y'_1) S^{-1}(y'_1 - y') D_{\nu\mu}^{-1}(x_1 - x). \quad (19)$$

Используя это определение и (13), получаем тождество Уорда для вершинной функции

$$i \partial_\mu \Gamma_\mu(x | x', y') = e[\delta(x - x') - \delta(x - y')] S^{-1}(x' - y'). \quad (20)$$

2. Итерационная схема

При $e = 0$ уравнения Швингера-Дайсона (6) и (7) имеют решение

$$G^{free} = \exp \left\{ \frac{1}{2i} J_\mu \star D_{\mu\nu}^c \star J_\nu + \text{Tr} \log(1 + S^c \star \eta) \right\},$$

где

$$D_{\mu\nu}^c = [g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{d_l} \partial_\mu \partial_\nu]^{-1}, \quad S^c = (m - i\hat{\partial})^{-1}$$

есть пропагаторы свободных полей, а значок \star означает умножение в операторном смысле. (Также в операторном смысле здесь и всюду в дальнейшем понимается операция Tr , в отличие от значка tr , соответствующего взятию следа по спинорным индексам.) Функционал G^{free} является производящим функционалом функций Грина свободных полей и составляет основу для итерационной схемы теории возмущений по константе связи e .

Мы будем использовать для решения уравнений Швингера-Дайсона (6) и (7) другую итерационную схему, предложенную в работах [9], [10]. Основной идеей этой схемы является аппроксимация функционально-дифференциальных уравнений Швингера-Дайсона (6) и (7) уравнениями с “постоянными”, т.е. не зависящими от источников J_μ и η коэффициентами. Таким образом мы аппроксимируем функционально-дифференциальные уравнения Швингера-Дайсона вблизи точки $J_\mu = 0, \eta = 0$. Поскольку объектом вычислений являются функции Грина, т.е. производные G в нуле, то такая аппроксимация выглядит вполне естественной. Немаловажным обстоятельством является то, что главное приближение в такой схеме является весьма простым, легко записывается также и уравнения для всех последующих приближений. В каждом порядке этой итерационной схемы функции Грина определяются как решения замкнутой системы уравнений. Технически эта схема не сложней теории возмущений по константе связи, но в отличие от последней содержит информацию, в принципе недоступную в любом конечном порядке теории возмущений, т.е. является непертурбативным методом.

В соответствии с вышеизложенным, в качестве уравнений главного приближения мы выбираем систему функционально-дифференциальных уравнений

$$(g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{d_l} \partial_\mu \partial_\nu) \frac{1}{i} \frac{\delta G^{(0)}}{\delta J_\nu(x)} + ie \text{tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(x, x)} \right\} = 0, \quad (21)$$

$$\delta(x - y) G^{(0)} + (i\hat{\partial} - m) \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(y, x)} + \frac{e}{i} \gamma_\mu \frac{\delta^2 G^{(0)}}{\delta J_\mu(x) \delta \eta(y, x)} = 0. \quad (22)$$

Решение уравнений главного приближения (21)–(22) есть функционал

$$G^{(0)} = \exp \left\{ iV_\mu \star J_\mu + \text{Tr} S^{(0)} \star \eta \right\}, \quad (23)$$

где $V_\mu(x)$ и $S^{(0)}(x, y)$ являются решениями уравнений

$$(g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{d_l} \partial_\mu \partial_\nu) V_\nu(x) + ie \text{tr} \left\{ \gamma_\mu S^{(0)}(x, x) \right\} = 0, \quad (24)$$

$$\delta(x - y) + (i\hat{\partial} - m) S^{(0)}(x, y) + e\hat{V}(x) S^{(0)}(x, y) = 0. \quad (25)$$

По аналогии с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений мы будем называть эти уравнения характеристическими.

В соответствии с выбором главного приближения i -ый член итерационного разложения производящего функционала

$$G = G^{(0)} + G^{(1)} + \cdots + G^{(i)} + \cdots \quad (26)$$

есть решение уравнений итерационной схемы

$$(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu)\frac{1}{i}\frac{\delta G^{(i)}}{\delta J_\nu(x)} + ie \operatorname{tr}\left\{\gamma_\mu\frac{\delta G^{(i)}}{\delta\eta(x, x)}\right\} = -J_\mu(x)G^{(i-1)}, \quad (27)$$

$$\delta(x - y)G^{(i)} + (i\hat{\partial} - m)\frac{\delta G^{(i)}}{\delta\eta(y, x)} + \frac{e}{i}\gamma_\mu\frac{\delta^2 G^{(i)}}{\delta J_\mu(x)\delta\eta(y, x)} = \int dx'\eta(x, x')\frac{\delta G^{(i-1)}}{\delta\eta(y, x')}. \quad (28)$$

Решение уравнений (27)- (28) ищем в виде

$$G^{(i)} = P^{(i)}G^{(0)}. \quad (29)$$

С учетом характеристических уравнений (24)-(25) система уравнений для $P^{(i)}$ принимает вид

$$(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu)\frac{1}{i}\frac{\delta P^{(i)}}{\delta J_\nu(x)} + ie \operatorname{tr}\left\{\gamma_\mu\frac{\delta P^{(i)}}{\delta\eta(x, x)}\right\} = -J_\mu(x)P^{(i-1)}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} (i\hat{\partial} - m)\frac{\delta P^{(i)}}{\delta\eta(y, x)} + \frac{e}{i}\gamma_\mu\frac{\delta^2 P^{(i)}}{\delta J_\mu(x)\delta\eta(y, x)} + e\hat{V}(x)\frac{\delta P^{(i)}}{\delta\eta(y, x)} + \frac{e}{i}\gamma_\mu S^{(0)}(x, y)\frac{\delta P^{(i)}}{\delta J_\mu(x)} \\ = \int dx'\eta(x, x')\left\{\frac{\delta P^{(i-1)}}{\delta\eta(y, x')} + S^{(0)}(x', y)P^{(i-1)}\right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Поскольку $P^{(0)} \equiv 1$, то очевидно, что при любом i функционал $P^{(i)}$ есть полином от функциональных переменных J и η . Это обстоятельство весьма важно, так как оно означает, что система уравнений для коэффициентных функций этого функционала является замкнутой в каждом порядке итерационной схемы.

В этой итерационной схеме нет малого параметра. Его роль играют, в определенном смысле, источники J и η . Разложение производящего функционала (26) следует понимать как аппроксимацию $G(J, \eta)$ вблизи точки $J_\mu = 0, \eta = 0$. По существу, вместо вопроса о малом параметре следует ставить вопрос о сходимости итерационного ряда. Не обсуждая здесь вопрос о сходимости разложения для квантовополевой задачи, ограничимся замечанием о том, что можно привести ряд качественных соображений в пользу того, что сходимость разложения такого типа во всяком случае не хуже, чем сходимость ряда теории возмущений по константе связи (см. [10]). Кроме того, отметим, что для модельной “нуль-мерной теории” при $n = 0$, когда функциональный интеграл становится обычным, а уравнения Швингера-Дайсона — обыкновенными дифференциальными уравнениями, такое разложение обладает весьма хорошими свойствами сходимости [10].

Производящее соотношение тождеств Уорда (12) в рамках данной итерационной схемы принимает вид

$$\frac{i}{d_l}\partial^2\partial_\nu\frac{\delta G^{(i)}}{\delta J_\nu(x)} = \partial_\nu J_\nu(x)G^{(i-1)} + \int dx' \operatorname{tr}\left\{\eta(x, x')\frac{\delta G^{(i-1)}}{\delta\eta(x, x')} - \frac{\delta G^{(i-1)}}{\delta\eta(x', x)}\eta(x', x)\right\}, \quad (32)$$

Соответственно модифицируются и следствия производящего соотношения типа формул (14), (16) и (20).

Рассмотрим подробнее главное приближение, описываемое формулами (23), (24) и (25). Очевидно, что для сохранения Пуанкаре-инвариантности теории следует положить $V_\mu \equiv 0$. Из уравнения (24) тогда следует, что

$$\text{tr} \left\{ \gamma_\mu S^{(0)}(x, x) \right\} = 0. \quad (33)$$

Поскольку в соответствии с определением (см. (18)) $S^{(0)}$ есть пропагатор электрона в главном приближении, то из той же Пуанкаре-инвариантности следует, что $S^{(0)}(x, y) = S^{(0)}(x - y)$, и

$$S^{(0)}(x, x) = S^{(0)}(0) = \int \frac{dp}{(2\pi)^n} S^{(0)}(p).$$

Как указывалось выше, для подобных выражений всегда подразумевается некоторая регуляризация.

При выполнении вышеуказанных условий решением уравнения (25) является свободный пропагатор

$$S^{(0)} = S^c = (m - i\hat{\partial})^{-1}.$$

Для этого решения выполнение условия (33) эквивалентно условию на регуляризацию

$$\int dp \frac{p_\mu}{m^2 - p^2} = 0.$$

Трудно представить себе инвариантную регуляризацию, в которой это условие не выполняется.

Итак, производящий функционал главного приближения имеет вид

$$G^{(0)} = \exp \left\{ \text{Tr } S^c \star \eta \right\}. \quad (34)$$

Как следует из формулы (34), единственной связной функцией Грина главного приближения является пропагатор электрона. Остальные связные функции Грина появляются на следующих шагах итераций. Из формулы (34) следует также, что производящий функционал главного приближения не обладает полной ферми-симметрией. Действительно, из определения производных производящего функционала как вакуумных средних T -произведения полей следует, что ферми-симметрия накладывает на *полный* производящий функционал требование

$$\frac{\delta^2 G}{\delta \eta^{\beta\alpha}(y, x) \delta \eta^{\beta'\alpha'}(y', x')} = - \frac{\delta^2 G}{\delta \eta^{\beta'\alpha}(y', x) \delta \eta^{\beta\alpha'}(y, x')}. \quad (35)$$

Очевидно, что для $G^{(0)}$, определенного формулой (34), условие (35) не выполняется. Нарушение этого условия приводит, в частности, к тому, что в несвязной двухчастичной (четырехточечной) электронной функции главного приближения, равной

$$S_2^{(0)}(x, y; x', y') \equiv \left. \frac{\delta^2 G^{(0)}}{\delta \eta^{\beta\alpha}(y, x) \delta \eta^{\beta'\alpha'}(y', x')} \right|_{J=\eta=0} = S^c(x - y) S^c(x' - y'), \quad (36)$$

“не хватает” члена $-S^c(x - y') S^c(x' - y)$, т.е. нарушается ее связная структура.

Такая ситуация является довольно типичной для непертурбативных вычислительных схем с билокальным источником, например, для $1/N$ -разложения в формализме билокального источника, но подобного рода несоответствия не являются препятствием для использования такого рода итерационных схем. Действительно, условию (35) должен удовлетворять полный производящий функционал G , являющийся точным решением уравнений Швингера-Дайсона (6) и (7). Понятно, что приближенное решение может и не обладать всеми свойствами точного. В данном случае ситуация именно такова. Свойства связности и ферми-симметрии высших функций Грина, не выполняющиеся на первых шагах итерационной схемы, “улучшаются” на последующих шагах. Так, например, структура несвязной части двухэлектронной функции восстанавливается уже на первом шаге итерационной схемы (см. ниже). На последующих шагах восстанавливаются правильная связная структура многоэлектронных функций и другие следствия ферми-симметрии.

