



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 99-42
ОУ-У70

П.Т. Пашков

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРОТОННОГО СИНХРОТРОНА

Учебное пособие для студентов МГУ

Протвино 1999

Аннотация

Пашков П.Т. Основы теории протонного синхротрона: Препринт ИФВЭ 99–42. – Протвино, 1999. – 113 с., 38 рис.

Дан обзор основ теории протонного синхротрона. В первой части работы содержатся расчёты характеристик движения частиц в идеальной машине, а также анализ влияния на динамику пучка возмущений ведущего магнитного поля и ускоряющего напряжения. Вторая часть посвящена анализу поведения высокоинтенсивного пучка протонов с учётом собственного электромагнитного поля и полей, создаваемых пучком в окружающем его оборудовании. Подробно рассмотрены как статические эффекты (такие, как частотные кулоновские сдвиги), так и динамические — неустойчивости пучка протонов.

Abstract

Pashkov P.T. Main Principles of PS Theory: IHEP Preprint 99–42. – Protvino, 1999. – p. 113, figs. 38.

The survey of the PS theory main principles is given. In the first part the calculations of particles' motion characteristics in the ideal machine and also the influence of magnetic field and accelerating voltage disturbances over the beam dynamics are contained. In the second part the behaviour of the high intensity beam with account of the electromagnetic self fields and fields caused by it in the surrounding equipment is analysed. Static effects such Coulomb frequency shifts as well dynamics ones — proton beam instabilities are considered in detail.

Содержание

1. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ПРОТОННОМ СИНХРОТРОНЕ БЕЗ УЧЁТА ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДРУГ С ДРУГОМ И ОБОРУДОВАНИЕМ УСКОРИТЕЛЯ	4
1.1. Структурные характеристики протонного синхротрона	4
1.1.1. Устойчивость поперечного движения частиц	4
1.1.2. Амплитуда бетатронных колебаний	6
1.1.3. Эмиттанс пучка и аксептанс ускорителя	7
1.1.4. Дисперсионная функция	10
1.1.5. Структуры кольцевых ускорителей протонов	11
1.1.6. Согласованные промежутки	14
1.2. Основные характеристики поперечного движения частиц с учётом возмущений магнитного поля ускорителя	18
1.2.1. Возмущение идеальной орбиты частиц в протонном синхротроне . .	18
1.2.2. Возмущение градиента магнитного поля	22
1.2.3. Влияние систематических нелинейностей магнитного поля на бетатронные частоты ускорителя	25
1.3. Резонансы бетатронных колебаний частиц	28
1.3.1. Параметрический резонанс	28
1.3.2. Линейный разностный резонанс связи	31
1.3.3. Линейный суммовый резонанс	34
1.3.4. Квадратичный одномерный резонанс	35
1.4. Продольное движение частиц в протонном синхротроне	37
1.4.1. Фазовое уравнение	37
1.4.2. Фазовое движение частиц вблизи критической энергии	42
1.4.3. Фазовое движение частиц при наличии возмущений параметров ускорителя	45
2. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ С УЧЁТОМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА И ТОКА ПУЧКА	48
2.1. Кулоновские сдвиги бетатронных частот	48
2.1.1. Некогерентные сдвиги бетатронных частот	48
2.1.2. Когерентные сдвиги бетатронных частот	55

2.2.	Продольное кулоновское расталкивание частиц в интенсивном пучке протонов	59
2.3.	Продольная неустойчивость однородного пучка протонов	64
2.3.1.	Продольное движение одной частицы в отсутствие возмущений	65
2.3.2.	Функция распределения	67
2.3.3.	Продольный импеданс связи	69
2.3.4.	Уравнение Власова и дисперсионное уравнение	73
2.3.5.	Инкремент неустойчивости монохроматического пучка протонов	74
2.3.6.	Решение дисперсионного уравнения при наличии разброса частиц по импульсам в пучке	77
2.4.	Поперечная неустойчивость однородного пучка протонов	79
2.4.1.	Поперечное движение одной частицы	79
2.4.2.	Поперечный сигнал от пучка частиц	81
2.4.3.	Поперечный импеданс связи	82
2.4.4.	Дисперсионное уравнение	85
2.4.5.	Анализ дисперсионного уравнения в отсутствие разброса бетатронных частот в пучке	87
2.4.6.	Условие устойчивости пучка при наличии импульсного разброса	88
2.4.7.	Устойчивость пучка при бетатронной частоте, зависящей от амплитуды колебаний	90
2.5.	Продольная неустойчивость сгруппированного пучка протонов	92
2.5.1.	Продольный сигнал от одной частицы	92
2.5.2.	Продольный сигнал от сгустка частиц	93
2.5.3.	Дисперсионное уравнение	95
2.5.4.	Инкременты мультипольных неустойчивостей	97
2.5.5.	Пороги неустойчивостей	99
2.5.6.	Неустойчивость сгустка при наличии связи между мультипольными модами	101
2.6.	Поперечная неустойчивость сгруппированного пучка протонов	103
2.6.1.	Поперечный сигнал при наличии колебаний центра масс сгустка частиц	103
2.6.2.	Дисперсионное уравнение	106
2.6.3.	Инкременты неустойчивостей	108
2.6.4.	Поперечная неустойчивость сгустка частиц при большой интенсивности	111

Настоящая работа представляет, по-сути, курс лекций, который читается автором в течение ряда лет студентам физического факультета МГУ на кафедре "Физика ускорителей высоких энергий". Данный курс состоит из двух частей, каждая из которых изучается в течение одного семестра.

В *первом разделе* первой части содержится анализ поперечного движения частиц в идеальных машинах, в которых отсутствуют как нелинейности, так и возмущения ведущего магнитного поля. Приведены основные структурные характеристики ускорителей и критерий устойчивости поперечных колебаний частиц, даны понятия акцептанса ускорителя и эмиттанса пучка. Рассмотрены структурные элементы больших коллайдеров, такие как согласованные вставки для подавления и восстановления дисперсии, а также промежутки с малыми величинами β -функций. Анализируются влияние возмущений магнитного поля ускорителя на характеристики поперечного движения частиц, а также влияние ошибок установки заворачивающих магнитов и квадрупольных линз на искажение замкнутой орбиты частиц в ускорителе и ошибок в градиенте магнитного поля и систематических нелинейностей на частоты бетатронных колебаний частиц. Подробно рассматриваются основные резонансы бетатронных колебаний. Заключительный раздел первой части посвящён анализу продольного движения частиц в протонном синхротроне, а также анализу влияния возмущений параметров ускоряющей системы и магнитного поля на фазовое движение частиц.

Вторая часть работы посвящена изучению эффектов, возникающих при ускорении высокоинтенсивных пучков частиц в протонных синхротронах. Дан обзор основных эффектов пространственного заряда пучка и их воздействия на поперечные и продольные колебания частиц в ускорителях. В частности, приводятся расчёты некогерентного и когерентного кулоновских сдвигов бетатронных частот, анализируется их влияние на динамику частиц. Рассмотрены особенности перехода интенсивного пучка протонов через критическую энергию и способы борьбы с увеличением продольного эмиттанса пучка в этом районе. Даны примеры расчёта собственного электромагнитного поля пучка для некоторых наиболее характерных геометрий вакуумной камеры, а также продольного и поперечного импедансов. Даётся подробный вывод дисперсионных уравнений для поперечных и продольных неустойчивостей пучка и излагается метод их решения с помощью диаграмм на комплексной плоскости импедансов. Формулы для порогов и инкрементов неустойчивостей однородного и сгруппированного пучка даются в виде, удобном для практических оценок степени опасности данных неустойчивостей в протонном синхротроне.

1. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ПРОТОННОМ СИНХРОТРОНЕ БЕЗ УЧЁТА ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДРУГ С ДРУГОМ И ОБОРУДОВАНИЕМ УСКОРИТЕЛЯ

1.1. СТРУКТУРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОТОННОГО СИНХРОТРОНА

1.1.1. Устойчивость поперечного движения частиц

Поперечные колебания частиц в протонном синхротроне происходят около замкнутой пространственной кривой, называемой орбитой. Она определяется как периодическое решение уравнений, описывающих поперечные колебания частиц в ускорителе. В идеальной машине орбита располагается в медианной плоскости. Если аппроксимировать поле в магнитах, расположенных вдоль орбиты ускорителя, кусочно-постоянной зависимостью, а также считать, что фокусировка и дефокусировка пучка осуществляются тонкими линзами, то орбитой ускорителя будет замкнутая кривая, состоящая из дуг окружностей в местах, где имеется заворачивающее магнитное поле, и сопряжённых с ними прямых линий в прямолинейных промежутках ускорителя.

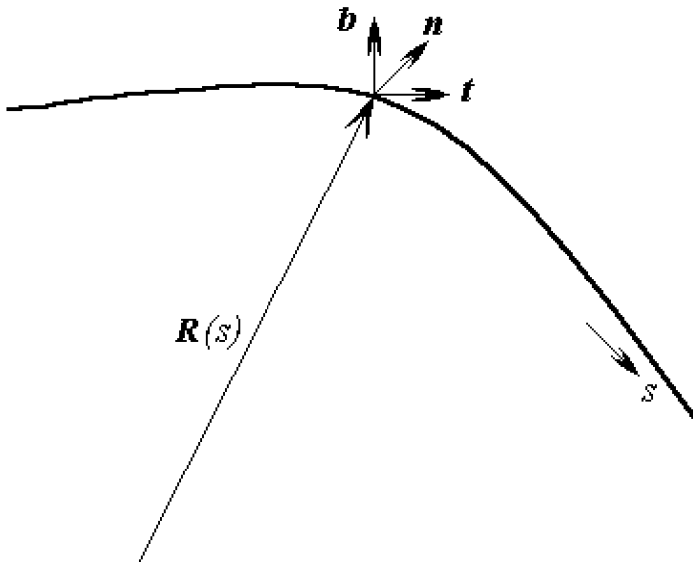


Рис. 1. Естественный трёхгранник.

Для описания поперечных колебаний частиц относительно равновесной орбиты удобно ввести криволинейную систему координат, представляющую собой естественный трёхгранник и показанную на рис. 1, где продольная координата частицы s отсчитывается вдоль орбиты; x, z — поперечные координаты частицы, отсчитываемые в плоскостях, перпендикулярных к орбите (координата x лежит в медианной плоскости, а z — в вертикальной); $\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t}$ — единичные векторы, направленные соответственно по нормали, бинормали и касательной к орбите.

Рассмотрим вначале идеальную машину, в которой отсутствуют нелинейные составляющие магнитного поля, а орбита располагается в медианной плоскости. В таком случае колебания частиц в направлениях x и z происходят независимо, и уравнения движения могут быть записаны в виде

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \left[\frac{1}{R^2(s)} - g(s) \right] x = \frac{1}{R(s)} \frac{\Delta p}{p}; \quad (1)$$

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + g(s)z = 0, \quad (2)$$

где $R(s)$ — радиус кривизны орбиты в магните; $g(s) = -G/HR$ (G — градиент магнитного поля; HR — магнитная жёсткость — постоянная величина при движении частицы в чисто магнитном поле); $\Delta p/p_0$ — относительное отклонение импульса частицы от равновесного значения $p = p_0$.

При анализе устойчивости поперечного движения частиц в ускорителе будем полагать $\Delta p/p_0 = 0$. В таком случае уравнения (1), (2) имеют одинаковый вид

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + g(s)u = 0, \quad (3)$$

где смысл $g(s)$ зависит от рассматриваемой поперечной координаты. Ниже обозначение u будет использоваться там, где нет необходимости различать x - и z -координаты.

Орбита ускорителя представляет собой замкнутую кривую, поэтому $g(s)$ является периодической функцией продольной координаты s с периодом $2\pi R_0$ (R_0 — средний радиус ускорителя). Как правило, идеальная структура кольцевого ускорителя состоит из большого числа периодов или суперпериодов, поэтому функция g удовлетворяет более жёсткому условию — $g(s + L) = g(s)$, где L — длина периода или суперпериода.