Такое “поэтапное” восстановление свойств точного решения является очень естественным в рассматриваемой нами итерационной схеме, поскольку в основе ее лежит, как уже указывалось выше, идея аппроксимации производящего функционала $G(J, \eta)$ в окрестности нуля. Функции Грина есть не что иное, как коэффициенты разложения производящего функционала в окрестности нуля, поэтому при первых шагах аппроксимации хорошо описываются только низшие функции, в главном приближении — только пропагатор электрона. Высшие многочастичные функции вступают в игру позже, на следующих шагах, и по мере продвижения к точному решению соотношение (35) выполняется все точнее.

Решение уравнений первого шага ищем в виде

$$G^{(1)} = P^{(1)} G^{(0)},$$

где полином $P^{(1)}$ есть решение уравнений (30) и (31) при $i = 1$ и $V_\mu \equiv 0$. Это решение имеет вид

$$P^{(1)} = \frac{1}{2} \eta \star S_2^{(1)} \star \eta + S^{(1)} \star \eta + \frac{1}{2i} J_\mu \star D_{\mu\nu}^{(1)} \star J_\nu + J_\mu \star F_\mu^{(1)} \star \eta + i \mathcal{A}_\mu^{(1)} \star J_\mu. \quad (37)$$

В соответствии с данными выше определениями, $S_2^{(1)}(x, y; x', y')$ есть двухэлектронная функция; $S^{(1)}(x - y)$ — поправка к пропагатору электрона; $D_{\mu\nu}^{(1)}(x - y)$ — пропагатор фотона; $F_\mu^{(1)}(x; x', y')$ — трехточечная функция; $\mathcal{A}_\mu^{(1)}$ — вакуумное среднее поля фотона. Верхний индекс указывает на то, что это величины первого шага итерационной схемы.

Уравнения для функций первого шага следуют из уравнений (30), (31) при $i = 1$, $V_\mu \equiv 0$ и имеют вид

$$(g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{d_l} \partial_\mu \partial_\nu) D_{\nu\lambda}^{(1)}(x - y) - ie \text{tr} \left\{ \gamma_\mu F_\lambda^{(1)}(y | x, x) \right\} = g_{\mu\lambda} \delta(x - y), \quad (38)$$

$$(g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{d_l} \partial_\mu \partial_\nu) F_\nu^{(1)}(x | x', y') = e \text{tr} \left\{ \gamma_\mu S_2^{(1)}(x, x; x', y') \right\}, \quad (39)$$

$$(g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{d_l} \partial_\mu \partial_\nu) \mathcal{A}_\nu^{(1)}(x) + ie \text{tr} \left\{ \gamma_\mu S^{(1)}(x, x) \right\} = 0, \quad (40)$$

$$(i\hat{\partial} - m) S_2^{(1)}(x, y; x', y') - ie \gamma_\mu S^c(x - y) F_\mu^{(1)}(x | x', y') = \delta(x - y') S^c(x' - y), \quad (41)$$

$$(i\hat{\partial} - m) F_\lambda^{(1)}(z | x, y) = e \gamma_\mu S^c(x - y) D_{\mu\lambda}^{(1)}(x - z), \quad (42)$$

$$(i\hat{\partial} - m)S^{(1)}(x - y) - ie\gamma_\mu F_\mu^{(1)}(x | x, y) + e\gamma_\mu S^c(x - y)\mathcal{A}_\mu^{(1)}(x) = 0. \quad (43)$$

Система уравнений (38)–(43), на первый взгляд, кажется переполненной: шесть уравнений на пять функций. На самом деле, можно показать, что уравнение (39) является следствием остальных. Далее, если наложить на $S^{(1)}$ такое же условие, как и на $S^{(0)}$, (см. (33)), то из (40) следует, что для $\mathcal{A}_\mu^{(1)}$ существует тривиальное решение $\mathcal{A}_\mu^{(1)} \equiv 0$. Мы ограничимся этим решением для $\mathcal{A}_\mu^{(1)}$, игнорируя остальные как нарушающие Пуанкаре-инвариантность теории.

Из уравнения (42) получаем

$$F_\lambda^{(1)}(z | x, y) = -e \int dx' S^c(x - x') \gamma_\mu S^c(x' - y) D_{\mu\lambda}^{(1)}(x' - z). \quad (44)$$

Подставляя (44) в (38), получаем после простых преобразований

$$(D_{\mu\nu}^{(1)})^{-1} = (D_{\mu\nu}^c)^{-1} + \Pi_{\mu\nu}, \quad (45)$$

где

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = ie^2 \text{tr} \left\{ \gamma_\mu S^c(x) \gamma_\nu S^c(-x) \right\} \quad (46)$$

есть петля свободных электронов. Из тождества Уорда следует, что $\Pi_{\mu\nu}$ поперечна в импульсном пространстве:

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \Pi(k^2) \pi_{\mu\nu}, \quad (47)$$

где

$$\pi_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

есть поперечный проектор. С учетом (47) получаем окончательно (в импульсном пространстве)

$$D_{\mu\nu}^{(1)}(k) = \frac{1}{-k^2 + \Pi(k^2)} \pi_{\mu\nu} - d_l \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2}. \quad (48)$$

Далее из уравнения (41) получаем для двухэлектронной функции

$$S_2^{(1)}(x, y; x', y') = -S^c(x - y') S^c(x' - y) + \\ + ie^2 \int dx_1 dx_2 S^c(x - x_1) \gamma_\mu S^c(x_1 - y) D_{\mu\nu}^{(1)}(x_1 - x_2) S^c(x' - x_2) \gamma_\nu S^c(x_2 - y'), \quad (49)$$

а из уравнения (43) —

$$S^{(1)}(x - y) = ie^2 \int dx_1 dx_2 S^c(x - x_1) \gamma_\mu S^c(x_1 - x_2) D_{\mu\nu}^{(1)}(x_1 - x_2) \gamma_\nu S^c(x_2 - y). \quad (50)$$

Таким образом, получены выражения для всех функций первого шага. Отметим, что несвязная часть функции $S_2^{(1)}$ (см. (49)) есть не что иное, как “недостающая” несвязная часть двухэлектронной функции главного приближения (36). Следовательно, как мы уже указывали выше, правильная структура несвязной части двухэлектронной функции восстанавливается на первом шаге вычислений. На последующих шагах восстанавливается и правильная кроссинг-симметричная структура связной части.

До проведения процедуры перенормировок полученные формулы для функций первого шага являются формальными выражениями, поскольку петля свободных электронов (46)

есть ультрафиолетово расходящаяся величина. Отметим, однако, что при $n = 2$ (двумерная электродинамика) в размерной регуляризации эта петля сходится. При $m = 0$ (модель Швингера)

$$\Pi(k^2) = \frac{e^2}{\pi}, \quad (51)$$

и пропагатор фотона (в поперечной калибровке) есть

$$D_{\mu\nu}^{(1)}(k) = \frac{1}{\frac{e^2}{\pi} - k^2} \pi_{\mu\nu}, \quad (52)$$

что совпадает с точным результатом [11].

3. Перенормировка

До сих пор мы рассматривали неперенормированную теорию. Для придания физического смысла вычисляемым величинам в теории с ультрафиолетовыми расходимостями необходимо провести процедуру перенормировки. Лагранжиан квантовой электродинамики для перенормированных полей имеет вид

$$\mathcal{L}_r = -\frac{Z_3}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2d_l} (\partial_\mu A_\mu)^2 + Z_1 \bar{\psi} (i\hat{\partial} - m_r + e_r \hat{A}) \psi - \delta m \bar{\psi} \psi. \quad (53)$$

Здесь ψ и A_μ — перенормированные поля; Z_1 и Z_3 — константы перенормировки спинорного и калибровочного полей соответственно; m_r и e_r — перенормированные масса и заряд; δm — контрчлен перенормировки массы электрона. Мы учли, что вследствие калибровочной инвариантности и тождеств Уорда константы перенормировки спинорного поля и взаимодействия равны $Z_1 = Z_2$, а продольная часть калибровочного поля не перенормируется.

Уравнения Швингера-Дайсона для производящего функционала перенормированных функций Грина имеют вид

$$[Z_3(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu) + \frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu] \frac{1}{i} \frac{\delta G}{\delta J_\nu(x)} + ie_r Z_1 \text{tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{\delta G}{\delta \eta(x, x)} \right\} + J_\mu(x)G = 0, \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \delta(x-y)G + Z_1(i\hat{\partial} - m_r) \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x)} - \delta m \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x)} + \frac{e_r Z_1}{i} \gamma_\mu \frac{\delta^2 G}{\delta J_\mu(x) \delta \eta(y, x)} &= \\ &= \int dx' \eta(x, x') \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x')}. \end{aligned} \quad (55)$$

Производящее соотношение тождеств Уорда (12) для перенормированного производящего функционала сохраняет свой вид с заменой $e \rightarrow e_r$. Соответственно остаются теми же и его следствия (13), (16) и (20) с той разницей, что все величины в них являются перенормированными.

В применении к рассматриваемой нами итерационной схеме процедура перенормировки означает, что все константы перенормировки и контрчлены так же, как и производящий функционал G , имеют соответствующие итерационные разложения

$$Z_j = Z_j^{(0)} + Z_j^{(1)} + \dots, \quad \delta m = \delta m^{(0)} + \delta m^{(1)} + \dots$$

Соответственно, перенормированные уравнения главного приближения имеют вид

$$[Z_3^{(0)}(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu) + \frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu]\frac{1}{i}\frac{\delta G^{(0)}}{\delta J_\nu(x)} + ie_r Z_1^{(0)} \operatorname{tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(x, x)} \right\} = 0, \quad (56)$$

$$\delta(x - y)G^{(0)} + Z_1^{(0)}(i\hat{\partial} - m_r)\frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(y, x)} - \delta m^{(0)}\frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(y, x)} + \frac{e_r Z_1^{(0)}}{i}\gamma_\mu \frac{\delta^2 G^{(0)}}{\delta J_\mu(x)\delta \eta(y, x)} = 0. \quad (57)$$

Решение этих уравнений есть тот же функционал главного приближения (34), с той разницей, что S^c теперь является перенормированным свободным пропагатором:

$$S^c = (m_r - i\hat{\partial})^{-1}.$$

При этом

$$Z_1^{(0)} = 1, \quad \delta m^{(0)} = 0,$$

а на регуляризацию накладывается то же условие (33). Отметим, что значение константы $Z_3^{(0)}$ в рамках главного приближения остается неопределенным. Эта константа фиксируется на первом шаге итерационной схемы, когда в игру вступает пропагатор фотона.