Общее решение любого линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка можно записать в виде

$$u(s) = C(s, s_0)u(s_0) + S(s, s_0)u'(s_0), \quad (4)$$

$$u'(s) = C'(s, s_0)u(s_0) + S'(s, s_0)u'(s_0), \quad (5)$$

где функции C и S , подобные синусу и косинусу, зависят от продольных координат (начальной s_0 и текущей s) и нормализованы таким образом, что $C(s_0, s_0) = S'(s_0, s_0) = 1$ и $C'(s_0, s_0) = S(s_0, s_0) = 0$. Штрихом обозначено дифференцирование по s . Последнее выражение удобно представить в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ u'(s) \end{pmatrix} = M(s|s_0) \begin{pmatrix} u(s_0) \\ u'(s_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s, s_0) & S(s, s_0) \\ C'(s, s_0) & S'(s, s_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s_0) \\ u'(s_0) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Свойства структуры ускорителя содержатся в матрице M . Определитель матрицы w равен вронскиану от функций C и S и является постоянной величиной, так как исходное дифференциальное уравнение (3) не содержит диссипативных членов, причём $w = 1$, как это следует из (6), если положить $s = s_0$.

Последовательное применение матричного выражения (6) к точкам орбиты с координатами s_1, s_2, \dots показывает, что переменные $u(s_i)$ и $u'(s_i)$ связаны со своими исходными значениями $u(s_0)$ и $u'(s_0)$ через произведения матриц. Этот факт используется при расчёте структур ускорителей, а также всевозможных вставок в регулярную структуру.

Особенно простой вид матрица M имеет в случае кусочно-постоянной функции $g(s)$. Так, например, для фокусирующей линзы $g = G/HR > 0$, и матрица M имеет вид

$$M(s|s_0) = \begin{pmatrix} \cos \xi & g^{-1/2} \sin \xi \\ -g^{1/2} \sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $\xi = \sqrt{g}(s - s_0)$. В случае дефокусирующей линзы ($g < 0$)

$$M(s|s_0) = \begin{pmatrix} \cosh \chi & |g|^{-1/2} \sinh \chi \\ |g|^{1/2} \sinh \chi & \cosh \chi \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $\chi = \sqrt{|g|}(s - s_0)$.

Для нахождения условия устойчивости поперечного движения частиц в протонном синхротроне рассмотрим матрицу периода $M = M(s + L|s)$. Любую матрицу с определителем, равным единице, и, в частности M , можно записать в следующем виде:

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu_0 + \alpha \sin \mu_0 & \beta \sin \mu_0 \\ -\gamma \sin \mu_0 & \cos \mu_0 - \alpha \sin \mu_0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Параметр μ_0 представляет собой набег фазы бетатронных колебаний на периоде структуры ускорителя — формула для его вычисления получена в следующем разделе, а коэффициенты Твисса α , β и γ — пока некоторые формально введённые параметры, физический смысл которых будет также ясен из дальнейшего изложения. Из условия $|M| = 1$ получается следующая связь для параметров Твисса:

$$\beta\gamma - \alpha^2 = 1. \quad (10)$$

Очевидно также, что $\cos \mu_0 = Sp M/2$. Собственные значения λ матрицы M находятся из уравнения $|M - I\lambda| = 0$, где I — единичная матрица, и равны $\lambda = \exp(\pm i\mu_0)$.

Критерий устойчивости поперечных колебаний частиц в ускорителе легко получить, если представить матрицу M в виде

$$M = I \cos \mu_0 + J \sin \mu_0, \quad (11)$$

где матрица J определена выражением

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \quad (12)$$

причём $J^2 = -1$. С учётом этого, взяв произведение $M \times M$, получим $M^2 = I \cos(2\mu_0) + J \sin(2\mu_0)$. Повторяя данную операцию k раз, найдём аналогичное выражение для k -ой степени матрицы M :

$$M^k = I \cos(k\mu_0) + J \sin(k\mu_0). \quad (13)$$

Отсюда видно, что поперечные колебания частиц будут устойчивы, если набег фазы μ_0 является действительной величиной (или, другими словами, должно выполняться следующее условие: $|Sp M| < 2$).

1.1.2. Амплитуда бетатронных колебаний

Уравнение движения (3) с периодической функцией $g(s + L) = g(s)$ представляет собой уравнение Хилла. Из теоремы Флоке следует, что линейно-независимые решения такого уравнения могут быть записаны в виде

$$u_1(s) = p_1(s) \exp(+i\mu_0 s/L), \quad (14)$$

$$u_2(s) = p_2(s) \exp(-i\mu_0 s/L), \quad (15)$$

где функции p_k ($k = 1, 2$) периодичны с периодом L — $p_k(s + L) = p_k(s)$. Отсюда следует, что

$$u_k(s + L) = u_k(s) \exp(\pm i\mu_0). \quad (16)$$

С другой стороны, функции $u_k(s + L)$ и $u_k(s)$ связаны через матрицу M , так что

$$u_k(s + L) = (\cos \mu_0 + \alpha \sin \mu_0)u_k(s) + (\beta \sin \mu_0)u'_k(s) = u_k(s)(\cos \mu_0 \pm i \sin \mu_0), \quad (17)$$

откуда, приравнявая коэффициенты при $\sin \mu_0$, получаем

$$u'_k = u_k \frac{\pm i - \alpha}{\beta}. \quad (18)$$

Беря далее логарифмические производные от правой и левой частей уравнения (18)

$$\frac{u''_k}{u'_k} - \frac{u'_k}{u_k} = -\frac{\alpha'}{\pm i - \alpha} - \frac{\beta'}{\beta} \quad (19)$$

и преобразуя левую часть уравнения (19) к виду

$$\frac{u''_k}{u'_k} - \frac{u'_k}{u_k} = -\frac{g\beta}{\pm i - \alpha} - \frac{\pm i - \alpha}{\beta}, \quad (20)$$

получаем, приравнявая правые части уравнений (19) и (20), следующие соотношения

$$\beta' = -2\alpha; \quad (21)$$

$$\alpha' = g\beta - \gamma. \quad (22)$$

Наконец, проинтегрировав почленно соотношение (18) с учётом формулы (21), имеем

$$u_k(s) = A\beta^{1/2}(s) \exp(\pm i\mu(s)), \quad (23)$$

где $\mu(s) = \int^s ds'/\beta(s')$, A — постоянная величина, зависящая от начальных условий. Уравнение (23) показывает, что бетатронные колебания являются квазигармоническими с мгновенной амплитудой, пропорциональной $\beta^{1/2}(s)$. Сравнивая решения для $u_k(s)$ и $u_k(s+L)$, нетрудно видеть, что набег фазы бетатронных колебаний на периоде структуры ускорителя μ_0 равен

$$\mu_0 = \int_s^{s+L} \frac{ds'}{\beta(s')}.$$

Проинтегрировав $\mu(s)$ вдоль всей замкнутой орбиты и разделив полученное выражение на 2π , найдём число бетатонных колебаний за оборот Q :

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_s^{s+2\pi R_0} \frac{ds'}{\beta(s')}, \quad (24)$$

откуда легко определяется среднее значение функции $\beta(s)$: $\bar{\beta} = R_0/Q$. Таким образом, введённые формально величины μ_0 и β получили наглядный физический смысл: μ_0 — это набег фазы бетатронных колебаний на периоде структуры, а функция $\beta^{1/2}(s)$ — огибающая поперечных колебаний частиц в ускорителе.

1.1.3. Эмиттанс пучка и аксептанс ускорителя

Координатная плоскость с осями u и p_u , где p_u — поперечный импульс, канонически сопряжённый с координатой u , называется фазовым пространством. Так как импульс p_u при постоянной энергии пучка отличается от производной u' лишь постоянным множителем, то в качестве фазового пространства часто используется пространство (u, u') . Использование в теории ускорителей понятия фазового пространства оказалось весьма

плодотворным, в особенности при решении задач, связанных с вводом и выводом пучка протонов, что обусловлено возможностью применения при рассмотрении подобных вопросов математического аппарата аналитической механики.

Пусть $u(s)$ — действительное решение уравнения движения (3) для частицы, имеющей максимальную амплитуду колебаний. Составим определитель Вронского w для двух линейно независимых решений уравнения (3) — $u(s)$ и $u_1(s) = \beta^{1/2}(s) \exp(i\mu(s))$, который, как отмечалось выше, не зависит от координаты s и не равен нулю. Вычисляя $|w|^2$ с учётом $|u_1|^2 = \beta$, а также формулы (18) для u'_1 , получаем так называемый инвариант Куранта-Снайдера:

$$u^2 + (\alpha u + \beta u')^2 = \beta \varepsilon, \quad (25)$$

где ε — постоянная величина.

Рассмотрим точку орбиты с координатой $s = s_0$, где функция β имеет экстремум, так что $\alpha = 0$, согласно (21). В таком случае уравнение (25) имеет вид уравнения эллипса в главных осях

$$\left(\frac{u}{u_{max}}\right)^2 + \left(\frac{u'}{u'_{max}}\right)^2 = 1, \quad (26)$$

где $u_{max} = \sqrt{\varepsilon\beta}$ и $u'_{max} = \sqrt{\varepsilon\gamma}$, причём данный эллипс ограничивает фазовую площадь, равную $\pi\varepsilon$. Непосредственным вычислением с использованием формулы (25) нетрудно показать, что приведенные соотношения для u_{max} и u'_{max} сохраняют свой вид и в общем случае произвольно ориентированного эллипса. Таким образом, по мере движения вдоль орбиты частицы с максимальной амплитудой поперечных колебаний, её изображение на фазовой плоскости перемещается по эллипсу, ограничивающему площадь $\pi\varepsilon$, совершая полный обход эллипса за один период бетатронных колебаний. Величину ε называют поперечным эмиттансом пучка (вертикальным или горизонтальным).

Инвариант (25), вообще говоря, справедлив для любой частицы, поэтому частицы с меньшими амплитудами колебаний будут также двигаться по эллипсам, расположенным внутри граничного эллипса. В свою очередь, эллипсы по мере движения частиц вдоль орбиты непрерывно изменяют свою ориентацию, сохраняя охватываемую ими фазовую площадь, и располагаются в главных осях лишь в тех точках орбиты, где β -функция имеет экстремумы. На рис. 2 представлен граничный фазовый эллипс пучка, расположенный в произвольной точке орбиты ускорителя, с координатами всех его характерных точек, выраженных через эмиттанс ε и коэффициенты Твисса.

Ширина фазового эллипса в направлении координаты u ограничена апертурой вакуумной камеры ускорителя. Максимальная величина ε , существующая в ускорителе, называется аксептансом. Аксептанс является характеристикой машины, в отличие от эмиттанса ε , являющегося характеристикой пучка, и определяется наиболее узким местом апертуры вакуумной камеры ускорителя. Для того чтобы эмиттанс был согласован, его форма на фазовой плоскости должна быть подобна аксептансу для любого азимута ускорителя. В противном случае речь может идти об эффективном эмиттансе, который представляет собой согласованный эллипс, описанный около фазового изображения пучка и содержащий все частицы (иногда 99 или 95% пучка, в зависимости от вида рассматриваемой функции распределения частиц в фазовом пространстве). Если эмиттанс пучка согласован с фазовыми траекториями частиц, то частицы заполняют минимальную часть аксептанса. Процесс согласования эмиттанса пучка с аксептансом — необходимый этап при создании систем ввода-вывода пучка.

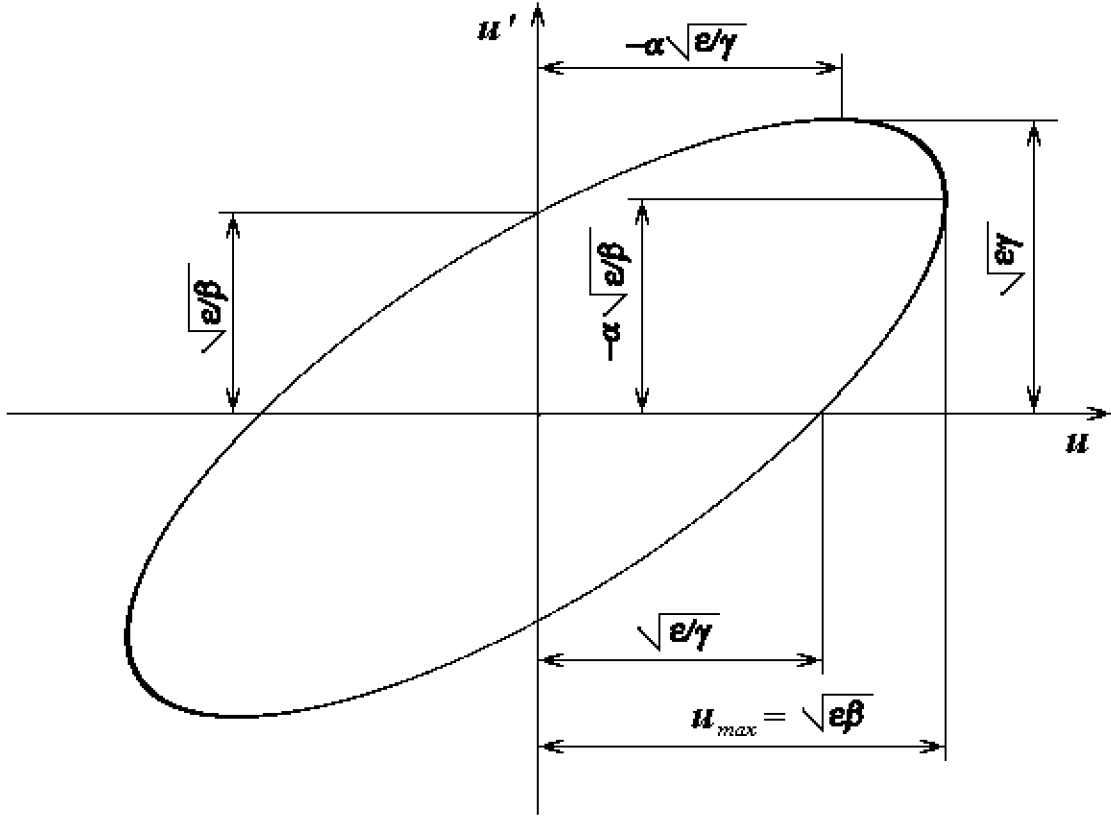


Рис. 2. Координаты характерных точек фазового эллипса.