Функционал первого шага имеет вид $G^{(1)} = P^{(1)}G^{(0)}$, и, принимая во внимание данные выше определения и результаты главного приближения, получаем для $P^{(1)}$ уравнения

$$[Z_3^{(0)}(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu) + \frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu]\frac{1}{i}\frac{\delta P^{(1)}}{\delta J_\nu(x)} + ie_r \operatorname{tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{\delta P^{(1)}}{\delta \eta(x, x)} \right\} = -J_\mu(x), \quad (58)$$

$$(i\hat{\partial} - m_r)\frac{\delta P^{(1)}}{\delta \eta(y, x)} + \frac{e_r}{i}\gamma_\mu \frac{\delta^2 P^{(1)}}{\delta J_\mu(x)\delta \eta(y, x)} + \frac{e_r}{i}\gamma_\mu S^c(x - y)\frac{\delta P^{(1)}}{\delta J_\mu(x)} = \\ = \int dx_1 \eta(x, x_1)S^c(x_1 - y) + Z_1^{(1)}\delta(x - y) + \delta m^{(1)}S^c(x - y). \quad (59)$$

Решение этих уравнений имеет тот же вид (37), что и выше, с той разницей, что коэффициентные функции полинома (37), определяющие функции Грина первого шага, являются теперь перенормированными величинами. Мы не будем выписывать уравнений для коэффициентных функций, совпадающих с приведенными выше неперенормированными уравнениями (38)-(43) с точностью до очевидных из (58) и (59) изменений.

Для трехточки $F_\mu^{(1)}$ получаем то же выражение (44), а для пропагатора фотона в импульсном пространстве получим

$$D_{\mu\nu}^{(1)}(k) = \frac{1}{-Z_3^{(0)}k^2 + \Pi(k^2)}\pi_{\mu\nu} - d_l \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2}, \quad (60)$$

где Π — та же петля свободных электронов (46)-(47) с заменой всюду $e \rightarrow e_r$ $m \rightarrow m_r$.

Выражение (49) для двухэлектронной функции $S_2^{(1)}$ не меняется (опять с той же заменой). Для поправки первого шага к пропагатору электрона получаем

$$S^{(1)}(x - y) = ie_r^2 \int dx_1 dx_2 S^c(x - x_1)\gamma_\mu S^c(x_1 - x_2)D_{\mu\nu}^{(1)}(x_1 - x_2)\gamma_\nu S^c(x_2 - y) \\ + Z_1^{(1)}S^c(x - y) - \delta m^{(1)} \int dx_1 S^c(x - x_1)S^c(x_1 - y). \quad (61)$$

Если пропагатор фотона (60) имеет полюсную особенность в точке $k^2 = \mu^2$, соответствующую частице с массой μ , то для $\Pi(k^2)$ должны выполняться условия нормировки

$$\Pi(\mu^2) = Z_3^{(0)}\mu^2, \quad \Pi'(\mu^2) = Z_3^{(0)} - 1. \quad (62)$$

В двумерном случае ($n = 2$)

$$\Pi(k^2) = -\frac{e_r^2 k^2}{\pi} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{m_r^2 - x(1-x)k^2 - i0}. \quad (63)$$

В частности, при $m_r = 0$: $\Pi(k^2) = e_r^2/\pi$, и условия нормировки (62) дают $Z_3^{(0)} = 1$, $\mu^2 = e_r^2/\pi$, что, в сущности, совпадает с результатом неперенормированной теории (52).

В четырехмерной теории $\Pi(k^2)$ есть ультрафиолетово-расходящаяся величина. В размерной регуляризации ($n = 4 - 2\epsilon$)

$$\Pi(k^2) = -\frac{e_r^2 k^2}{2\pi^2} (2\pi)^\epsilon \Gamma(\epsilon) \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{(m_r^2 - x(1-x)k^2 - i0)^\epsilon}. \quad (64)$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Условия нормировки дают нам в этом случае

$$Z_3^{(0)} = 1 - \frac{\alpha_r}{3\pi} \left\{ \frac{1}{\epsilon} + \psi(1) + \log 2\pi - \log \frac{m_r^2}{M^2} \right\}, \quad \mu^2 = 0.$$

Здесь $\alpha_r = e_r^2/4\pi$, $\psi(1)$ — константа Эйлера; M^2 — массовый параметр размерной регуляризации.

В евклидовой области $k^2 < 0$ перенормированный пропагатор фотона в четырехмерной теории имеет нефизический полюс при $k^2 \simeq -m_r^2 \exp\left\{\frac{3\pi}{\alpha_r}\right\}$ — полюс Ландау [12]. Этот полюс возникает и при ренормгрупповом суммировании [1], а также в рамках $1/N$ -разложения [13]. Наличие такого полюса является серьезной проблемой и, в частности, препятствует проведению осмысленных вычислений (либо требует весьма изощренных построений, которые представляются для электродинамики избыточными [3]). В теории возмущений по константе связи во избежание неприятностей всегда можно воспользоваться малостью α_r , но в используемой нами непертурбативной схеме единственной непротиворечивой возможностью является выбор $\alpha_r = 0$, и теория становится тривиальной.

Таким образом, в результате исследования уравнений первого шага нашей вычислительной схемы установлено, что в четырехмерной квантовой электродинамике перенормировка теории приводит к тривиальности уже на первом шаге вычислений. Этот результат, с одной стороны, свидетельствует о том, что предлагаемая схема правильно ухватывает непертурбативное содержание квантовой электродинамики, но с другой стороны, в этом варианте такая схема оказывается практически бесполезной, в отличие от обычной теории возмущений. Оказывается, однако, что существует другой вариант той же вычислительной схемы, позволяющий проводить осмысленные непертурбативные вычисления в квантовой электродинамике. Его изложению посвящена оставшаяся часть статьи.

4. Непертурбативный вакуум

Рассмотренную выше итерационную схему возможно видоизменить таким образом, что она становится “нечувствительной к тривиальности”, т.е. пригодной для непертурбативных вычислений в квантовой электродинамике. Это означает, что можно вычислять

физические величины, не входя в противоречие с тривиальностью теории, подобно тому, как это делается в теории возмущений по перенормированной константе связи.

Для того чтобы перейти к этой модификации итерационной схемы (которую мы будем называть вычислениями над непертурбативным вакуумом), разрешим уравнение Швингера-Дайсона (6) относительно первой производной производящего функционала по J_μ :

$$\frac{1}{i} \frac{\delta G}{\delta J_\mu(x)} = - \int dx_1 D_{\mu\nu}^c(x - x_1) \left\{ J_\nu(x_1)G + ie \operatorname{tr} \gamma_\nu \frac{\delta G}{\delta \eta(x_1, x_1)} \right\} \quad (65)$$

и подставим во второе уравнение Швингера-Дайсона (7). В результате мы получим “проинтегрированное по A_μ ” (если воспользоваться терминологией функционального интеграла) уравнение

$$\begin{aligned} \delta(x - y)G + (i\hat{\partial} - m) \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x)} + \frac{e^2}{i} \int dx_1 D_{\mu\nu}^c(x - x_1) \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta \eta(y, x)} \operatorname{tr} \gamma_\nu \frac{\delta G}{\delta \eta(x_1, x_1)} = \\ = \int dx_1 \left\{ \eta(x, x_1) \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x_1)} + e D_{\mu\nu}^c(x - x_1) J_\nu(x_1) \gamma_\mu \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x)} \right\}. \end{aligned} \quad (66)$$

Произведем с уравнением (66) следующее преобразование: воспользовавшись условием ферми-симметрии (35), перепишем (66) в виде

$$\begin{aligned} \delta(x - y)G + (i\hat{\partial} - m) \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x)} + ie^2 \int dx_1 D_{\mu\nu}^c(x - x_1) \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta \eta(x_1, x)} \gamma_\nu \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x_1)} = \\ = \int dx_1 \left\{ \eta(x, x_1) \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x_1)} + e D_{\mu\nu}^c(x - x_1) J_\nu(x_1) \gamma_\mu \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x)} \right\}. \end{aligned} \quad (67)$$

С точки зрения *точных* решений, уравнения (66) и (67) полностью эквивалентны, поскольку переход от (66) к (67) есть, по-сути, тождественное преобразование. Однако это не так с точки зрения используемой нами итерационной схемы, поскольку, как уже указывалось выше, соотношение (35) для каждого конечного шага итерационной схемы выполняется лишь приближенно. Поэтому уравнения (66) и (67) приводят к различным разложениям, причем в отличие от уравнения (66), приводящего, по-сути, к той же схеме вычислений, что и рассмотренная выше, уравнение (67) дает нам продуктивную непертурбативную схему вычислений физических величин.

Прежде чем переходить к построению уравнений схемы, отметим, что пропагатор фотона не содержится непосредственно в коэффициентных функциях полиномов $P^{(i)}$ итерационной схемы для уравнений (66) и (67), поскольку эти уравнения есть, как указывалось выше, результат “интегрирования” по фотонной переменной A_μ . Для вычисления пропагатора фотона и связанных с ним величин нужно использовать формулу Дайсона

$$D_{\mu\nu}(x - y) \equiv i \frac{\delta^2 G}{\delta J_\nu(y) \delta J_\mu(x)} \Big|_{J=\eta=0} = D_{\mu\nu}^c(x - y) + ie \int dx_1 D_{\mu\rho}^c(x - x_1) \operatorname{tr} \gamma_\rho F_\nu(y; x_1, x_1), \quad (68)$$

которая есть следствие простого дифференцирования соотношения (65).

В соответствии с общим принципом построения итераций, в качестве главного приближения выбираем уравнения (66) и (67), в коэффициентах которых положено $J_\mu = 0$, $\eta = 0$, т.е. уравнения

$$\delta(x - y)G^{(0)} + (i\hat{\partial} - m) \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(y, x)} + \frac{e^2}{i} \int dx_1 D_{\mu\nu}^c(x - x_1) \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta \eta(y, x)} \operatorname{tr} \gamma_\nu \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(x_1, x_1)} = 0 \quad (69)$$

и

$$\delta(x - y)G^{(0)} + (i\hat{\partial} - m)\frac{\delta G^{(0)}}{\delta\eta(y, x)} + ie^2 \int dx_1 D_{\mu\nu}^c(x - x_1)\gamma_\mu \frac{\delta}{\delta\eta(x_1, x)}\gamma_\nu \frac{\delta G^{(0)}}{\delta\eta(y, x_1)} = 0 \quad (70)$$

соответственно. Оба этих уравнения имеют решением функционал

$$G^{(0)} = \exp \left\{ \text{Tr } S^{(0)} \star \eta \right\}, \quad (71)$$

но в то время, как для характеристического уравнения, соответствующего уравнению (69), решением по-прежнему является свободный пропагатор $S^{(0)} = S^c$ с условием (33), для уравнения (70) характеристическое уравнение имеет вид

$$[S^{(0)}]^{-1}(x) = (m - i\hat{\partial})\delta(x) - ie^2 D_{\mu\nu}^c(x)\gamma_\mu S^{(0)}(x)\gamma_\nu, \quad (72)$$

т.е. является нетривиальным нелинейным уравнением для $S^{(0)}$. Поэтому мы будем называть данную схему вычислениями над непертурбативным вакуумом, в отличие от ранее рассмотренной схемы и схемы уравнения (66), в основе которых лежит свободное решение S^c .

Подробное обсуждение уравнения (72) приводится ниже, сейчас же отметим, что при $m = 0$ (киральный предел) в поперечной калибровке $d_l = 0$ это уравнение имеет простое решение

$$S^{(0)} = -1/i\hat{\partial}. \quad (73)$$

Действительно, в координатном пространстве

$$D_{\mu\nu}^c(x) = \frac{e^{-i\pi n/2}\Gamma(\frac{n}{2} - 1)}{4i\pi^{n/2}(x^2 - i0)^{n/2-1}} \left[\frac{1 + d_l}{2} g_{\mu\nu} + (1 - d_l)(\frac{n}{2} - 1) \frac{x_\mu x_\nu}{x^2 - i0} \right] \quad (74)$$

при $n > 2$ (случай $n = 2$ обсуждается ниже). В поперечной калибровке $d_l = 0$ функция $D_{\mu\nu}^c(x)$ обладает важным свойством (“ \hat{x} -поперечность”)

$$D_{\mu\nu}^c(x)\gamma_\mu \hat{x}\gamma_\nu = 0, \quad (75)$$

из которого сразу следует существование решения (73) при $m = 0$.

При $m \neq 0$ решение характеристического уравнения есть весьма сложная задача, требующая применения приближенных либо численных методов. Большой интерес представляет также поиск решений, нарушающих киральную симметрию при $m \rightarrow 0$ (см. ниже, раздел 6).

Уравнение итераций для непертурбативного вакуума в соответствии с (67) и (70) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta(x - y)G^{(i)} + (i\hat{\partial} - m)\frac{\delta G^{(i)}}{\delta\eta(y, x)} + ie^2 \int dx_1 D_{\mu\nu}^c(x - x_1)\gamma_\mu \frac{\delta}{\delta\eta(x_1, x)}\gamma_\nu \frac{\delta G^{(i)}}{\delta\eta(y, x_1)} = \\ = \int dx_1 \left\{ \eta(x, x_1) \frac{\delta G^{(i-1)}}{\delta\eta(y, x_1)} + e D_{\mu\nu}^c(x - x_1) J_\nu(x_1) \gamma_\mu \frac{\delta G^{(i-1)}}{\delta\eta(y, x)} \right\}. \end{aligned} \quad (76)$$

Решение уравнения первого шага есть $G^{(1)} = P^{(1)}G^{(0)}$, где

$$P^{(1)} = \frac{1}{2}\eta \star S_2^{(1)} \star \eta + S^{(1)} \star \eta + J_\mu \star F_\mu^{(1)} \star \eta. \quad (77)$$

С учетом уравнения главного приближения (70) и характеристического уравнения (72) получаем для трехточечной функции $F_\lambda^{(1)}$, двухэлектронной функции $S_2^{(1)}$ и поправки к пропагатору $S^{(1)}$ следующие уравнения:

$$\begin{aligned} F_\lambda^{(1)}(z; x, y) = & -e \int dx_1 D_{\lambda\mu}^c(z - x_1) S^{(0)}(x - x_1) \gamma_\mu S^{(0)}(x_1 - y) + \\ & + ie^2 \int dx_1 dy_1 D_{\mu\nu}^c(x_1 - y_1) S^{(0)}(x - x_1) \gamma_\mu F_\lambda^{(1)}(z; x_1, y_1) \gamma_\nu S^{(0)}(y_1 - y), \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} S_2^{(1)}(x, y; x', y') = & -S^{(0)}(x - y') S^{(0)}(x' - y) + \\ & + ie^2 \int dx_1 dy_1 D_{\mu\nu}^c(x_1 - y_1) S^{(0)}(x - x_1) \gamma_\mu S_2^{(1)}(x_1, y_1; x', y') \gamma_\nu S^{(0)}(y_1 - y), \end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned} S^{(1)}(x - y) = & ie^2 \int dx_1 dy_1 D_{\mu\nu}^c(x_1 - y_1) S^{(0)}(x - x_1) \gamma_\mu S_2^{(1)}(x_1, y_1; y_1, y) \gamma_\nu + \\ & + ie^2 \int dx_1 dy_1 D_{\mu\nu}^c(x_1 - y_1) S^{(0)}(x - x_1) \gamma_\mu S^{(1)}(x_1 - y_1) \gamma_\nu S^{(0)}(y_1 - y). \end{aligned} \quad (80)$$

Уравнения первого шага (78)–(80) гораздо сложнее, чем рассмотренные выше уравнения первого шага над пертурбативным вакуумом. На языке диаграмм уравнения над пертурбативным вакуумом (38)–(43) соответствуют суммированию “цепочек”, и общие решения их легко записываются в общем виде (см. (44)–(50)). Уравнения же (78)–(80) и характеристическое уравнение (72) на языке диаграмм соответствуют известному лестничному приближению. Уравнения такого типа для отдельных функций Грина многократно записывались и исследовались в литературе (см., например, работы [14]–[16], а также [17] и цитируемую там литературу) как простейшие непертурбативные аппроксимации для точных уравнений Дайсона, образующих бесконечную систему зацепляющихся уравнений [18].

В нашей трактовке, в отличие от предыдущих исследований, эти уравнения являются не результатом более или менее произвольного транкирования уравнений Дайсона, а составной частью итерационной схемы. Это обстоятельство весьма важно для решения таких проблем, как учет требований калибровочной инвариантности и перенормируемости, которые часто являются камнем преткновения при исследовании непертурбативных аппроксимаций. Так, например, часто встречается утверждение о том, что уравнение для пропагатора электрона (72) противоречит тождеству Уорда (16) и, следовательно, не согласуется с требованиями калибровочной инвариантности (см. обсуждение этого вопроса в [17]). Однако при этом не следует забывать, что сравнение *приближенного* уравнения (72) и *точного* тождества Уорда (16) не является корректным, а в отсутствие итерационной схемы некорректной, строго говоря, является и сама постановка вопроса. В нашей итерационной схеме этот вопрос решается очень просто. Как следует из (32), тождество Уорда для трехточки $F_\mu^{(i)}$ в рамках рассматриваемой итерационной схемы имеет вид

$$\frac{i}{d_l} \partial^2 \partial_\nu F_\nu^{(i)}(x; x', y') = e[\delta(x - y') - \delta(x - x')] S^{(i-1)}(x' - y'). \quad (81)$$

Легко проверить, что для $i = 1$ соотношение (81) и уравнение (72) согласуются с уравнением первого шага (78) для $F_\mu^{(1)}$, то есть требование калибровочной инвариантности выполнено.

Обратимся к перенормировкам. Перенормированное уравнение для $\delta G/\delta J_\mu$ имеет вид

$$\frac{1}{i} \frac{\delta G}{\delta J_\mu(x)} = - \int dx_1 D_{\mu\nu}^c(x - x_1 | Z_3) \left\{ J_\nu(x_1) G + Z_1 i e_r \text{tr} \gamma_\nu \frac{\delta G}{\delta \eta(x_1, x_1)} \right\}, \quad (82)$$

где

$$D_{\mu\nu}^c(Z_3) = [Z_3(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu) + \frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu]^{-1}.$$

Соответственно, перенормированный вариант уравнения Швингера-Дайсона (67) есть

$$\begin{aligned} & \delta(x - y)G + Z_1(i\hat{\partial} - m_r) \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x)} - \delta m \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x)} + \\ & + i(e_r Z_1)^2 \int dx_1 D_{\mu\nu}^c(x - x_1 | Z_3) \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta \eta(x_1, x)} \gamma_\nu \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x_1)} = \\ & = \int dx_1 \left\{ \eta(x, x_1) \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x_1)} + Z_1 e D_{\mu\nu}^c(x - x_1 | Z_3) J_\nu(x_1) \gamma_\mu \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x)} \right\}. \end{aligned} \quad (83)$$

Перенормированное уравнение главного приближения есть

$$\begin{aligned} & \delta(x - y)G^{(0)} + Z_1^{(0)}(i\hat{\partial} - m_r) \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(y, x)} - \delta m^{(0)} \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(y, x)} + \\ & + i(e_r Z_1^{(0)})^2 \int dx_1 D_{\mu\nu}^c(x - x_1 | Z_3^{(0)}) \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta \eta(x_1, x)} \gamma_\nu \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(y, x_1)} = 0. \end{aligned} \quad (84)$$

Уравнение (84) имеет своим решением тот же функционал (71), где $S^{(0)}$ есть решение перенормированного характеристического уравнения

$$[S^{(0)}]^{-1}(x) = (Z_1^{(0)}(m_r - i\hat{\partial}) + \delta m^{(0)})\delta(x) - i(e_r Z_1^{(0)})^2 D_{\mu\nu}^c(x | Z_3^{(0)}) \gamma_\mu S^{(0)}(x) \gamma_\nu. \quad (85)$$

Перенормированный фотонный пропагатор определяется по формуле Дайсона

$$D_{\mu\nu}(x - y) = D_{\mu\nu}^c(x - y | Z_3) + i e_r Z_1 \int dx_1 D_{\mu\rho}^c(x - x_1 | Z_3) \text{tr} \gamma_\rho F_\nu(y; x_1, x_1). \quad (86)$$

Поскольку в главном порядке $F_\nu^{(0)} \equiv 0$, то

$$D_{\mu\nu}^{(0)} = D_{\mu\nu}^c(Z_3^{(0)}) = \frac{1}{Z_3^{(0)}\partial^2} (g_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\partial^2}) + d_l \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{(\partial^2)^2}.$$

Из условия нормировки пропагатора фотона получаем

$$Z_3^{(0)} = 1,$$

т.е. во всех предыдущих формулах можно заменить $D_{\mu\nu}^c(Z_3^{(0)})$ на $D_{\mu\nu}^c$.