Эмиттанс, вычисленный в канонических координатах (u, p_u) , называется инвариантным. Его величина сохраняется в процессе ускорения пучка, что является следствием теоремы Лиувилля, утверждающей, что изображающие точки в фазовом пространстве ведут себя подобно несжимаемой жидкости (плотность частиц вблизи любой конкретной изображающей точки не изменяется с течением времени), если только динамическая система является консервативной. При отсутствии связи между горизонтальным и вертикальным движениями, что в настоящем разделе предполагается, фазовые объёмы пучка сохраняются независимо в каждой из плоскостей. В общем случае можно говорить лишь о сохранении шестимерного фазового объёма пучка.

Следует также отметить, что в процессе ускорения пучка инвариантный эмиттанс не только сохраняется, но и остаётся согласованным с поперечными фазовыми траекториями частиц, так как изменение энергии пучка происходит очень медленно по сравнению с периодом бетатронных колебаний. Так как поперечный импульс $p_u = pu'$, то с ростом энергии частиц неинвариантный эмиттанс ε должен поэтому уменьшаться обратно пропорционально величине импульса p . Если обозначить через A_{max} максимальную амплитуду бетатронных колебаний частиц — $A_{max} = \sqrt{\varepsilon\beta_{max}}$, то должно быть $A_{max} \sim 1/\sqrt{p}$ (изменением β_{max} в процессе ускорения пучка обычно можно пренебречь).

В дальнейшем часто будет использоваться фазовое пространство $(v, dv/d\phi)$, где ϕ — новая независимая переменная,

$$\phi = \int \frac{ds}{Q\beta(s)} = \frac{\mu(s)}{Q}, \quad (27)$$

в котором фазовые траектории частиц представляют собой окружности, а воздействие на частицу элемента структуры ускорителя с фазовым набегом $\mu(s)$ проявляется как вращение по окружности точки, изображающей данную частицу на фазовой плоскости, на угол μ по часовой стрелке. Связь между переменными $(v, dv/d\phi)$ и (u, u') даётся матрицей

$$\begin{pmatrix} v \\ dv/d\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^{-1/2} & 0 \\ Q\alpha\beta^{-1/2} & Q\beta^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Произведя с помощью соотношения (28) замену переменных в уравнении движения (3) с учётом формул (10), (21) и (22), связывающих коэффициенты Твисса друг с другом, получим вместо (3) уравнение гармонического осциллятора

$$\frac{d^2v}{d\phi^2} + Q^2v = 0. \quad (29)$$

1.1.4. Дисперсионная функция

Радиальное отклонение орбиты частицы с импульсом $p \neq p_0$ от орбиты равновесной частицы $\Delta x(s)$ описывается дисперсионной функцией $D(s)$, являющейся периодическим решением неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, получающегося из уравнения (1) при $\Delta p/p_0 = 1$,

$$\frac{d^2D}{ds^2} + \left(\frac{1}{R^2(s)} - g(s) \right) D = \frac{1}{R(s)}, \quad (30)$$

так что $\Delta x(s) = D(s)(p - p_0)/p_0$.

В протонном синхротроне функция $g(s)$ обычно кусочно-постоянна, поэтому дисперсионную функцию $D(s)$ можно найти, используя матричный метод для решения уравнения (30). Заметим сразу, что данное дифференциальное уравнение имеет частное решение $U(s, s_0)$, причём, как следует из начальных условий, должно быть $U(s_0, s_0) = U'(s_0, s_0) = 0$. Запишем решение уравнения (30) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} D(s) \\ D'(s) \\ 1 \end{pmatrix} = M(s|s_0) \begin{pmatrix} D(s_0) \\ D'(s_0) \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (31)$$

$$M(s|s_0) = \begin{pmatrix} C(s, s_0) & S(s, s_0) & U(s, s_0) \\ C'(s, s_0) & S'(s, s_0) & U'(s, s_0) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Для магнита с совмещёнными функциями, осуществляющего фокусировку частиц с одновременным их поворотом на угол $\xi = \sqrt{g_x}(s - s_0)$, где $g_x(s) = 1/R^2 + G/HR > 0$, матрица M имеет вид

$$M(s|s_0) = \begin{pmatrix} \cos \xi & g_x^{-1/2} \sin \xi & (1/Rg_x)(1 - \cos \xi) \\ -g_x^{1/2} \sin \xi & \cos \xi & (1/Rg_x^{1/2}) \sin \xi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

а для дефокусирующего магнитного блока —

$$M(s|s_0) = \begin{pmatrix} \cosh \chi & (1/|g_x|^{1/2}) \sinh \chi & (1/R|g_x|)(\cosh \chi - 1) \\ |g_x|^{1/2} \sinh \chi & \cosh \chi & (1/R|g_x|^{1/2}) \sinh \chi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

где $g_x = 1/R^2 - G/HR < 0$, $\chi = \sqrt{|g_x|}(s - s_0)$.

При вычислении структурных характеристик протонного синхротрона результирующая матрица периода структуры $M(s_0 + L|s_0)$ представляет собой произведение матриц, подобных (33) и (34). Для нахождения начальных значений дисперсионной функции $D_0 = D(s_0)$ и её производной $D'_0 = D'(s_0)$, необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} D(s_0) \\ D'(s_0) \\ 1 \end{pmatrix} = M(s_0 + L|s_0) \begin{pmatrix} D(s_0) \\ D'(s_0) \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Аналитическое выражение для дисперсионной функции $D(s)$ нетрудно получить, перейдя в уравнении (30) от переменных (D, s) к переменным (v, ϕ) , введённым ранее с помощью соотношения (28) (полагая в последнем $u = D$). В результате вместо (30) получается следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 v}{d\phi^2} + Q_x^2 v = \frac{1}{R} Q_x^2 \beta_x^{3/2}, \quad (36)$$

которое представляет собой уравнение гармонического осциллятора с внешней возмущающей силой. Решая его методом вариации произвольных постоянных, можно выделить периодическое решение с периодом структуры L . Вернувшись затем снова к исходным переменным (D, s) , имеем

$$D(s) = \frac{\beta_x^{1/2}(s)}{2 \sin(\pi Q_x)} \int_s^{s+2\pi R_0} \frac{\beta_x^{1/2}(s')}{R(s')} \cos[\mu_x(s') - \mu_x(s) - \pi Q_x] ds'. \quad (37)$$

Оценим среднее значение дисперсионной функции \bar{D} на периоде структуры, подставив в уравнение (37) вместо функции $\beta_x(s)$ её среднее значение $\bar{\beta} = R_0/Q_x$, а также полагая $\mu_x(s') - \mu_x(s) - \pi Q_x = \chi$, $d\chi = ds'/\beta_x$:

$$\bar{D} \simeq \frac{\bar{\beta}_x^2}{2R_0 \sin(\pi Q_x)} \int_{-\pi Q_x}^{\pi Q_x} \cos \chi d\chi = \frac{R_0}{Q_x^2}. \quad (38)$$

Величина $\alpha = \bar{D}/R \simeq 1/Q_x^2$ называется коэффициентом расширения орбит в ускорителе.

1.1.5. Структуры кольцевых ускорителей протонов

Структурой кольцевого ускорителя протонов называют набор линейных элементов, осуществляющих периодическую фокусировку и дефокусировку частиц, а также создающих заворачивающее магнитное поле, которые обеспечивают движение частиц вблизи замкнутой кривой (орбиты). Структура ускорителя содержит также прямолинейные промежутки, используемые для установки различного оборудования, включая устройства для ввода и вывода пучка, ускоряющую и вакуумную системы, систему диагностики пучка и др.

Основными характеристиками ускорителя являются введённая выше структурная функция $\beta(s)$, характеризующая поведение огибающей бетатронных колебаний, и набег фазы бетатронных колебаний на периоде структуры μ_0 , характеризующий устойчивость поперечного движения частиц относительно орбиты ускорителя. Предварительный (черновой) расчёт указанных структурных характеристик производится обычно в приближении тонких линз, так как на практике, как правило, выполняется следующее условие: $\sqrt{gl} \ll 1$, где l — характерная длина элемента ускорителя (в дальнейшем под l будем понимать длину линзы). При этом можно пренебречь влиянием поворотных магнитов, так как их воздействие на фокусировку частиц является достаточно слабым и может быть учтено при окончательном (чистовом) расчёте структуры.

Упростим матрицы линз, устремив длину l к нулю. Фокусирующая сила элемента должна сохраняться, поэтому градиент линзы стремится при этом к бесконечности, так что величина $\sigma = gl = \text{const}$ и матрицы (7), (8) и (33), (34) примут следующий вид:

$$M_{D,F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm\sigma & 1 \end{pmatrix}; \quad (39)$$

$$M_{D,F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \pm\sigma & 1 & \Delta\vartheta/n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

где знаки плюс и минус относятся соответственно к матрицам M_D (для дефокусирующей линзы) и M_F (для фокусирующей линзы); параметр σ обратно пропорционален фокусному расстоянию квадрупольной линзы; $\Delta\vartheta$ и n — соответственно угол поворота частицы и число магнитов на периоде структуры.

В протонных синхротронах довольно часто используется структура FODO, схематически изображённая на рис. 3а, а её тонколинзовый аналог представлен на рис. 3б. Структуры такого типа используются, например, в протонном синхротроне ИФВЭ, в основном кольце ускорителя FNAL, в ускорителях SPS, PEP, PETRA и др.

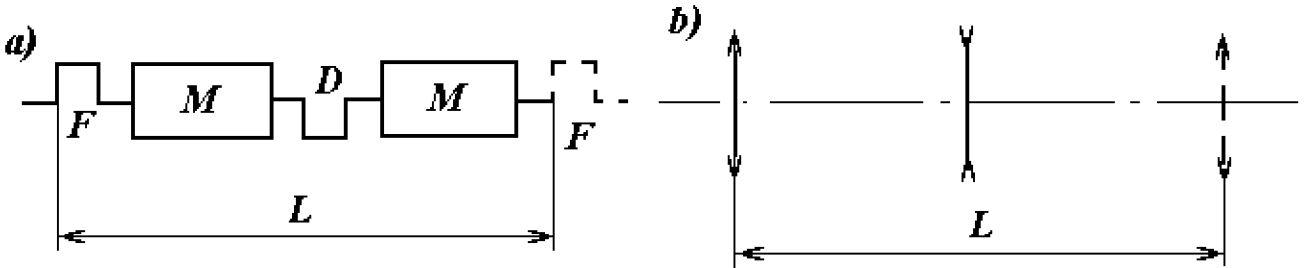


Рис. 3. Структура FODO (а) и её тонколинзовый аналог (б).