В общем случае перенормированный пропагатор фотона в импульсном пространстве есть

$$D_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\nu}^c(k | Z_3) + i e_r Z_1 D_{\mu\rho}^c(k | Z_3) \int \frac{dp}{(2\pi)^n} \text{tr} \left\{ \gamma_\rho F_\nu(k; p) \right\},$$

где $F_\nu(k; p)$ — фурье-образ трехточки:

$$F_\nu(z; x, y) = \int \frac{dp}{(2\pi)^n} \frac{dq}{(2\pi)^n} \frac{dk}{(2\pi)^n} e^{-ipx+iqy-ikz} (2\pi)^n \delta(p - q + k) F_\nu(k; p). \quad (87)$$

Из тождества Уорда следует поперечность

$$ie_r Z_1 \int \frac{dp}{(2\pi)^n} \text{tr} \left\{ \gamma_\rho F_\nu(k; p) \right\} = \pi_{\rho\nu} f(k^2)$$

и с учетом данного определения функции $f(k^2)$ получаем

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{1+f(k^2)}{Z_3 k^2} \pi_{\mu\nu} - d_l \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2}. \quad (88)$$

Условие нормировки на нулевую массу (“нормировка на фотон”) дает нам

$$Z_3 = 1 + f(0). \quad (89)$$

Константа Z_1 и контрчлен перенормировки массы δm связаны с нормировкой пропагатора электрона. В общем случае пропагатор электрона в импульсном пространстве определяется двумя скалярными функциями

$$S(p) = \frac{1}{b(p^2) - a(p^2)\hat{p}} = \frac{b(p^2) + a(p^2)\hat{p}}{b^2(p^2) - a^2(p^2)p^2}.$$

Если пропагатор $S(p)$ имеет полюс в точке $p^2 = m_r^2$, то условия нормировки в этой точке имеют вид

$$b(m_r^2) = m_r a(m_r^2), \quad (90)$$

$$a(m_r^2) + 2m_r^2 a'(m_r^2) - 2m_r b'(m_r^2) = 1. \quad (91)$$

Киральный предел в перенормированной теории означает, что в перенормированном лагранжиане (53) исчезают члены, нарушающие киральную инвариантность:

$$Z_1 m_r + \delta m \rightarrow 0. \quad (92)$$

Перенормированное характеристическое уравнение (85) в киральном пределе имеет в поперечной калибровке $d_l = 0$ кирально-симметричное решение

$$S^{(0)} = -\frac{1}{Z_1^{(0)} \hat{p}}. \quad (93)$$

Условия нормировки (90) и (91) дают нам для этого решения

$$Z_1^{(0)} = 1, \quad m_r = \delta m^{(0)} = 0,$$

т.е. оно совпадает с неперенормированным решением (73).

Перенормированные уравнения для коэффициентных функций первого шага имеют вид

$$\begin{aligned} F_\lambda^{(1)}(z; x, y) &= -e_r Z_1^{(0)} \int dx_1 D_{\lambda\mu}^c(z - x_1) S^{(0)}(x - x_1) \gamma_\mu S^{(0)}(x_1 - y) + \\ &+ i(e_r Z_1^{(0)})^2 \int dx_1 dy_1 D_{\mu\nu}^c(x_1 - y_1) S^{(0)}(x - x_1) \gamma_\mu F_\lambda^{(1)}(z; x_1, y_1) \gamma_\nu S^{(0)}(y_1 - y), \end{aligned} \quad (94)$$

$$S_2^{(1)}(x, y; x', y') = -S^{(0)}(x - y')S^{(0)}(x' - y) + \\ + i(e_r Z_1^{(0)})^2 \int dx_1 dy_1 D_{\mu\nu}^c(x_1 - y_1) S^{(0)}(x - x_1) \gamma_\mu S_2^{(1)}(x_1, y_1; x', y') \gamma_\nu S^{(0)}(y_1 - y), \quad (95)$$

$$S^{(1)}(x - y) = i(e_r Z_1^{(0)})^2 \int dx_1 dy_1 D_{\mu\nu}^c(x_1 - y_1) S^{(0)}(x - x_1) \gamma_\mu S_2^{(1)}(x_1, y_1; y, y) \gamma_\nu + \\ + \int dx_1 S^{(0)}(x - x_1) \left\{ [Z_1^{(1)}(i\partial - m_r) + \delta m^{(1)}] S^{(0)}(x_1 - y) + \right. \\ \left. + ie_r^2 Z_1^{(0)} \int dy_1 [2Z_1^{(1)} D_{\mu\nu}^c(x_1 - y_1) + Z_1^{(0)} D_{\mu\nu}^c(x_1 - y_1 | Z_3^{(1)})] \gamma_\mu S^{(0)}(x_1 - y_1) \gamma_\nu S^{(0)}(y_1 - y) \right\} + \\ + i(e_r Z_1^{(0)})^2 \int dx_1 dy_1 D_{\mu\nu}^c(x_1 - y_1) S^{(0)}(x - x_1) \gamma_\mu S^{(1)}(x_1 - y_1) \gamma_\nu S^{(0)}(y_1 - y). \quad (96)$$

Мы видим, что калибровочная инвариантность накладывает весьма жесткие условия: константа $Z_1^{(0)}$ является единственной константой перенормировки для двух уравнений первого шага (94) и (95). В уравнении для $S^{(1)}$ появляются новые константы перенормировки $Z_1^{(1)}$ и $Z_3^{(1)}$ (последняя фиксируется условием (89)), а также контрчлен перенормировки массы первого шага $\delta m^{(1)}$.

5. Вершина

Перейдем от трехточечной функции F_λ к ампутиированной трехточке — вершинной функции (19). Согласно (94), уравнение первого шага для вершины имеет вид

$$\Gamma_\lambda(z; x, y) = -e\gamma_\lambda\delta(x - y)\delta(x - z) + \\ + ie^2 D_{\mu\nu}^c(x - y) \int dx_1 dy_1 \gamma_\mu S(x - x_1) \Gamma_\lambda(z; x_1, y_1) S(y_1 - y) \gamma_\nu. \quad (97)$$

В этом разделе мы будем пользоваться упрощенными обозначениями

$$\Gamma_\lambda \equiv \Gamma_\lambda^{(1)}, \quad e \equiv e_r Z_1^{(0)}, \quad S \equiv S^{(0)}.$$

В импульсном пространстве уравнение (97) имеет вид

$$\Gamma_\lambda(k; p) = -e\gamma_\lambda + ie^2 \int \frac{dp'}{(2\pi)^n} D_{\mu\nu}^c(p - p') \gamma_\mu S(p') \Gamma_\lambda(k; p') S(p' + k) \gamma_\nu. \quad (98)$$

Здесь k — импульс фотона; p — импульс электрона (ср. определение фурье-образа трехточки (87)). Уравнение (98) известно в литературе как уравнение Эдвардса [15]. Отметим еще раз, что в нашем подходе это уравнение не является результатом произвольного транкирования, а есть одно из уравнений итерационной схемы. Пропагатор электрона S в этом уравнении есть решение характеристического уравнения (85), определяющего главное вакуумное приближение.

Мы рассмотрим решение уравнения для вершины (97) при малых k с указанным выше кирально-симметричным пропагатором (93) в поперечной калибровке $d_l = 0$. Для решения этого уравнения удобнее перейти к функции $\Phi_\lambda(k; p)$, определенной соотношением

$$\Gamma_\lambda(k; p) \equiv \hat{p}\Phi_\lambda(k; p)(\hat{p} + \hat{k}).$$

Разложим Φ_λ вблизи $k = 0$

$$\Phi_\lambda(k; p) = \Phi_\lambda(p) + k_\rho \Phi_{\lambda\rho}(p) + \dots$$

Здесь

$$\Phi_\lambda(p) \equiv \Phi_\lambda(0; p), \quad \Phi_{\lambda\rho}(p) \equiv \partial_\rho^k \Phi_\lambda(k; p)|_{k=0}.$$

При этом

$$\Gamma_{\lambda\rho}(p) \equiv \partial_\rho^k \Gamma_\lambda(k; p)|_{k=0} = \hat{p} \Phi_{\lambda\rho}(p) \hat{p} + \hat{p} \Phi_\lambda(p) \gamma_\rho. \quad (99)$$

Уравнения для $\Phi_\lambda(p)$ и $\Phi_{\lambda\rho}$ имеют вид

$$\hat{p} \Phi_\lambda(p) \hat{p} = -e \gamma_\lambda + ie_r^2 \int \frac{dp'}{(2\pi)^n} D_{\mu\nu}^c(p - p') \gamma_\mu \Phi_\lambda(p') \gamma_\nu \quad (100)$$

и

$$\hat{p} \Phi_{\lambda\rho}(p) \hat{p} = -\hat{p} \Phi_\lambda(p) \gamma_\rho + ie_r^2 \int \frac{dp'}{(2\pi)^n} D_{\mu\nu}^c(p - p') \gamma_\mu \Phi_{\lambda\rho}(p') \gamma_\nu \quad (101)$$

соответственно.

Для решения уравнения (100) удобнее перейти в координатное пространство

$$-\hat{\partial} \Phi_\lambda(x) \hat{\partial} = -e \gamma_\lambda \delta(x) + ie_r^2 D_{\mu\nu}^c(x) \gamma_\mu \Phi_\lambda(x) \gamma_\nu. \quad (102)$$

Здесь $D_{\mu\nu}^c(x)$ определен формулой (74). Благодаря свойству “ \hat{x} -поперечности” (см. (75)), все итерации уравнения (102) обращаются в ноль. Действительно, нулевое приближение есть

$$\Phi_\lambda^0(p) = -e \frac{1}{\hat{p}} \gamma_\lambda \frac{1}{\hat{p}} = e \partial_\lambda^p \frac{1}{\hat{p}}$$

и, соответственно, в x -пространстве

$$\Phi_\lambda^0(x) = e \frac{ie^{-i\pi n/2} \Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}} \frac{x_\lambda \hat{x}}{(x^2 - i0)^{n/2}} \sim \hat{x}.$$

Следовательно,

$$\Phi_\lambda = \Phi_\lambda^0$$

и

$$\Gamma_\lambda(p) = -e \gamma_\lambda. \quad (103)$$

Перейдем к решению уравнения (101) для $\Phi_{\lambda\rho}$. Мы ограничимся случаем $n = 4$. Это уравнение также удобнее решать в координатном пространстве, где оно имеет вид

$$-\hat{\partial} \Phi_{\lambda\rho}(x) \hat{\partial} = \frac{e}{2\pi^2} \frac{\gamma_\lambda \hat{x} \gamma_\rho}{(x^2 - i0)^2} + ie_r^2 D_{\mu\nu}^c(x) \gamma_\mu \Phi_{\lambda\rho}(x) \gamma_\nu. \quad (104)$$

(Мы учли результат решения уравнения для $\Phi_\lambda(p)$). Здесь

$$D_{\mu\nu}^c(x) = \frac{1}{4i\pi^2(x^2 - i0)} \left(\frac{g_{\mu\nu}}{2} + \frac{x_\mu x_\nu}{x^2 - i0} \right). \quad (105)$$

Разлагая $\Phi_{\lambda\rho}$ по спинорным структурам

$$\Phi_{\lambda\rho} = \Phi_{\lambda\rho\sigma} \gamma_\sigma + \Phi_{\lambda\rho\sigma}^5 \gamma_5 \gamma_\sigma,$$

получаем два уравнения:

$$(g_{\sigma\tau}\partial^2 - 2\partial_\sigma\partial_\tau)\Phi_{\lambda\rho\sigma}(x) = \frac{e}{2\pi^2} \frac{g_{\lambda\tau}x_\rho - g_{\lambda\rho}x_\tau + g_{\rho\tau}x_\lambda}{(x^2 - i0)^2} - \frac{2\alpha_r}{\pi} \frac{1}{x^2 - i0} (g_{\sigma\tau} - \frac{x_\sigma x_\tau}{x^2 - i0})\Phi_{\lambda\rho\sigma}(x), \quad (106)$$

$$(g_{\sigma\tau}\partial^2 - 2\partial_\sigma\partial_\tau)\Phi_{\lambda\rho\sigma}^5(x) = \frac{ie}{2\pi^2} \epsilon_{\lambda\rho\sigma\tau} \frac{x_\sigma}{(x^2 - i0)^2} - \frac{2\alpha_r}{\pi} \frac{1}{x^2 - i0} (g_{\sigma\tau} - \frac{x_\sigma x_\tau}{x^2 - i0})\Phi_{\lambda\rho\sigma}^5(x). \quad (107)$$