Рассчитаем основные характеристики структуры FODO, приняв за начало отсчёта точку орбиты, расположенную с левой стороны фокусирующей линзы, в непосредственной близости к ней. Тогда матрицу периода M для структуры, представленной на рис. 3б, можно записать в виде произведения четырёх матриц:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & L/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma_D & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma_F & 1 \end{pmatrix}, \quad (41)$$

где L — длина периода структуры. Дальнейшее упрощение получается в случае равенства сил фокусирующей и дефокусирующей линз: $\sigma_F = -\sigma_D = -\sigma$. В таком случае поведение параметров Твисса одинаково по обоим направлениям и после перемножения матриц в правой части выражения (41) можно записать матрицу M в виде

$$M = \begin{pmatrix} 1 - L\sigma/2 - (L\sigma)^2/4 & L + L^2\sigma/4 \\ -L\sigma^2/2 & 1 + L\sigma/2 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Сравнивая полученное выражение с матрицей Твисса (9) и вводя набег фазы на периоде структуры μ_0 в качестве независимой переменной, получаем следующие соотношения:

$$L\sigma = 4 \sin(\mu_0/2); \quad (43)$$

$$\beta_{F,D} = L[1 \pm \sin(\mu_0/2)] / \sin \mu_0; \quad (44)$$

$$\alpha_{F,D} = -[\pm 1 + \sin(\mu_0/2)] / \cos(\mu_0/2), \quad (45)$$

где знаки плюс и минус относятся к фокусирующей и дефокусирующей линзам соответственно. Величины β_F и β_D в зависимости от набега фазы μ_0 представлены на рис. 4, из которого видно, что функция $\beta_F(\mu_0)$ имеет минимум в районе $\mu_0 \simeq 80^\circ$, поэтому на практике обычно стремятся к тому, чтобы величина набега фазы бетатронных колебаний на периоде структуры FODO была близка к приведенной здесь цифре.

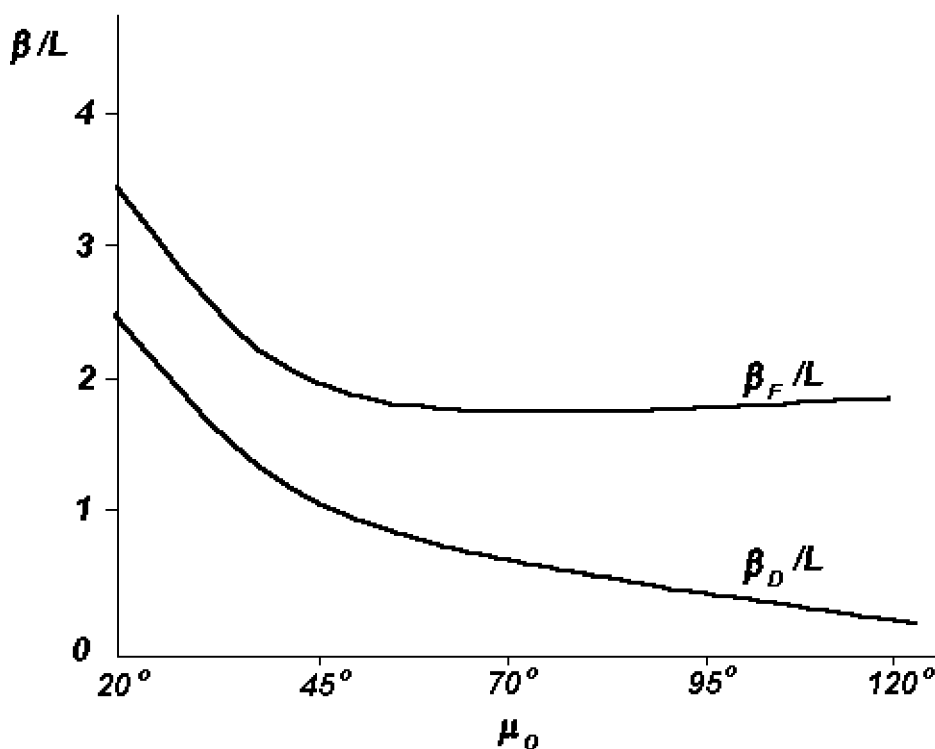


Рис. 4. Предельные значения функции $\beta(\mu_0)$ для структуры FODO.

Аналогичный расчёт можно проделать и для дисперсионной функции D , только при этом необходимо перемножить матрицы размерностью 3×3 . С учётом симметрии периода

структуры ограничимся рассмотрением его полупериода — от середины фокусирующей квадрупольной линзы до середины дефокусирующей. Матрица половины периода структуры представляет собой произведение четырёх матриц:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sigma/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta\vartheta/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sigma/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

После перемножения матриц в правой части (46) получается следующее выражение для матрицы M :

$$M = \begin{pmatrix} 1 - L\sigma/4 & L/2 & L\Delta\vartheta/8 \\ -L\sigma^2/8 & 1 + L\sigma/4 & (1 + L\sigma/8)\Delta\vartheta/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Производная дисперсионной функции $D' = 0$ в серединах линз, поэтому значения функции D в указанных точках можно найти из системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} D_D \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} D_F \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (48)$$

откуда следует

$$D_{F,D} = \frac{L\Delta\vartheta[1 \pm \sin(\mu_0/2)/2]}{4 \sin^2(\mu_0/2)}, \quad (49)$$

где знаки плюс и минус относятся соответственно к фокусирующей и дефокусирующей линзам.

В заключение настоящего раздела отметим, что в некоторых сильнофокусирующих ускорителях протонов, в частности в CPS и в Брукхейвенском AGS, используется структура FOFDOD, в которой для создания прямолинейных промежутков разрыв делается непосредственно в фокусирующих и дефокусирующих магнитных блоках. В прямолинейных промежутках такой структуры значения β -функций для вертикального и горизонтального направлений сильно различаются, что делает возможным создание независимых систем коррекции магнитного поля ускорителя по обоим направлениям. В качестве недостатка такой структуры отметим более высокую величину градиента магнитного поля G , необходимую для создания такого же, что и в структуре FODO, набега фазы бетатронных колебаний на периоде структуры μ_0 . Анализ структуры FOFDOD подобен проведенному выше для структуры FODO, и мы не будем на нём специально останавливаться.

Отметим также, что первые сильнофокусирующие ускорители протонов собирались из магнитных блоков, в которых совмещались функции фокусировки и поворота частиц. В последнее время, однако, широкое распространение получили магнитные системы с разделёнными функциями. В них фокусировка частиц осуществляется квадрупольными линзами, а поворот частиц — магнитами с однородным магнитным полем. При этом существенно уменьшаются как вес железа, используемого для создания кольцевого электромагнита ускорителя, так и потребляемая ускорителем электроэнергия.

1.1.6. Согласованные промежутки

Протонный синхротрон с регулярной магнитной структурой имеет ряд существенных недостатков. Это, во-первых, отсутствие места для расположения специального оборудования, например такого, как ускоряющие ВЧ-станции, системы ввода-вывода пучка и др. Данный недостаток можно преодолеть за счёт искажения регулярной структуры.

В ускорителе ИФВЭ с этой целью выделено 12 суперпериодов, содержащих по 10 магнитов, четыре из которых укорочены и попарно придвинуты друг к другу. Таким образом, в каждом суперпериоде ускорителя организуются два длинных, три средних и пять коротких прямолинейных промежутков. При таком способе, однако, ухудшаются структурные характеристики ускорителя и, как следствие, увеличиваются поперечные размеры пучка при фиксированных величинах эмиттансов. Во-вторых, зачастую требуется наличие специфических значений β -функций в заданных местах ускорителя, в особенности в случае коллайдеров. Характерный пример — длинный прямолинейный промежуток с малыми значениями β -функций в месте встречи пучков.

Трудности регулярной структуры могут быть преодолены введением в неё согласованных промежутков. Помещая подобную вставку в ускоритель, мы не должны возмутить параметры регулярной структуры. Поэтому силы квадрупольных линз, величины полей в магнитах, а также размеры прямолинейных промежутков в таких вставках подбираются таким образом, чтобы амплитудные функции в месте разрыва регулярной структуры восстанавливались при воздействии матрицы M вставки. Примеры возможных вставок в регулярную структуру ускорителя показаны на рис. 5.

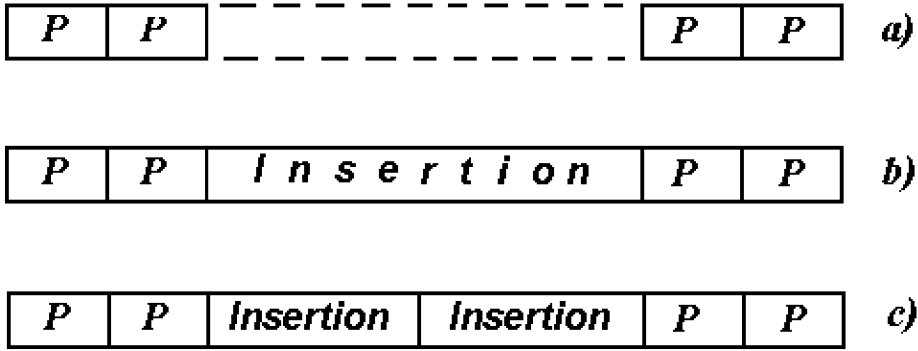


Рис. 5. Примеры разрывов регулярной структуры (P — период структуры).

В качестве простейшей вставки, с помощью которой можно создать длинный согласованный прямолинейный промежуток, можно использовать вставку Коллинза, состоящую из двух квадрупольных линз и трёх промежутков (см. рис. 6). Как показывает соответствующий анализ, максимальная протяжённость согласованного прямолинейного промежутка получается в случае, если набег фазы бета-тронных колебаний на длине вставки равен $\pi/2$. Матрица передачи для рассматриваемой секции получается в результате перемножения пяти матриц для свободных промежутков и линз. Если квадрупольные линзы считать тонкими, а их силы — равными по величине, то для результирующей матрицы M получается следующая формула:

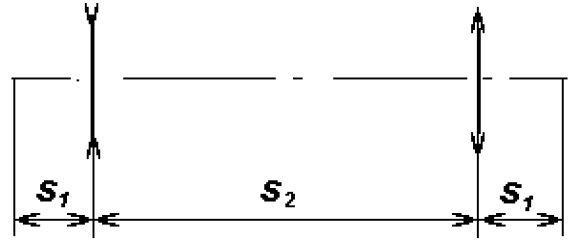


Рис. 6. Промежуток Коллинза.

$$M = \begin{pmatrix} 1 + \sigma s_2 - \sigma^2 s_1 s_2 & 2s_1 + s_2 - \sigma^2 s_1^2 s_2 \\ -\sigma^2 s_2 & 1 - \sigma s_2 - \sigma^2 s_1 s_2 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Полагая набег фазы на длине вставки μ равным $\pi/2$, выразим матрицу M через параметры Твисса

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Приравнивая далее соответствующие элементы матриц (50) и (51), найдём требуемые соотношения между параметрами вставки Коллинза и коэффициентами Твисса:

$$s_1 = \gamma^{-1}; \quad s_2 = \alpha^2 \gamma^{-1}; \quad \sigma = \gamma \alpha^{-1}. \quad (52)$$

Из (52) следует, что длина секции Коллинза равна примерно значению β -функции в месте разрыва регулярной структуры.

Для согласования вставки по двум направлениям одновременно необходимо, чтобы в точке разрыва регулярной структуры выполнялись следующие соотношения: $\alpha_x = -\alpha_z$, $\gamma_x = \gamma_z$, как это видно из формул (52). В FODO структуре таким точкам соответствуют середины прямолинейных промежутков. Отметим также, что при введении в регулярную структуру подобной вставки дисперсионная функция $D(s)$, вообще говоря, изменяется, если только в точке разрыва структуры не выполняются условия $D = D' = 0$. Полного согласования можно добиться лишь в том случае, когда матрица M вставки представляет собой единичную, с размерностью 3×3 , матрицу.

Простейший способ борьбы с возмущением структурных характеристик при нарушении регулярности структуры ускорителя — использование двух вставок в одном промежутке (рис. 5в). Параметры первой вставки выбираются таким образом, чтобы структурные функции достигали требуемых значений в промежутке между вставками. Действие второй вставки противоположно первой, причём согласование существенно облегчается, если разрыв регулярной структуры осуществляется в точке симметрии, где $\alpha_x = \alpha_z = D' = 0$ — в таком случае вставки зеркально отражают друг друга.

При создании согласованных промежутков в протонном синхротроне обычно, за исключением некоторых тривиальных случаев, приходится проделывать большое количество численных расчётов с помощью ЭВМ. Число независимых параметров при решении такой задачи равно по крайней мере числу условий, наложенных на структурные функции. Чрезвычайно трудно одновременно удовлетворить всем этим условиям, поэтому процесс решения разбивается на этапы. На каждом этапе удовлетворяется часть из наложенных условий, которые не должны нарушаться при выполнении последующего этапа. В качестве примера рассмотрим, как осуществляется расчёт согласованного промежутка с малыми значениями β -функций и подавленной дисперсией.

В середине рассматриваемого промежутка должны выполняться следующие условия: $\alpha_{x,z} = D = D' = 0$, а также должны быть обеспечены малые величины функций $\beta_{x,z}$, так что в данном случае имеется шесть независимых параметров. На первом этапе осуществляется уменьшение до нуля функции D и её производной D' . Такая вставка называется участком подавления дисперсии орбит. На втором этапе необходимо удовлетворить четыре оставшихся условия для функций $\alpha_{x,z}$, $\beta_{x,z}$, для чего необходимо иметь по крайней мере четыре квадрупольные линзы, причём, так как во второй вставке отсутствуют магниты, функция $D(s) = 0$ на протяжении всей этой вставки.

Для управления величиной дисперсии орбит необходимо иметь в промежутке два свободных параметра. Простейшее устройство для подавления дисперсии показано на рис. 7. Оно состоит из двух стандартных периодов FODO, в которых силы линз соответствуют

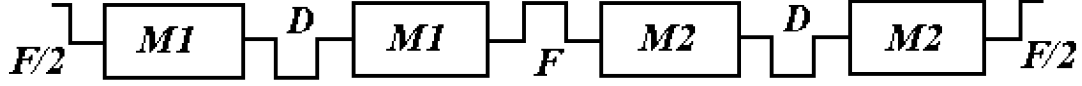


Рис. 7. Участок подавления дисперсии.

своим расчётным величинам, а поля в заворачивающих магнитах ослаблены. В приближении тонких линз и коротких магнитов можно получить следующие формулы для углов поворота частиц $\Delta\vartheta_1$ и $\Delta\vartheta_2$ в магнитах $M1$ и $M2$ соответственно, при которых происходит полное подавление дисперсии:

$$\Delta\vartheta_1 = \Delta\vartheta \left[1 - \frac{1}{4 \sin^2(\mu_0/2)} \right]; \quad \Delta\vartheta_2 = \frac{\Delta\vartheta}{4 \sin^2(\mu_0/2)}, \quad (53)$$

где $\Delta\vartheta$ и μ_0 — соответственно угол поворота частицы и набег фазы бетатронных колебаний на нормальном периоде. Выражения (53) были получены с помощью специальной программы для манипуляции с алгебраическими выражениями путём умножения начального вектора $(D, D', 1)$ последовательно на 17 матриц с размерностью 3×3 и использовались при разработке проекта LEP в ЦЕРНе. Так как силы линз в рассматриваемом варианте не затрагиваются, параметры Твисса остаются невозмущёнными.

Из формул (53) видно, что $\Delta\vartheta_1 + \Delta\vartheta_2 = \Delta\vartheta$. При $\mu_0 = \pi/3$ для подавления дисперсии необходимо удалить магниты из одного периода ($\Delta\vartheta_1 = 0, \Delta\vartheta_2 = \Delta\vartheta$); при $\mu_0 = \pi/2$ в двух соседних периодах поля в магнитах составляют половину нормальной величины ($\Delta\vartheta_1 = \Delta\vartheta_2 = \Delta\vartheta/2$); при $\mu_0 < \pi/3$ необходимо изменить знак поля в магнитах одного из периодов структуры.

Другой метод подавления дисперсии — создание возмущения градиента магнитного поля в двух соседних квадрупольных линзах (поля в магнитах остаются при этом неизменными). Такая схема более проста, однако она изменяет параметры Твисса. Чтобы свести эти изменения к минимуму, квадрупольные линзы с возмущёнными значениями градиента магнитного поля должны располагаться примерно через половину длины волны бетатронных колебаний.

В коллайдерах для получения требуемой величины светимости поперечные размеры пучков в местах их встреч должны быть много меньше в сравнении с их размерами на остальных участках накопительных колец. Для этой цели обычно разрабатываются специальные промежутки, в которых функции $\beta_{x,z}$ имеют малые величины. Конкретные величины $\beta_{x,z}$, которые удаётся получить на практике, зависят от длины промежутка, силы линз, а также от их количества. Требуется, как минимум, два квадрупольных для уменьшения значений β -функций по обоим направлениям; столько же линз требуется для восстановления нормальных значений этих функций в конце специального промежутка. Обычно в специальных промежутках с малыми значениями β -функций используется больше четырёх квадрупольных. Нет также твёрдых правил согласования подобных промежутков; решение ищется методом проб и ошибок, переборкой множества вариантов на ЭВМ.

1.2. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНОГО ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ С УЧЁТОМ ВОЗМУЩЕНИЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ УСКОРИТЕЛЯ

1.2.1. Возмущение идеальной орбиты частиц в протонном синхротроне

Магнитные блоки кольцевого электромагнита ускорителя не могут быть изготовлены идеально одинаковыми — они отличаются друг от друга как геометрическими размерами, так и магнитными характеристиками. Кроме этого, ошибки в магнитном поле ускорителя возникают из-за неточности расстановки квадрупольных линз относительно идеальной орбиты частиц.

Пусть магнитное поле ускорителя отличается от идеального на величину ΔH на малом участке орбиты длиной $l \ll 1$. Тогда частица, проходя через возмущённый участок, получает дополнительный поворот на угол $\Delta\vartheta = l\Delta H/HR$. Подобные ошибки могут возникать, если магнитное поле в одном из блоков кольцевого электромагнита не совпадает с номинальным значением, или из-за ошибки в установке квадрупольной линзы, либо магнитного блока с совмещёнными функциями относительно идеальной равновесной орбиты. Подобное возмущение магнитного поля можно считать точечным. При наличии такого возмущения в произвольной точке идеальной орбиты с координатой $s = s_0$ уравнения движения имеют новое периодическое решение (возмущённую орбиту). Его нетрудно найти, решив следующее матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi Q) + \alpha_0 \sin(2\pi Q) & \beta_0 \sin(2\pi Q) \\ -\gamma_0 \sin(2\pi Q) & \cos(2\pi Q) - \alpha_0 \sin(2\pi Q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u' + \Delta\vartheta \end{pmatrix}, \quad (54)$$

где $u = x, z$; индексом 0 помечены значения коэффициентов Твисса при $s = s_0$; $2\pi Q$ — набег фазы бетатронных колебаний за один оборот частиц в ускорителе. Решая (54) относительно u и u' , получаем

$$u = \beta_0 \cot(\pi Q) \frac{l\Delta H}{2HR}; \quad (55)$$

$$u' = -[1 + \alpha_0 \cot(\pi Q)] \frac{l\Delta H}{2HR}. \quad (56)$$

Формулы (55) и (56) дают отклонения от идеальной орбиты в месте расположения возмущения (при $s = s_0$). Общий вид выражения для возмущённой орбиты можно найти в результате решения неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, подобного уравнению (1), в котором необходимо заменить отклонение импульса частицы от равновесного значения $\Delta p/p_0$ на возмущение магнитного поля $l(\Delta H/H)\delta(s - s_0)$, где δ — δ -функция Дирака. Его решение имеет следующий вид:

$$u(s) = \sqrt{\beta_0\beta(s)} \frac{\cos[\pi Q - \mu(s)]}{\sin(\pi Q)} \frac{l\Delta H}{2HR}. \quad (57)$$

Как показывает формула (57), отклонения орбиты от идеальной кривой из-за возмущения ΔH могут достигать чрезвычайно больших величин в случае, если частота бетатронных колебаний Q стремится к целому числу (так называемый целый резонанс).

Рассмотрим теперь возмущение ΔH , распределённое по периметру ускорителя по некоторому закону. Уравнение движения имеет в таком случае вид

$$\frac{d^2u}{ds^2} + g(s)u = \frac{\Delta H(s)}{HR}. \quad (58)$$

Переходя далее к переменным v и ϕ , введённым ранее с помощью соотношения (28), получим вместо (58) уравнение гармонического осциллятора с внешней возмущающей силой

$$\frac{d^2v}{d\phi^2} + Q^2v = Q^2\beta^{3/2}\frac{\Delta H}{HR}, \quad (59)$$

периодическое решение которого по аналогии с формулой (37) можно записать в виде интеграла

$$v(\phi) = \frac{Q}{2\sin(\pi Q)} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} f(\chi) \cos[Q(\pi + \phi - \chi)] d\chi, \quad (60)$$

где $f(\chi) = \beta^{3/2}\Delta H/HR$.

Действие целого резонанса можно показать более наглядно, если разложить в ряд Фурье функцию $f(\phi)$,

$$f(\phi) = \sum_k f_k \exp(ik\phi); \quad f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \exp(-ik\phi) d\phi. \quad (61)$$

Непосредственно решая уравнение (59) с учётом разложения (61), имеем для $v(\phi)$ выражение в виде ряда

$$v = \sum_k \frac{Q^2 f_k \exp(ik\phi)}{Q^2 - k^2}, \quad (62)$$

откуда очевидно, что орбита частиц наиболее чувствительна к компонентам Фурье с частотами, близкими к бетатронной частоте.

На практике детальное поведение возмущения магнитного поля вдоль орбиты ускорителя $\Delta H(s)$ зачастую неизвестно, в особенности, если ускоритель ещё только проектируется. Необходимо поэтому уметь оценивать максимальное вероятное отклонение орбиты, зная величину среднеквадратичного возмущения магнитного поля ускорителя. С этой целью составим следующее выражение: $V = v^2 + Q^{-2}(dv/d\phi)^2$, имеющее смысл квадрата амплитуды отклонения орбиты при наличии возмущения магнитного поля (по аналогии с колебаниями частицы относительно идеальной орбиты, для которой $v = A \cos(Q\phi)$, $V = A^2$). С учётом соотношения (60), для V получается следующее выражение:

$$V(\phi) = \frac{Q^2}{4\sin^2(\pi Q)} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} f(\psi)f(\chi) \cos[Q(\psi - \chi)] d\psi d\chi. \quad (63)$$

Рассмотрим практически интересный случай отсутствия корреляций между возмущениями в отдельных блоках кольцевого электромагнита, предполагая также, что длины блоков малы по сравнению с длиной волны бетатронных колебаний. Тогда систематический вклад в двойной интеграл в формуле (63) будут давать только те участки орбиты ускорителя, где ψ и χ относятся к одному и тому же магнитному блоку. В таком случае можно положить $\cos[Q(\psi - \chi)] \simeq 1$, и после усреднения по ансамблю двойной интеграл в (63) преобразуется в сумму по магнитным блокам ускорителя

$$\langle V(\phi) \rangle = \frac{1}{4\sin^2(\pi Q)} \sum_i \beta_i l_i^2 \left(\frac{\Delta H_i}{HR} \right)^2, \quad (64)$$

где l_i — длина i -го магнитного блока; $\Delta\psi_i = \Delta\chi_i = l_i/Q\beta_i$. Амплитуда отклонения возмущённой замкнутой орбиты в магнитном блоке с номером k есть $u_k = (\beta_k V_k)^{1/2}$,

поэтому ожидаемое отклонение орбиты даётся формулой

$$\langle u_k^2 \rangle = \frac{\beta_k}{4R^2 \sin^2(\pi Q)} \sum_i \beta_i l_i^2 \left(\frac{\Delta H_i}{H} \right)^2. \quad (65)$$

Последняя формула может быть использована в двух случаях: для анализа искажений орбиты, связанных с ошибками установки квадрупольных линз, а также с разбросом полей в заворачивающих магнитах.

Пусть квадрупольная линза установлена с ошибкой по радиусу, равной Δx . При этом на равновесной орбите появляется ошибка в поле, равная $\Delta H = g_x H R \Delta x$. Вычислим отклонение орбиты в месте расположения фокусирующей квадрупольной линзы для структуры FODO. С помощью (65) и с учётом формул (43) — (45) для тонколинзового приближения получим

$$\overline{x_F^2} = \frac{4\pi Q}{\mu_0} \frac{\overline{(\Delta x)^2}}{[1 - \sin(\mu_0/2)] \sin^2(\pi Q_x)}. \quad (66)$$

При проектировании ускорителя необходимо знать не только среднеквадратичное отклонение орбиты, но и степень вероятности, с которой следует ожидать ещё больших отклонений. С этой целью можно воспользоваться известным фактом — вероятность найти отклонение орбиты, равное x , описывается распределением Гаусса-Рэлея

$$w(x) = \frac{2x}{x^2} \exp\left(-\frac{x^2}{x^2}\right). \quad (67)$$

Следовательно, чтобы вычислить вероятность того, что отклонение орбиты превысит заданную величину x , необходимо проинтегрировать выражение (67) в пределах от x до бесконечности, в результате чего получим

$$P(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{x^2}\right). \quad (68)$$

Если вычислить вероятность того, что отклонение орбиты превышает удвоенную среднеквадратичную величину, то она окажется равной $\sim 2\%$, как это следует из (68). Поэтому максимальное ожидаемое отклонение орбиты x_{max} можно оценить из соотношения

$$x_{max} \simeq 2\sqrt{\overline{x_F^2}} = \frac{4}{\sin(\pi Q_x)} \sqrt{\frac{\pi Q_x}{\mu_0} \frac{1}{1 - \sin(\mu_0/2)} \overline{(\Delta x)^2}}. \quad (69)$$

Последняя формула показывает, что ошибки в установке квадрупольных линз должны быть ограничены жёстким допуском, так как обусловленные этими ошибками искажения орбиты могут усиливаться в десятки раз. Так, например, в ускорителе ИФВЭ ($\mu_0 \simeq 1$, $Q_x \simeq 10$) среднеквадратичная ошибка в установке магнитных блоков, составляющая $\sim 0,1$ мм, приводит, согласно формуле (69), к максимальному отклонению орбиты, равному $x_{max} \simeq 4,5$ мм.