Здесь

$$\alpha_r = \frac{e_r^2}{4\pi}.$$

Так же, как и в уравнении для Φ_λ , итерации уравнения (106) для $\Phi_{\lambda\rho\sigma}$ обращаются в ноль, и решение его есть

$$\Phi_{\lambda\rho\sigma}(x) = -\frac{e}{4\pi^2} \frac{x_\lambda x_\rho x_\sigma}{(x^2 - i0)^2}.$$

Уравнение (107) для $\Phi_{\lambda\rho\sigma}^5$ имеет решение

$$\Phi_{\lambda\rho\sigma}^5(x) = \frac{ie}{4\pi(2\pi - \alpha_r)} \epsilon_{\lambda\rho\sigma\tau} \frac{x_\tau}{x^2 - i0}.$$

Переходя в импульсное пространство, получаем окончательно для $\Gamma_{\lambda\rho}$ (см. (99)):

$$\Gamma_{\lambda\rho}(p) = ie \frac{\alpha_r}{2\pi - \alpha_r} \epsilon_{\lambda\rho\sigma\tau} \gamma_5 \gamma_\sigma \frac{p_\tau}{p^2 + i0}. \quad (108)$$

Матричный элемент вершинной функции $\Gamma_\lambda(k; p)$ при малых k_μ определяет два форм-/фактора f_1 и f_2

$$\bar{u}(q)\Gamma_\lambda u(p) \simeq -e_r f_1 \bar{u}(q) \gamma_\lambda u(p) - \frac{e_r}{2m_r} f_2 \bar{u}(q) [\gamma_\lambda, \hat{k}] u(p), \quad (109)$$

связанных соответственно с физическим зарядом и с магнитным моментом (см., например, [19]). Здесь $u(p)$ — решения уравнения Дирака $(\hat{p} - m_r)u(p) = 0$. Сравнивая с вычисленной нами вершиной, мы получаем при $k = 0$

$$e_r f_1 = e = e_r Z_1^{(0)}.$$

При нормировке на заряд e_r мы полагаем $f_1 = 1$ и, следовательно,

$$Z_1^{(0)} = 1.$$

Это весьма важное обстоятельство означает, что нормировка вершинной функции на перенормированный заряд дает в нашем подходе то же значение константы перенормировки спинорного поля, что и условие нормировки волновой функции (91), т.е. наша вычислительная схема для перенормированной теории согласуется с требованиями, накладываемыми калибровочной инвариантностью.

Что касается второго формфактора f_2 , определяющего поправки к магнитному моменту, то у безмассовой частицы магнитного момента, конечно, нет. Однако вычисленный

нами первый член разложения вершинной функции по k_μ (см. (108)) тем не менее позволяет дать непертурбативную оценку аномального магнитного момента в киральном пределе. Уточним постановку вопроса. В разложении f_2 по степеням α_r

$$f_2 = C_1 \frac{\alpha_r}{\pi} + C_2 \left(\frac{\alpha_r}{\pi} \right)^2 + \dots$$

коэффициенты C_i , начиная со второго, зависят от массы. (Так, для мюона и электрона они даже имеют разные знаки, см., например, [20].) Но, в принципе, можно рассмотреть своеобразный “киральный предел” для этих коэффициентов, т.е. их значения при $m_r \rightarrow 0$. Именно о такой оценке и идет речь.

Для того чтобы получить эту оценку, произведем со вторым членом в формуле (109) тождественное преобразование с использованием уравнения Дирака

$$\frac{1}{m_r} \bar{u}(q)[\gamma_\lambda, \hat{k}] u(p) = \frac{1}{p^2} \bar{u}(q)[\gamma_\lambda, \hat{k}] \hat{p} u(p). \quad (110)$$

Для массивных частиц это просто тождество благодаря уравнению Дирака для $u(p)$. Однако для правой части можно использовать результат (108), полученный для безмассовой частицы. Сравнивая коэффициенты при $\epsilon_{\lambda\rho\sigma\tau}$, получаем

$$f_2 = \frac{\alpha_r}{2\pi - \alpha_r}. \quad (111)$$

Первый член разложения по α_r совпадает с швингеровской поправкой (см., например, [20]). В формальном пределе $\alpha_r \rightarrow \infty$ полный магнитный момент согласно формуле (111) обращается в ноль, т.е. происходит своеобразная экранировка магнитного момента в пределе сильной связи. Интересно отметить, что подобная экранировка хромомагнитных моментов кварков отмечалась в некоторых непертурбативных моделях квантовой хромодинамики [21], а также в релятивистской модели кваркония [22].

6. Динамическое нарушение киральной симметрии

В этом разделе мы рассмотрим проблему динамического нарушения киральной симметрии в квантовой электродинамике в рамках предложенной схемы вычислений над непертурбативным вакуумом. Отметим сразу, что наше рассмотрение не охватывает всех аспектов этой сложной проблемы, в частности, не рассматривается вопрос о связи динамического нарушения киральной симметрии и проблемы тривиальности. Рассмотрение этого и ряда других вопросов требует исследования уравнений первого шага для высших функций Грина, мы же ограничимся здесь исследованием уравнения главного приближения.

Перенормированное уравнение главного приближения для пропагатора электрона (характеристическое уравнение) имеет вид

$$S^{-1}(x) = (m - Z i \hat{\partial}) \delta(x) - ie^2 D_{\mu\nu}^c(x) \gamma_\mu S(x) \gamma_\nu, \quad (112)$$

Здесь и всюду в этом разделе мы обозначаем

$$S \equiv S^{(0)}, \quad Z \equiv Z_1^{(0)}, \quad m \equiv Z_1^{(0)}m_r + \delta m^{(0)}, \quad e \equiv e_r Z_1^{(0)},$$

а свободный пропагатор $D_{\mu\nu}^c(x)$ определен формулой (74).

В общем случае (если не рассматривать решения, нарушающие четность) S можно представить в виде

$$S = i\hat{\partial}A + B,$$

где A и B — скалярные функции одной переменной. Соответственно, для обратного пропагатора имеем

$$S^{-1} = -i\hat{\partial}a + b,$$

где в импульсном пространстве функции a и b связаны с функциями A и B соотношениями

$$A = \frac{a}{b^2 - a^2 p^2}, \quad B = \frac{b}{b^2 - a^2 p^2}. \quad (113)$$

Принимая во внимание (74) и с учетом свойств матриц Дирака, характеристическое уравнение (112) в координатном пространстве можно представить в виде системы двух уравнений:

$$i\hat{\partial}a = Zi\hat{\partial}\delta(x) - 2\alpha d_l \frac{e^{-i\pi n/2}\Gamma(\frac{n}{2})}{[\pi(x^2 - i0)]^{n/2-1}} \cdot i\hat{\partial}A, \quad (114)$$

$$b = m\delta(x) + \alpha(1 - n - d_l) \frac{e^{-i\pi n/2}\Gamma(\frac{n}{2} - 1)}{[\pi(x^2 - i0)]^{n/2-1}} \cdot B. \quad (115)$$

Здесь обозначено

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi}.$$

Как видно из уравнений (114) и (115), для характеристического уравнения (112) существуют две выделенные калибровки:

1. Поперечная калибровка Ландау $d_l = 0$. В этой калибровке уравнение (114) становится тривиальным и имеет решение $a = Z\delta(x)$.

2. Калибровка $d_l = 1 - n^2$. В этой калибровке $b = m\delta(x)$, в том случае, когда произведение $B(x) \cdot (x^2 - i0)^{1-n/2}$ хорошо определено в смысле обобщенных функций, т.е. отсутствуют расходимости. В противном случае, в отличие от калибровки Ландау, мы имеем неопределенность вида $0 \cdot \infty$, раскрытие которой осуществляется путем регуляризации, и мы можем утверждать лишь, что в этой калибровке $b(p^2) = \text{const}$.

В дальнейшем (в данном разделе) мы будем рассматривать четырехмерный случай. При $n = 4$, умножая уравнения (114) и (115) на x^2 , получаем уравнения

$$x^2 i\hat{\partial}a = -\frac{2\alpha}{\pi} d_l i\hat{\partial}A, \quad (116)$$

$$x^2 b = -\frac{\alpha}{\pi} (3 + d_l) B. \quad (117)$$

Такое умножение можно рассматривать как своего рода регуляризацию потенциально сингулярных произведений в правой части уравнений (114) и (115). Кроме того, при

²При $n = 4$ это калибровка Соловьева-Йенни [23].

переходе в p -пространство мы получаем для $a(p^2)$ и $b(p^2)$, с учетом (113), систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$t \frac{d^2 a}{dt^2} + 3 \frac{da}{dt} = \frac{\alpha}{2\pi} d_l \frac{a}{b^2 - a^2 t}, \quad (118)$$

$$t \frac{d^2 b}{dt^2} + 2 \frac{db}{dt} = \frac{\alpha}{4\pi} (3 + d_l) \frac{b}{b^2 - a^2 t}. \quad (119)$$

Здесь $t = p^2$.

Эта весьма сложная система нелинейных дифференциальных уравнений имеет наиболее простой вид в поперечной калибровке Ландау $d_l = 0$. В дальнейшем мы будем использовать именно эту калибровку. Как уже указывалось выше, в поперечной калибровке $a = Z$, и система (118)-(119) сводится к уравнению для b

$$t \frac{d^2 b}{dt^2} + 2 \frac{db}{dt} = \frac{3\alpha}{4\pi} \frac{b}{b^2 - Z^2 t}. \quad (120)$$

Это уравнение всегда имеет тривиальное решение $b \equiv 0$, которое при $t = 0$ соответствует рассмотренному выше кирально-симметричному решению (93). Возможно также существование нетривиальных решений, ультрафиолетовую асимптотику которых нетрудно определить. Действительно, при $t \rightarrow \infty$ возможны два варианта:

- а) $b^2 \sim t$;
- б) $b^2 \ll |t|$.

Нетрудно показать, что третья возможность $b^2 \gg |t|$ с точностью до логарифмов приводит к варианту а).

Рассмотрим вариант б). Тогда в ультрафиолетовой области $t \rightarrow \infty$ уравнение (120) сводится к эйлерову уравнению, и асимптотическое поведение $b(t)$ есть

$$b \sim t^{-1/2(1-\sqrt{1-3\alpha_r/\pi})} \text{ при } \alpha_r < \pi/3, \quad (121)$$

$$b \sim t^{-1/2} \log t \text{ при } \alpha_r = \pi/3 \quad (122)$$

и

$$b \sim t^{-1/2} \sin \left\{ \frac{\sqrt{3\alpha_r/\pi - 1}}{2} \log t \right\} \text{ при } \alpha_r > \pi/3. \quad (123)$$

Отметим, что здесь $\alpha_r \equiv \frac{e_r^2}{4\pi}$ — перенормированная постоянная тонкой структуры.