Разброс полей в магнитных блоках ускорителя также может приводить к существенным искажениям замкнутой орбиты. Зная средний квадрат разброса полей в блоках $\overline{(\Delta H/H)^2}$, нетрудно оценить с помощью формулы (65) средний квадрат радиального искажения орбиты:

$$\overline{x_F^2} = \frac{\pi^2 \beta_F \bar{\beta}}{n_B \sin^2(\pi Q_x)} \overline{\left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2}, \quad (70)$$

где n_B — число магнитных блоков в ускорителе. Подставляя в формулу (70) приведенные выше параметры ускорителя ИФВЭ, а также вычисляя произведение структурных функций $\beta_F \bar{\beta} = L^2 [1 + \sin(\mu_0/2)] / \sin^2 \mu_0 = 3,13 \cdot 10^8 \text{ мм}^2$ и полагая величину среднеквадратичного разброса полей в блоках равной 10^{-3} , получаем $\Delta x_F^2 = 51,4 \text{ мм}^2$. Следовательно, $x_{max} \simeq 14 \text{ мм}$.

Если в ускорителе имеются согласованные промежутки с большими значениями функции β , то искажения орбиты могут быть существенно более сильными по сравнению с рассмотренными выше случаями. Это происходит как из-за увеличения вклада данного промежутка в сумму в формуле (65), так и из-за возрастания коэффициента β_F . Поэтому квадрупольные в таком промежутке должны быть особенно тщательно отъюстированы.

При наличии результатов магнитных и геодезических измерений реальные искажения орбиты в ускорителе обычно исследуют на ЭВМ с помощью специальных программ. Полученные же выше формулы используются для быстрых оценок искажений орбиты, а также при расчётах допусков на установку квадрупольных линз и на разброс полей в магнитных блоках ускорителя.

Для уменьшения искажений орбиты частиц, приводящих к неэффективному использованию части апертуры вакуумной камеры, на всех протонных синхротронах имеются соответствующие системы коррекции. Отклонения центра тяжести пучка относительно центра вакуумной камеры измеряются с помощью разрезных пикап-электродов. Для получения детальной картины поведения замкнутой орбиты в ускорителе необходимо, чтобы на любом её отрезке протяжённостью порядка длины волны бетатронных колебаний располагалось по крайней мере три-четыре пикап-электрода.

Исполнительным органом системы коррекции орбиты частиц является набор дипольных магнитов (или набор дополнительных обмоток в заворачивающих магнитах), которые возбуждаются таким образом, чтобы минимизировать отклонения орбиты относительно центра вакуумной камеры.

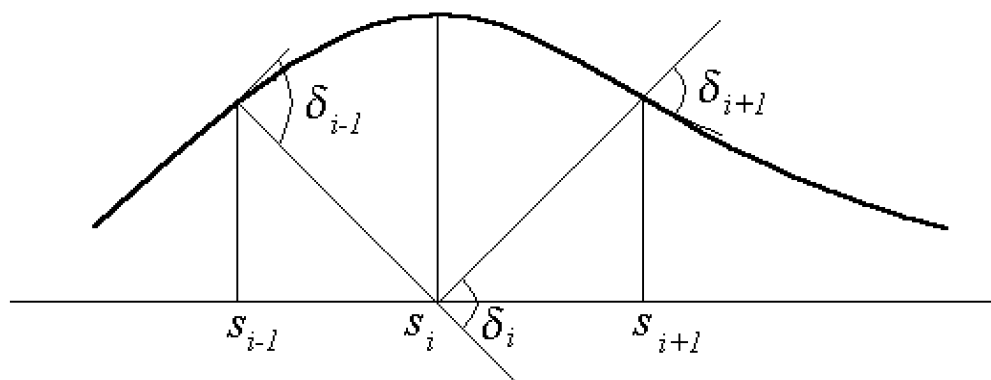


Рис. 8. Бамповая коррекция орбиты.

В протонных синхротронах используются два способа коррекции орбиты частиц — бамповый и гармонический. При бамповой коррекции орбита корректируется по участкам. На участке, где орбита искажена наиболее сильно, выбирается тройка корректоров таким образом, чтобы средний корректор располагался вблизи максимума искажения орбиты (см. рис. 8). Ток в корректоре, расположенном в точке s_{i-1} , подбирается таким

образом, чтобы орбита частиц в точке её максимального отклонения $s = s_i$ прошла через центр вакуумной камеры. За счёт действия второго корректора восстанавливается величина отклонения орбиты в точке s_{i+1} , имевшая место до включения корректоров. Третий корректор используется для восстановления угла наклона орбиты в точке s_{i+1} . При таком способе коррекции орбита изменяется лишь на выбранном отрезке, ограниченном координатами s_{i-1} и s_{i+1} и не меняется на остальной её части. После коррекции максимального отклонения орбиты снова находится место её наибольшего искажения, выбирается новая тройка корректоров и процесс повторяется. Точность бамповой коррекции зависит от числа используемых корректоров и на практике достигает величины порядка одного миллиметра.

При гармонической коррекции из спектра орбиты устраняются компоненты Фурье с частотами, близкими к частоте бетатронных колебаний, которые, согласно (62), вносят наибольший вклад в искажение орбиты. На практике обычно устраняют три-четыре такие гармоники. Электрическая схема коррекции каждой из гармоник состоит из двух независимых цепей, корректирующие сигналы в которых сдвинуты по фазе друг относительно друга на 90° (синусная и косинусная цепи). Гармоническая коррекция орбиты проста и удобна в работе, однако имеет сравнительно низкую точность — при использовании подобной схемы искажения орбиты могут быть уменьшены лишь до величины ~ 1 см. К достоинствам гармонической коррекции следует также отнести относительно небольшие величины токов в системе.

1.2.2. Возмущение градиента магнитного поля

Возмущение градиента магнитного поля в ускорителе влияет, в первую очередь, на частоты бетатронных колебаний и, следовательно, на устойчивость поперечного движения частиц. Кроме этого, при наличии возмущения градиента могут заметно изменяться структурные характеристики ускорителя, а также может возбуждаться параметрический резонанс бетатронных колебаний частиц.

Как и при анализе возмущения замкнутой орбиты ускорителя, рассмотрим сначала точечное возмущение градиента, когда размеры источника возмущения много меньше длины волны бетатронных колебаний. Пусть такое возмущение создаётся с помощью тонкой линзы силой σ , тогда матрица передачи для оборота может быть записана в виде

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\pi Q_0) + \alpha_0 \sin(2\pi Q_0) & \beta_0 \sin(2\pi Q_0) \\ -\gamma_0 \sin(2\pi Q_0) & \cos(2\pi Q_0) - \alpha_0 \sin(2\pi Q_0) \end{pmatrix}. \quad (71)$$

Здесь и ниже индексом 0 обозначены параметры Твисса, относящиеся к невозмущённой структуре ускорителя в точке $s = s_0$, где расположен источник возмущения градиента магнитного поля (тонкая линза). С другой стороны, возмущённая матрица оборота M может быть записана в виде (9). Из сравнения выражений (9) и (71) получается следующая формула для шпура матрицы M :

$$\frac{1}{2} Sp M = \cos(2\pi Q) = \cos(2\pi Q_0) + \frac{\beta_0 \sigma}{2} (\sin 2\pi Q_0), \quad (72)$$

где Q — частота бетатронных колебаний при наличии возмущения градиента магнитного поля. Полагая в (72) $Q = Q_0 + \Delta Q$ ($|\Delta Q| \ll Q_0$), нетрудно получить отсюда сдвиг бетатронной частоты, обусловленный данным возмущением, который получается равным

$$\Delta Q = -\frac{\beta_0 \sigma}{4\pi}. \quad (73)$$

Аналогичным образом можно оценить ширину полосы параметрического резонанса бетатронных колебаний. Если бетатронная частота Q_0 близка к целому или к полуполому значениям, то $|\cos(2\pi Q_0)| \simeq 1$ и, согласно (72), величина $|\cos(2\pi Q)|$ может превысить единицу из-за добавочного члена в правой части этого равенства. Полная ширина запрещённого частотного интервала δQ равна, очевидно, удвоенной величине сдвига бетатронной частоты ΔQ , даваемого формулой (73) — $\delta Q = \beta_0 \sigma / 2\pi$.

Из-за возмущения градиента магнитного поля изменяется также параметр Твисса β . Это можно показать для произвольной точки орбиты с продольной координатой s , представив матрицу оборота в виде произведения трёх матриц,

$$M = A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & 1 \end{pmatrix} B, \quad (74)$$

где A и B — матрицы передачи от точки s_0 , где располагается возмущающая градиент тонкая линза с фокусирующей силой σ , к точке s и от s к s_0 соответственно (см. рис. 9). Перемножая матрицы в (74), найдём изменение элемента m_{12} матрицы M :

$$\Delta m_{12} = \sigma a_{12} b_{12}. \quad (75)$$

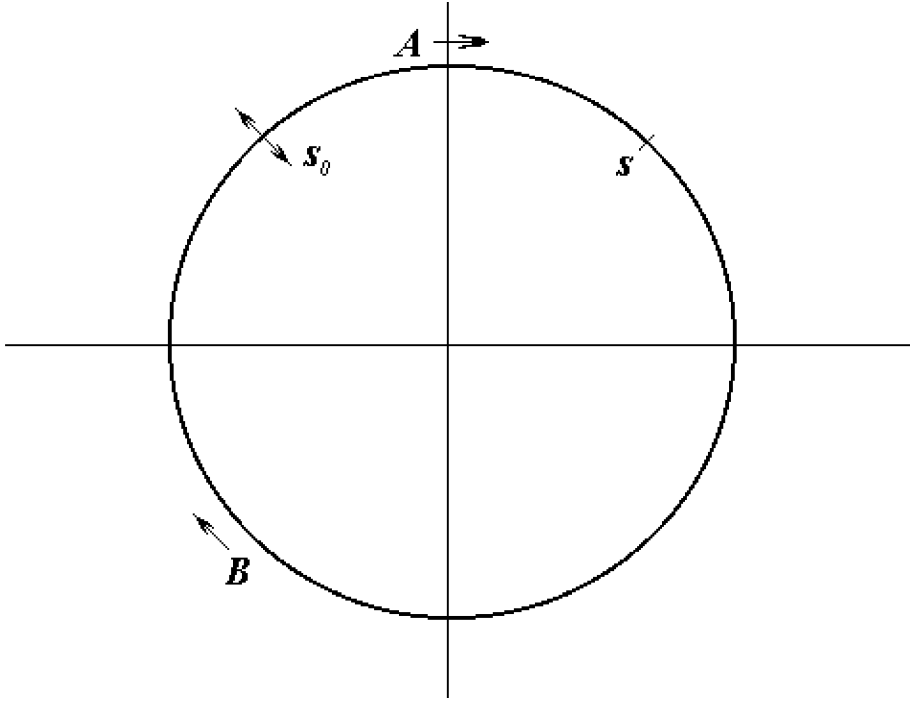


Рис. 9. Схема вычисления возмущения β -функции.

Для нахождения элементов a_{12} и b_{12} матриц A и B воспользуемся выражением матрицы передачи $N(s_2|s_1)$ между двумя произвольными точками структуры с координатами s_1 и s_2 , которую нетрудно получить, решая непосредственно уравнение движения (29) с последующим переходом от координат v, ϕ к координатам u, s . Элемент n_{12} этой матрицы

равен $n_{12} = (\beta_1\beta_2)^{1/2} \sin(\chi_2 - \chi_1)$, где $\beta_{1,2}$ и $\chi_{1,2}$ — соответственно значения функции β и фазы бетатронных колебаний χ в точках s_1 и s_2 . Следовательно, произведение элементов a_{12} и b_{12} можно записать в виде

$$a_{12}b_{12} = \frac{\beta_0\beta(s)}{2} [\cos(2\pi Q_0 - 2\Delta\chi) - \cos(2\pi Q_0)], \quad (76)$$

где $\Delta\chi$ — набег фазы бетатронных колебаний от точки s_0 до точки s .

С другой стороны, изменение элемента m_{12} из-за возмущения градиента магнитного поля в точке s равно

$$\Delta m_{12} = \Delta\beta(s) \sin(2\pi Q_0) + 2\pi\beta(s) \cos(2\pi Q_0)\Delta Q. \quad (77)$$

Приравнивая выражения (75) и (77), а также учитывая соотношения (73) и (76), получаем следующую формулу для изменения значения β -функции в точке s :

$$\Delta\beta(s) = \frac{\sigma\beta_0\beta(s)}{2\sin(2\pi Q_0)} \cos(2\pi Q_0 - 2\Delta\chi). \quad (78)$$

В отличие от возмущения замкнутой орбиты, описываемого выражением (57), знаменатель в последней формуле проходит через нуль при полупелых значениях Q_0 , а частота возмущения в два раза выше.

Обобщим формулы (73) и (78) на случай возмущения градиента магнитного поля ΔG , распределённого вдоль орбиты ускорителя, считая, что возмущение функции $g(s)$, входящей в уравнения движения (1) и (2), описывается малой добавкой $\Delta g(s)$. Рассмотрим бесконечно малый интервал ds орбиты ускорителя вблизи точки $s = s_0$. Воздействие возмущения $\Delta g(s)$ в этой точке можно описать тонкой линзой с силой, равной $-\Delta g(s) ds$, которая, как было показано выше, приводит к следующему изменению шпура матрицы:

$$Sp M = 2 \cos(2\pi Q) = 2 \cos(2\pi Q_0) - \beta(s_0) \sin(2\pi Q_0) \Delta g(s_0) ds, \quad (79)$$

откуда видно, что полное изменение шпура матрицы M получается интегрированием вдоль равновесной орбиты добавки в правой части выражения (79), связанной с воздействием возмущения Δg на рассматриваемом интервале ds . Поэтому сдвиг бетатронной частоты ΔQ даётся следующей формулой:

$$\Delta Q = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi R_0} \beta(s) \Delta g(s) ds. \quad (80)$$

Подобным же образом при наличии возмущения градиента ΔG , распределённого вдоль орбиты ускорителя, вместо формулы (78) можно получить следующее выражение для изменения амплитудной функции $\beta(s)$:

$$\Delta\beta(s) = \frac{\beta(s)}{2\sin(2\pi Q_0)} \int_s^{s+2\pi R_0} \Delta g(s') \beta(s') \cos[2\pi Q_0 + \chi(s') - \chi(s)] ds'. \quad (81)$$

Сравнивая формулы (81) и (60), а затем формулы (60) и (59), нетрудно видеть, что функция $\Delta\beta/\beta(\phi)$ должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \frac{\Delta\beta}{\beta} + 4Q_0^2 \frac{\Delta\beta}{\beta} = 2Q_0^2 \beta^2(s) \Delta g(s). \quad (82)$$

Если теперь правую часть уравнения (82) разложить в ряд Фурье на гармоники $\sim \exp(ik\phi)$, то периодическое решение этого уравнения можно будет записать в виде ряда

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = 2Q_0 \sum_k \frac{f_k \exp(ik\phi)}{4Q_0^2 - k^2}, \quad (83)$$

где $f_k = (1/2\pi) \int_0^{2\pi R_0} \beta(s) \Delta g(s) \exp[-ik\phi(s)] ds$.

Выражение (83) наглядно показывает, что основной вклад в возмущение функции $\beta(s)$ дают гармоники с номерами k , ближайшими к удвоенному значению бетатронной частоты. Такие гармоники подлежат обязательной коррекции, для чего в протонных синхротронах обычно предусматриваются соответствующие системы. Для построения гармонической системы коррекции возмущений градиента магнитного поля используются те же принципы, что и при создании подобной системы для коррекции возмущений замкнутой орбиты ускорителя, рассмотренной в предыдущем разделе. Кроме гармонической системы коррекции возмущений градиента магнитного поля, используемой для ослабления действия параметрических резонансов бетатронных колебаний, в протонных синхротронах предусматривается также система коррекции величины градиента G , позволяющая в соответствии с формулой (80) изменять бетатронные частоты $Q_{x,z}$ с целью нахождения оптимального положения рабочей точки ускорителя, а также в режимах ввода-вывода пучка.

1.2.3. Влияние систематических нелинейностей магнитного поля на бетатронные частоты ускорителя

Разрабатывая идеальную структуру ускорителя, стремятся обеспечить устойчивость поперечного движения частиц за счёт правильного выбора набега фазы бетатронных колебаний на периоде структуры μ_0 . Реальное магнитное поле может, однако, существенным образом изменить идеальные структурные характеристики ускорителя, такие например, как частоты бетатронных колебаний, непосредственно влияющие на устойчивость поперечного движения частиц.

Мы уже рассматривали линейные возмущения магнитного поля ускорителя и его градиента, а также обсуждали их влияние на орбиту ускорителя и частоты бетатронных колебаний частиц. Рассмотрим теперь нелинейные возмущения магнитного поля, возникающие из-за различных причин. В частности, они создаются за счёт гистерезисных явлений (остаточные поля в железе), вихревых токов в вакуумной камере ускорителя (возбуждаемых при изменении ведущего магнитного поля), неравномерного насыщения железа магнитов и линз при больших значениях магнитного поля, дефектов изготовления магнитов и линз и т.д.

Рассмотрим сначала так называемые систематические (усреднённые по периметру ускорителя) нелинейности магнитного поля. Они влияют на бетатронные частоты, делая их различными для разных частиц. Увеличение разброса бетатронных частот может быть опасным, так как при этом возрастает площадь, занимаемая пучком на плоскости бетатронных частот (Q_x, Q_z) , усугубляя таким образом возмущение поперечных размеров пучка из-за воздействия на частицы резонансов бетатронных колебаний. С другой стороны, идеальная машина, в которой отсутствует разброс бетатронных частот, абсолютно неработоспособна из-за неустойчивостей пучка, возникающих при его взаимодействии с оборудованием ускорителя. По этой причине в протонных синхротронах обязательно

предусматриваются системы для управления средними значениями квадратичной и кубической нелинейностей магнитного поля, т.е. зависимостями бетатронных частот от импульса частицы и амплитуды её поперечных колебаний соответственно.

В протонных синхротронах длины магнитов обычно велики по сравнению с поперечными размерами вакуумной камеры ускорителя, поэтому магнитное поле в большинстве случаев можно считать двумерным. Данное предположение не является слишком грубым, так как влияние краёв магнита может быть учтено с помощью дополнительного двумерного магнитного поля. В случае плоского поля векторный потенциал магнитного поля имеет единственную продольную компоненту $A_s = A$, удовлетворяющую двумерному уравнению Лапласа,

$$\Delta_2 A = 0, \quad (84)$$

решение которого в полярных координатах (r, θ) имеет вид

$$A = \sum_n a_n r^n \sin(n\theta) + \sum_n b_n r^n \cos(n\theta). \quad (85)$$

Члены с номером n в формуле (85) соответствуют магниту, имеющему $2n$ полюсов, так как на окружности постоянного радиуса магнитное поле меняет знак $2n$ раз, причём вторая из сумм описывает регулярные мультиполюсные магниты, не имеющие полюсов в медианной плоскости; первая же сумма симметрична относительно медианной плоскости и соответствует косым мультиполюсным магнитам (см. рис. 10).

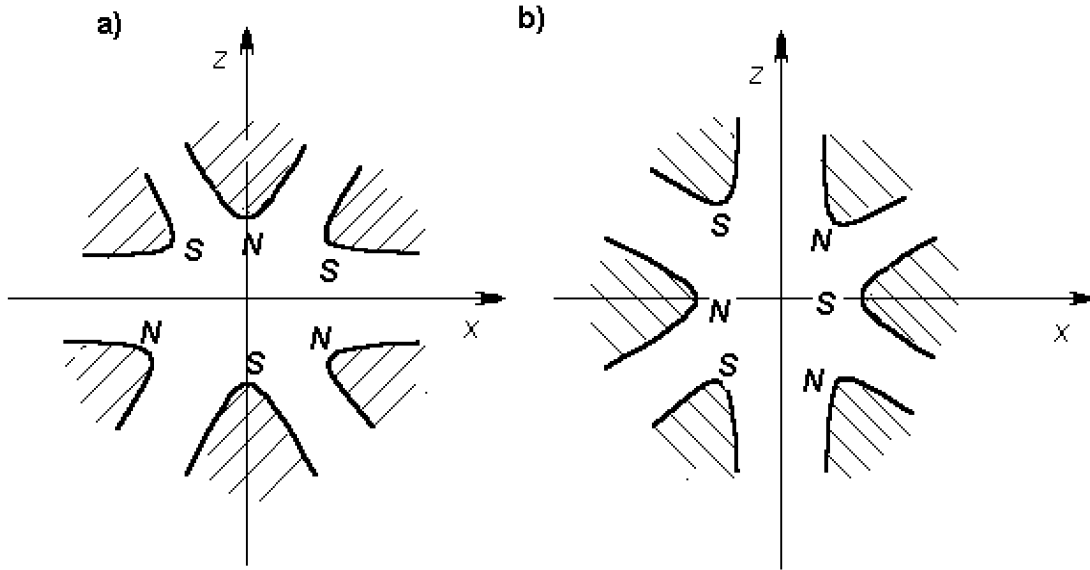


Рис. 10. Нормальный (а) и косой (б) секступольные магниты.

В качестве примера рассмотрим секступольное магнитное поле ($n = 3$). Вычисляя с помощью (85) азимутальную и радиальную компоненты магнитного поля ($h_\theta = -\partial A/\partial r$, $h_r = r^{-1}\partial A/\partial\theta$), а затем переходя к декартовым компонентам h_x и h_z , получаем следующие выражения:

$$h_x = 3[a_3(x^2 - z^2) - 2b_3xz]; \quad h_z = -3[2a_3xz + b_3(x^2 - z^2)]. \quad (86)$$

Постоянные коэффициенты a_3 и b_3 выражают обычно через отклонение магнитного поля ускорителя от номинала $\Delta H_{\kappa\epsilon}$ на краю вакуумной камеры ускорителя (при $r = b$) за счёт квадратичной нелинейности. Так, например, в случае нормальной квадратичной нелинейности коэффициент $b_3 = -\Delta H_{\kappa\epsilon}/(3b^2)$, где $\Delta H_{\kappa\epsilon} = h_z(b, 0)$, и уравнения движения принимают следующий вид:

$$x'' + g_x x = -\frac{h_z}{HR} + \frac{1}{R} \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta H_{\kappa\epsilon}}{b^2 HR} (x^2 - z^2) + \frac{1}{R} \frac{\Delta p}{p}; \quad (87)$$

$$z'' + g_z z = \frac{h_x}{HR} = \frac{\Delta H_{\kappa\epsilon}}{b^2 HR} 2xz. \quad (88)$$

Фокусирующие свойства ускорителя характеризуются параметром $g = \pm G/HR$. Разброс по импульсам приводит к разбросу фокусирующих сил, равному $\Delta g/g = -\Delta p/p_0$. В соответствии с формулой (80), бетатронная частота частицы с импульсом $p_0 + \Delta p$ изменится при этом относительно Q_0 на величину ΔQ , равную

$$\frac{\Delta Q}{Q_0} = \xi \frac{\Delta p}{p_0}. \quad (89)$$

Коэффициент пропорциональности ξ в формуле (89) называется хроматичностью (в данном случае, в отсутствие систематической квадратичной нелинейности, более точное название этого коэффициента — естественная хроматичность). Выражая в формуле (80) Δg через $\Delta p/p_0$, получаем для ξ следующее выражение:

$$\xi = -\frac{1}{4\pi Q_0} \int_0^{2\pi R_0} \beta(s) g(s) ds. \quad (90)$$

Отметим, что для большинства протонных синхротронов с жёсткой фокусировкой значение естественной хроматичности составляет примерно $-1,3$ как для горизонтального, так и для вертикального направлений.