Обращает на себя внимание существование критического значения

$$\alpha_r = \alpha_c \equiv \pi/3, \quad (124)$$

при котором происходит смена режима ультрафиолетового поведения. Существование такой критической точки впервые было отмечено в работе [24]. В работах [4] эта смена режима была связана с динамическим нарушением киральной симметрии в квантовой электродинамике. (См. также [17], [7], где подробно обсуждается этот подход и дана обширная библиография. Новейшее развитие этого подхода, а также библиографию последних лет можно найти в [25].) Во всех указанных работах рассмотрена схема с ультрафиолетовым обрезанием в евклидовом пространстве. Основным вычислительным ансатцем является линеаризация уравнения (120), состоящая в аппроксимации³

³Отметим, что в схеме с обрезанием $Z = 1$.

$$\frac{b}{b^2 - t} \approx \frac{b}{m^2 - t},$$

в левой части уравнения (120). Здесь $m \equiv b(0)$.

После такой линеаризации уравнение для $b(t)$ становится гипергеометрическим уравнением. Граничные условия для этого уравнения определяются из интегрального уравнения, каковым является уравнение (72) в импульсном пространстве⁴. Асимптотическое поведение решений линеаризованного уравнения дается теми же формулами (121)-(123), что служит основным аргументом в пользу линеаризованной версии (по крайней мере, в ультрафиолетовой области). Сами решения при этом, конечно, существенно зависят от параметра обрезания, который входит в граничные условия. Тем не менее удается показать, что в критической точке $\alpha_c = \pi/3$ происходит фазовый переход, соответствующий нарушению киральной симметрии. Ниже критической точки (слабая связь) в киральном пределе существует только кирально-симметричное решение, а выше критической точки (сильная связь), когда ультрафиолетовая асимптотика становится осциллирующей, возникают решения с динамической массой $b \neq 0$, т.е. происходит спонтанное нарушение киральной симметрии.

Мы рассмотрим эту проблему в псевдоевклидовом пространстве Минковского для перенормированного уравнения (112)⁵. При этом мы будем использовать другой подход к исследованию уравнения для пропагатора, который тем не менее подобен методу вышеуказанных работ тем, что он также основан на линеаризации нелинейного уравнения (112). Поскольку мы работаем с перенормированной теорией, то наши результаты не зависят от обрезания. В общем они согласуются с результатами линеаризованной неперенормированной теории в евклидовой области за единственным исключением: в докритической области $\alpha_r < \alpha_c$ также оказывается возможным динамическое нарушение киральной симметрии, но при выполнении некоторого условия на величину α_r . Исследование этого условия требует изучения уравнения для вершинной функции с непертурбативным пропагатором электрона и выходит за рамки данной работы.

Мы будем решать уравнение (112) в поперечной калибровке $d_l = 0$ при $m \neq 0$ путем итераций, причем основой для итерационного решения будет точное решение при $m = 0$

$$S_0^{-1} = -Z\hat{p}.$$

При этом линеаризация состоит в весьма естественной с точки зрения итерационного решения процедуре: исходя из представления обратного пропагатора

$$S^{-1} = S_0^{-1} + \Sigma,$$

мы аппроксимируем

$$S = [S_0^{-1} + \Sigma]^{-1} \approx S_0 - S_0 \star \Sigma \star S_0 = -\frac{\hat{p}}{Z(p^2 + i0)} - \frac{\hat{p}\Sigma\hat{p}}{Z^2(p^2 + i0)^2}.$$

⁴При формулировке этих граничных условий существенным моментом является использование евклидовой версии теории.

⁵Этот момент представляется нам весьма существенным, поскольку детальное исследование неперенормированного уравнения (72) в евклидовой области при $m = 0$ (см., например, [26]) показывает, что его решения обладают неполюсной комплексной особенностью и, следовательно, евклидов разворот становится проблематичным.

Ясно, что такая аппроксимация может быть вполне законной только в ультрафиолетовой области $|p^2| \gg \mu^2$, где μ^2 — некий масштаб, который можно трактовать как инфракрасное обрезание. Поскольку непертурбативной областью квантовой электродинамики является ультрафиолетовая область, то естественным является предположение о том, что ультрафиолетовое поведение ответственно за основные непертурбативные эффекты, в том числе и связанные со спонтанным нарушением симметрии.

Используя свойство \hat{x} -поперечности (см. (75)), легко показать, что $\Sigma = 1 \cdot \sigma$, и для скалярной функции σ мы получаем в координатном пространстве уравнение

$$\sigma(x^2) = m\delta(x) + \frac{3\alpha_r}{\pi} \frac{1}{x^2 - i0} \cdot \phi(x^2), \quad (125)$$

где

$$\phi(p^2) \equiv \frac{\sigma(p^2)}{p^2 + i0}.$$

Четырехмерная дельта-функция $\delta(x)$ в пространстве Минковского является лоренц-инвариантной обобщенной функцией (см., например, [27]), и для решения уравнения (125) удобно использовать представление дельта-функции как предела последовательности функций переменной x^2 . В качестве такого представления выберем формулу

$$\delta^4(x) = \frac{i}{\pi^2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda(x^2 - i0)^{\lambda-2}, \quad (126)$$

в справедливости которой легко убедиться с помощью преобразования Фурье функции $(x^2 - i0)^{\lambda-2}$ (см., например, [28]).

Частное решение (решение неоднородного уравнения) будем искать в виде

$$\sigma_0(x^2) = C_0(x^2 - i0)^{\lambda-2}$$

при малых λ . Как мы увидим в дальнейшем, $1/\lambda$ играет роль параметра регуляризации. Производя соответствующие преобразования Фурье (см. [28]), получаем

$$\phi_0(x^2) = \frac{C_0}{4\lambda(1-\lambda)} (x^2 - i0)^{\lambda-1}, \quad (127)$$

и, подставляя в уравнение (125), получаем окончательно

$$C_0 = -\frac{4im}{3\pi\alpha_r} \lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3).$$

Следовательно, решение неоднородного уравнения есть

$$\sigma_0(p^2) = -\frac{4\pi m \lambda}{3\alpha_r}. \quad (128)$$

Полное решение уравнения (125) есть сумма σ_0 и общего решения однородного уравнения. Решение однородного уравнения ищем в виде

$$\bar{\sigma}(x^2) = C(x^2 - i0)^{\beta-2}.$$

Соответственно $\bar{\phi}(x^2)$ определяется той же формулой (127) с заменой $\lambda \rightarrow \beta$. Для параметра β получаем уравнение

$$\beta(1-\beta) = \frac{3\alpha_r}{4\pi}. \quad (129)$$

Если выбрать решение с $C = 0$, т.е. ограничиться рассмотрением частного решения (128), то условия нормировки (90) и (91) дадут нам⁶

$$\delta m^{(0)} = \frac{3\alpha_r}{4\pi\lambda} m_r, \quad Z = 1,$$

и, соответственно, в этом случае

$$S^{-1} = -\hat{p} + m_r,$$

причем в киральном пределе (см. (92)), когда $m \rightarrow 0$, получаем $m_r = 0$, т.е. такое решение является кирально-симметричным.

Если же допустить решения с $C \neq 0$, то ситуация существенно меняется. Сразу же отметим, что решения однородного уравнения в p -пространстве сингулярны при $p = 0$, однако по самому смыслу сделанного нами приближения все последующие формулы можно интерпретировать, как уже указывалось выше, лишь при $|p^2| \gg \mu^2$, где μ^2 — инфракрасное обрезание.

Итак, в зависимости от величины параметра α_r , мы имеем для массовой функции электрона:

1. Если $\alpha_r < \alpha_c$ (слабая связь), то

$$b(p^2) = -\frac{4\pi m\lambda}{3\alpha_r} + C(p^2 + i0)^{-\beta}, \quad (130)$$

где $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha_r/\alpha_c})$ ⁷.

2. При $\alpha_r = \alpha_c = \pi/3$

$$b(p^2) = -\frac{4\pi m\lambda}{3\alpha_r} + \frac{C \log \frac{p^2+i0}{M^2}}{(p^2 + i0)^{1/2}}. \quad (131)$$

3. При $\alpha_r > \alpha_c$ (сильная связь)

$$b(p^2) = -\frac{4\pi m\lambda}{3\alpha_r} + \frac{C \sin \left\{ \frac{\omega}{2} \log \frac{p^2+i0}{M^2} \right\}}{(p^2 + i0)^{1/2}}. \quad (132)$$

Здесь

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha_r}{\alpha_c} - 1}.$$

Во всех трех случаях $a = Z$.

Далее мы будем рассматривать киральный предел $m \equiv Zm_r + \delta m^{(0)} = 0$. Параметры решений фиксируются условиями нормировки электронного пропагатора (90)–(91). Если по примеру схемы с ультрафолетовым обрезанием [4], [17], [25] положить $Z = 1$, то условия нормировки принимают вид

$$b(m_r^2) = m_r, \quad m_r b'(m_r^2) = 0. \quad (133)$$

⁶Формула для контраполена δm демонстрирует роль λ как параметра регуляризации, устраняющей ультрафиолетовую расходимость. Поэтому представление дельта-функции формулой (126) можно рассматривать как своеобразную аналитическую регуляризацию.

⁷Мы берем корень уравнения (129), отвечающий ультрафиолетовой асимптотике точного решения, см. (121).

В случае слабой связи ($\alpha_r < \alpha_c$) из условий нормировки следует, что либо $C = 0$, либо $m_r = 0$, т.е. в этом случае нет решений с нарушением киральной симметрии. В критическом случае $\alpha_r = \alpha_c$ возможно решение с $m_r \neq 0$, которое имеет вид

$$b(p^2) = \frac{m_r^2}{(p^2 + i0)^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{2} \log \frac{p^2 + i0}{m_r^2} \right). \quad (134)$$

При $\alpha_r > \alpha_c$ (сильная связь) также есть решение с нарушенной киральной симметрией, которое имеет вид

$$b(p^2) = \frac{m_r^2}{(p^2 + i0)^{1/2}} \left[\cos \left\{ \frac{\omega}{2} \log \frac{p^2 + i0}{m_r^2} \right\} + \frac{1}{\omega} \sin \left\{ \frac{\omega}{2} \log \frac{p^2 + i0}{m_r^2} \right\} \right]. \quad (135)$$

Как мы видим, эти результаты соответствуют результатам неперенормированной теории с обрезанием в евклидовом пространстве (см. [4], [17], [25]). Но в перенормированной теории нет никаких априорных оснований полагать $Z = 1$. Если отказаться от этого условия, то результаты в области слабой связи могут оказаться существенно иными. Действительно, при $Z \neq 1$ условия нормировки имеют вид

$$b(m_r^2) = m_r Z, \quad 2m_r b'(m_r^2) = Z - 1. \quad (136)$$

При $\alpha_r < \alpha_c$, в отличие от случая $Z = 1$, становится возможным существование решения с нарушенной киральной симметрией, которое имеет вид

$$a = Z = \frac{1}{1 + 2\beta}, \quad b = Z m_r \left(\frac{m_r^2}{p^2 + i0} \right)^\beta. \quad (137)$$

При $\alpha_r = \alpha_c$ решение есть

$$b(p^2) = \frac{m_r^2}{(p^2 + i0)^{1/2}} \left(Z + \left(Z - \frac{1}{2} \right) \log \frac{p^2 + i0}{m_r^2} \right). \quad (138)$$

и, наконец, при $\alpha_r > \alpha_c$

$$b(p^2) = \frac{m_r^2}{(p^2 + i0)^{1/2}} \left[Z \cos \left\{ \frac{\omega}{2} \log \frac{p^2 + i0}{m_r^2} \right\} + \frac{1}{\omega} (2Z - 1) \sin \left\{ \frac{\omega}{2} \log \frac{p^2 + i0}{m_r^2} \right\} \right]. \quad (139)$$

В последних двух случаях $a = Z$, где Z произвольно.

Таким образом, с учетом перенормировочного произвола становится возможным, вообще говоря, динамическое нарушение киральной симметрии и для слабой связи, соответствующей физическому сектору теории. При этом, однако, возникает важное ограничение, связанное с калибровочной инвариантностью. Необходимость такого ограничения следует и из рассмотрения предела выключения взаимодействия. Действительно, из формулы (137) следует, что при $\alpha_r \rightarrow 0$ $b \rightarrow m_r + \mathcal{O}(\alpha_r)$, т.е. либо $m_r = 0$, либо спонтанное нарушение киральной симметрии не исчезает в пределе выключения взаимодействия. Последний вариант выглядит, конечно, довольно странно. Выход из этой ситуации может быть такой: вся эта картина в области слабой связи реализуется лишь при некоторых конечных значениях α_r . Условием на такие значения является нормировка вершины на физический заряд e_r :

$$\Gamma_\mu(k = 0; p^2 = m_r^2 | \alpha_r, Z) = -e_r \gamma_\mu. \quad (140)$$

Поскольку в силу калибровочной инвариантности константа перенормировки Z та же, что и в уравнении для пропагатора электрона, то подставляя из (137) $Z = Z(\alpha_r)$, мы получаем уравнение на α_r , решения которого и определят “разрешенные” значения заряда. Реализация этой программы требует, однако, решения уравнения для вершинной функции с пропагатором (137), что является непростой задачей.

При $\alpha_r \geq \alpha_c$ ситуация меняется принципиально: в этом случае Z (в главном приближении) произвольно, и нормировка на физический заряд фиксирует Z , но не приводит к дополнительным ограничениям на α_r .

Заключение

Приведенные результаты дают основание рассматривать вычисления над непертурбативным вакуумом как вполне адекватную схему для вычисления непертурбативных эффектов квантовой электродинамики. Формулировка системы уравнений для функций Грина на любом шаге этой вычислительной схемы технически не сложнее теории возмущений по константе связи⁸, и не требует ничего, кроме “тупого дифференцирования”. Сами уравнения, конечно, значительно сложнее, но, как показывает пример вычисления вершинной функции для кирально-симметричного решения (раздел 5), имеют гораздо более простые решения, чем аналогичные уравнения для функций Грина в непертурбативных аппроксимациях, основанных на более или менее произвольном транкировании уравнений Дайсона.

Что касается вычислений раздела 6, связанных с проблемой динамического нарушения симметрии, то одним из основных вопросов, относящихся к линеаризованному уравнению для пропагатора электрона, является вопрос о калибровочной зависимости результатов, и, в частности, значения критической константы α_c (см. [17] и цитируемую там литературу). В нашей трактовке это уравнение есть не произвольное транкирование уравнений Дайсона, а составная часть итерационной схемы, поэтому этот вопрос становится неизбежным. В этой связи отметим лишь, что процедура линеаризации выглядит обоснованной лишь в калибровке Ландау, в иных калибровках эффекты нелинейности для перенормированного уравнения вряд ли могут быть учтены столь простым anzatzen.

В заключение кратко коснемся вопроса о динамическом нарушении киральной симметрии в квантовой хромодинамике. В отличие от квантовой электродинамики, где непертурбативные эффекты, к числу которых относится и спонтанное нарушение симметрии, определяются ультрафиолетовой областью, в асимптотически свободной квантовой хромодинамике непертурбативной областью является низкоэнергетическая инфракрасная область. При этом механизм нарушения киральной симметрии может быть в хромодинамике даже проще, чем в электродинамике, поскольку эффективный учет самодействия глюонов в инфракрасной области с неизбежностью приводит к введению новых размерных параметров.

Как простой пример реализации подобного механизма нарушения киральной симметрии инфракрасными сингулярностями рассмотрим двумерную электродинамику. Несколько отмечалась аналогия между непертурбативными эффектами в двумерной

⁸Отметим, что теория возмущений по константе связи может быть рассмотрена как частный случай общей итерационной схемы, основанной на принципах раздела 2. Для получения ряда теории возмущений достаточно рассмотреть ту же итерационную схему с простыми грассмановыми источниками фермионов над пертурбативным вакуумом, соответствующим главному приближению $G^{(0)} = 1$ (см. также [9]-[10]).

электродинамике и четырехмерной хромодинамике. Несмотря на заведомо ограниченный характер такой аналогии, изучение непертурбативной динамики на примере технически несравненно более простой двумерной электродинамики может оказаться полезным для понимания хромодинамики в непертурбативной области. При $n = 2$ свободный пропагатор $D_{\mu\nu}^c(x)$ (см. (74)), входящий в уравнение для пропагатора электрона (112), в общем случае инфракрасно сингулярен, и для его определения необходимо вводить инфракрасное обрезание. Существует, однако, калибровка, в которой такое обрезание вводить не надо. Это уже упоминавшаяся инфракрасно конечная калибровка $d_l = 1 - n = -1$. В этой калибровке, как следует из формулы (74),

$$D_{\mu\nu}^c(x) = \frac{i}{2\pi} \frac{x_\mu x_\nu}{x^2 - i0},$$

и уравнение для пропагатора электрона есть просто

$$S^{-1} = (S^c)^{-1} + 2\alpha S. \quad (141)$$

В импульсном пространстве уравнение (141) сводится к системе алгебраических уравнений, среди решений которой есть и решение с нарушенной киральной симметрией. Конечно, в двумерной теории спонтанное нарушение непрерывной киральной симметрии не реализуется, так как соответствующее состояние нестабильно в согласии с теоремой Мермина-Вагнера-Колмена, но сам факт существования такого решения весьма примечателен с точки зрения упомянутой выше аналогии с четырехмерной квантовой хромодинамикой.

Автор признателен Б.А. Арбузову и П.А. Сапонову за полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 98-02-16690).

Список литературы

- [1] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. – М.: Гостехиздат, 1957.
- [2] Callaway D.J.E. // Phys.Reports C. **167** (1988), p. 241;
Gockeler M. et al. // Phys.Lett. **B251** (1990), p. 567.
- [3] Espriu D. and Tarrach R. // Phys.Lett. **B383** (1996), p. 482.
- [4] Fomin P.I., Gusynin V.P., Miransky V.A. and Sitenko Yu.A. // Riv.Nuovo Cim.**6** (1983), p.1;
Фомин П.И., Гусынин В.П., Миранский В.А. // УФЖ. 1986, т.31, с. 171;
Miransky V.A. // Nuovo Cim. **90A** (1985), p. 149.
- [5] Kocić A. QED: Chiral transition and the issue of triviality, hep-lat/9312007.
- [6] Васильев А.Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. – Л.: ЛГУ, 1978.
- [7] Roberts C.D. and Williams A.G. // Prog.Part.Nucl.Phys. **33** (1994), p. 477.
- [8] Некрасов М.Л., Рочев В.Е. // ТМФ. 1981, т.48, с. 187.

- [9] Rochev V.E. // J.Phys.A **30** (1997), p. 3671.
- [10] Rochev V.E. – In: Quantum Chromodynamics: Collisions, Confinement and Chaos. / ed. H.M. Fried and B.Muller, Singapore, World Scientific, 1997, p.354.
- [11] Schwinger J. // Phys.Rev. **128** (1962), p. 2425.
- [12] Ландау Л.Д., Померанчук И.Я. // ДАН СССР. 1955, т.**102**, с. 489.
- [13] Kirzhnits D.A. and Linde A.D. // Phys.Lett. **73B** (1978), p. 323.
- [14] Nambu Y. // Prog.Theor.Phys. **5** (1950), p. 614;
Bethe H. and Salpeter E.E. // Phys.Rev. **82** (1951), p. 309.
- [15] Edwards S.F. // Phys.Rev. **90** (1953), p. 234.
- [16] Johnson K., Baker M. and Willey R. // Phys.Rev. **136** (1964), B1111.
- [17] Miransky V.A. Dynamical Symmetry Breaking in Quantum Field Theories, Singapore, World Scientific, 1993.
- [18] Dyson F.// Phys.Rev. **75** (1949) 1736.
- [19] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантовые поля. – М.: Наука, 1980.
- [20] Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. – М.: Наука, 1969.
- [21] Арбузов Б.А., Боос Э.Э., Куренной С.С., Турашвили К.Ш. // ЯФ. 1985, **42**, с. 987.
- [22] Галкин В.О., Мишуров А.Ю., Фаустов Р.Н. // ЯФ. 1992, т.**55**, с. 2175;
Ebert D., Galkin V.O. and Faustov R.N. // Phys.Rev. **D57** (1998), 5663.
- [23] Соловьев Л.Д.// ДАН СССР, 1956, **110**, с. 206;
Yennie D.R., Frautschi S.C. and Suura H. // Ann.Phys. (N.Y.) **13** (1961), p. 379.
- [24] Maskawa T. and Nakajima H. // Prog.Theor.Phys. **52** (1974), p. 1326.
- [25] Gusynin V.P., Schreiber A.W., Sizer T. and Williams A.G. Chiral symmetry breaking in dimensionally regularized nonperturbative quenched QED, hep-th/9811184;
Kouno H., Hasegawa A., Nakano M. and Tuchitani K. Nonlinear effects in Schwinger-Dyson Equation, hep-ph/9906519.
- [26] Dragovic B.G., Mavlo D.P. and Filippov A.T. // Fizika **10** (1978), p. 51;
Алексеев А.И., Арбузов Б.А., Родионов А.Я. // ТМФ. 1980, т.**42**, с. 291.
- [27] Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. – М.: Наука, 1987.
- [28] Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. – М.: Наука, 1977.

Рукопись поступила 15 июля 1999 г.

Б.Е. Рочев
О непертурбативных вычислениях в квантовой электродинамике.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы \LaTeX .
Редактор Н.В. Ежела. Технический редактор Н.В. Орлова.

Подписано к печати 20.07.99. Формат 60 × 84/8. Офсетная печать.
Печ.л. 3,87. Уч.-изд.л. 3,1. Тираж 130. Заказ 135. Индекс 3649.
ЛР №020498 17.04.97.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

ПРЕПРИНТ 99-40, ИФВЭ, 1999