Квадратичная нелинейность, связанная с неидеальностью магнитного поля ускорителя (например, с вихревыми токами в стенках вакуумной камеры, остаточными полями в диполях и т. д.), даёт дополнительный вклад в хроматичность. Это происходит из-за того, что на частицу с импульсом, отличным от равновесного, действует дополнительный градиент магнитного поля, равный

$$\Delta G_{x,z} = \pm \frac{2\Delta H_{\kappa\epsilon} D(s)}{b^2} \frac{\Delta p}{p_0}, \quad (91)$$

так что из формулы (80) получается добавка к хроматичности, обусловленная квадратичной нелинейностью магнитного поля ускорителя,

$$\Delta \xi_{x,z} = \pm \frac{1}{2\pi Q_{x,z} b^2} \int_0^{2\pi R_0} \frac{\Delta H_{\kappa\epsilon}}{HR} \beta_{x,z}(s) D(s) ds. \quad (92)$$

Подставляя в последнюю формулу средние значения величин, зависящих от продольной координаты s , имеем следующую оценку: $\Delta \xi_{x,z} \simeq \pm (R_0^3/Q_{x,z}^4 R b^2) (\Delta H_{\kappa\epsilon}/H)$.

Таким образом, измерив хроматичности ускорителя, можно рассчитывать систематическую квадратичную нелинейность магнитного поля. В системе коррекции квадратичной

нелинейности корректоры обычно располагаются вблизи фокусирующего и дефокусирующего магнитных блоков, при этом можно почти независимо корректировать хроматичности по x - и z -направлениям (подобно коррекции градиента магнитного поля).

В заключение раздела приведём также основные формулы для кубической нелинейности магнитного поля, оказывающей основное воздействие на зависимость бетатронных частот от амплитуды поперечных колебаний. По аналогии с (86), можно получить с помощью формулы (85) следующие соотношения для нормальной кубической нелинейности ($n = 4$):

$$h_z = \frac{\Delta H_{\kappa y \delta}}{H b^3}(x^3 - 3xz^2); \quad h_x = -\frac{\Delta H_{\kappa y \delta}}{H b^3}(z^3 - 3zx^2), \quad (93)$$

где $\Delta H_{\kappa y \delta}$ представляет собой, подобно $\Delta H_{\kappa \epsilon}$, отклонение поля на краю вакуумной камеры относительно номинального значения из-за кубической нелинейности. Уравнения движения имеют при этом вид

$$x'' + g_x x = \frac{\Delta H_{\kappa y \delta}}{H R b^3}(x^3 - 3xz^2); \quad (94)$$

$$z'' + g_z z = \frac{\Delta H_{\kappa y \delta}}{H R b^3}(z^3 - 3zx^2). \quad (95)$$

Видно, что при замене x на z первое уравнение переходит во второе и наоборот. Решая уравнения (94) и (95) методом вариации произвольных постоянных в предположении, что резонансы четвёртого порядка отсутствуют, получаем для сдвигов бетатронных частот в зависимости от амплитуды поперечных колебаний следующее выражение:

$$\Delta Q_{x,z} = \frac{3R_0}{8Rb^3} \left(\varepsilon_{x,z} < \frac{\Delta H_{\kappa y \delta}}{H} \beta_{x,z}^2 > -2\varepsilon_{z,x} < \frac{\Delta H_{\kappa y \delta}}{H} \beta_x \beta_z > \right), \quad (96)$$

где угловые скобки означают усреднение по периметру ускорителя; $\varepsilon_{x,z} = A_{x,z}/\beta_{x,z}$ ($A_{x,z}$ — амплитуды поперечных колебаний). В протонном синхротроне с совмещёнными функциями $(\Delta H_{\kappa y \delta})_F \simeq -(\Delta H_{\kappa y \delta})_D$, поэтому второй член в формуле (96) почти не влияет на бетатронные частоты. Нелинейность в фокусирующих блоках влияет в основном на ΔQ_x , а в дефокусирующих — на ΔQ_z .

1.3. РЕЗОНАНСЫ БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЧАСТИЦ

Резонансы поперечных колебаний частиц наступают в случае, когда их бетатронные частоты удовлетворяют следующему условию: $n_x Q_x + n_z Q_z = k$, где n_x , n_z , k — целые числа, $n = |n_x| + |n_z|$ — порядок резонанса. При выполнении данного условия даже очень малые возмущения магнитного поля ускорителя могут приводить к быстрому росту поперечных размеров ускоряемого пучка протонов. В настоящем разделе рассматриваются наиболее опасные резонансы бетатронных колебаний частиц в протонном синхротроне.

1.3.1. Параметрический резонанс

В качестве простейшего примера параметрического резонанса рассмотрим маятник с нитью, длина которой изменяется во времени с периодом $T = 2\pi/\omega$: $l = l_0 + l_1 \cos(\omega t + \phi_0)$, $l_1 \ll l_0$. В первом приближении можно положить $\chi = \chi_{max} \cos \omega_0 t$, где χ — угловое отклонение маятника от положения равновесия, ω_0 — его собственная частота. Сила

натяжения нити маятника F при этом колеблется с удвоенной частотой: $F \sim \cos \chi \simeq 1 - \chi^2/2 = 1 - \chi_{max}^2/4 - (\chi_{max}^2/4) \cos 2\omega_0 t$, так что работа W , совершаемая над маятником, равна:

$$W = \int_0^t F(dl/dt) dt \sim ch i_{max}^2 \int_0^t \cos 2\omega_0 t \sin(\omega t + \phi_0) dt.$$

Отсюда видно, что средняя работа за период колебаний T отлична от нуля лишь в случае параметрического резонанса, когда частота возмущения ω совпадает с удвоенным значением собственной частоты ω_0 . В последнем случае амплитуда колебаний маятника будет возрастать с течением времени, даже если в начальный момент времени она уменьшалась.

В протонном синхротроне параметрический резонанс бетатронных колебаний вызывается азимутальными гармониками возмущения градиента магнитного поля ускорителя. Условие резонанса имеет вид $2Q_{x,z} = k$, следовательно, параметрический резонанс имеет место при целых и полуцелых значениях бетатронных частот. Данный резонанс является одним из наиболее опасных, поэтому рабочую точку ускорителя обычно стремятся располагать как можно дальше от указанных резонансных линий.

Уравнения поперечного движения частиц при наличии возмущений градиента магнитного поля ΔG имеют вид

$$x'' + g_x x = -\frac{\Delta G}{HR} x; \quad (97)$$

$$z'' + g_z z = \frac{\Delta G}{HR} z. \quad (98)$$

Уравнения (97) и (98) идентичны, поэтому для определённости остановимся на решении первого из них, воспользовавшись для этого методом вариации произвольных постоянных. Здесь и ниже — при рассмотрении последующих резонансов — удобно представлять невозмущённое решение соответствующего однородного дифференциального уравнения в виде $x = a\varphi + a^*\varphi^*$, где a и a^* — комплексные амплитуды поперечных колебаний, подлежащие вариации; φ и φ^* — функции Флоке, нормированные соотношением

$$\varphi\varphi^{*'} - \varphi^*\varphi' = -2i\Delta,$$

где $\Delta = 1$ м — нормировочная постоянная. Связь между введённой ранее при рассмотрении структурных характеристик ускорителя β -функцией и модулем функции Флоке $|\varphi|$ следующая: $\beta = |\varphi|^2/\Delta$. Решая уравнение (97), перейдём к дифференциальному уравнению первого порядка относительно комплексной амплитуды a

$$\frac{da}{d\vartheta} = \frac{iR_0\Delta G}{2HR\Delta} f^{*2} \exp(-2iQ\vartheta)a^*, \quad (99)$$

где f — периодическая часть функции Флоке: $\varphi = f(\vartheta) \exp(iQ\vartheta)$, $\vartheta = s/R_0$. При переходе от уравнения (97) к (99) отброшен член, пропорциональный $|\varphi|^2$, не имеющий отношения к параметрическому резонансу бетатронных колебаний, а приводящий лишь к сдвигу бетатронной частоты ΔQ , для которого ранее уже получена формула (80).

Раскладывая далее периодический по ϑ множитель перед экспонентой в (99) в ряд Фурье,

$$\frac{\Delta G}{HR} f^{*2} = \sum_k C_k \exp(ik\vartheta); \quad C_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta G}{HR} f^{*2} \exp(-ik\vartheta) d\vartheta,$$

и производя затем усреднение в правой части (99) вдоль равновесной орбиты ускорителя, т.е. оставляя лишь резонансный член с $k \simeq 2Q$, получаем вместо (99) следующее уравнение:

$$\frac{da}{d\vartheta} \simeq P \exp(-2i\delta\vartheta)a^*, \quad (100)$$

где $\delta = Q - k/2$, $|\delta| \ll 1$; P — комплексная величина, называемая силой резонанса,

$$P_{x,z} = \pm \frac{iR_0}{2\Delta} < \frac{\Delta G}{HR} \varphi_{x,z}^{*2} >. \quad (101)$$

В формуле (101) угловые скобки означают усреднение по обороту, а значение функции Флоке $\varphi_{x,z}$ берётся при $Q = k/2$.

Подставляя в уравнение (100) комплексную амплитуду a в виде $a = |a| \exp(i\eta)$ и разделяя его правую и левую части на реальные и мнимые величины, получаем вместо (100) следующую систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$|a|' = |aP| \cos(2\eta + 2\delta\vartheta - \arg P); \quad (102)$$

$$\eta' = -|P| \sin(2\eta + 2\delta\vartheta - \arg P), \quad (103)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по ϑ . Можно непосредственно проинтегрировать систему уравнений (102), (103), однако её решения выражаются через эллиптические интегралы и слишком громоздки для анализа. Анализ параметрического резонанса проще всего проводится в переменных $I = |a|^2/2$, $w = \eta + \delta\vartheta - \arg P/2$, в которых уравнения движения имеют каноническую форму с гамильтонианом $\mathcal{H}(I, w) = I(\delta - |P| \sin 2w)$. Так как гамильтониан \mathcal{H} не зависит явно от времени, то кривые $\mathcal{H} = const$ являются интегралами движения.

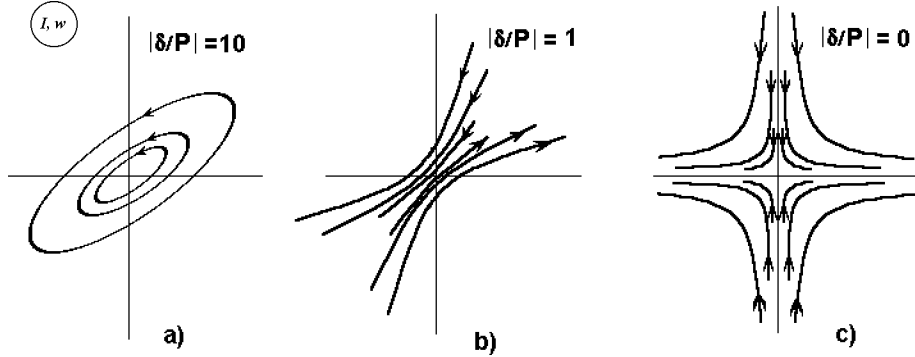


Рис. 11. Фазовые диаграммы для параметрического резонанса ($2Q = k$).

На рис. 11 в качестве примера показаны такие кривые на плоскости (I, w) для $\mathcal{H} = const$. Видно, что вдали от резонанса (при $|\delta| = 10|P|$) кривые замкнуты, так что поперечное движение частиц устойчиво. При этом из-за близости резонанса происходят биения амплитуды колебаний, глубину которых нетрудно определить, приравняв значения гамильтониана \mathcal{H} при $\sin 2w = \pm 1$, откуда получается

$$\frac{|a|_{max}}{|a|_{min}} = \left(\frac{|\delta| + |P|}{|\delta| - |P|} \right)^{1/2}. \quad (104)$$

Период биений можно найти, воспользовавшись уравнением движения

$$w' = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = \delta - |P| \sin 2w. \quad (105)$$

Разделив в (105) переменные, а затем проинтегрировав по w в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$, получим для периода биений T формулу

$$T = \frac{1}{2f_0} \frac{1}{\sqrt{\delta^2 - |P|^2}}, \quad (106)$$

где f_0 — частота обращения пучка в ускорителе, $|\delta| > |P|$.

При $|\delta| = |P|$ наступает собственно резонанс, фазовые траектории разрываются, и поперечное движение частиц становится неустойчивым. Рассмотрим наиболее опасный случай, когда расстройка $\delta = 0$. Дифференцируя по ϑ правую и левую части уравнения (100), получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$a'' = |P|^2 a, \quad (107)$$

решение которого имеет вид

$$a = a_0 \cosh |P|\vartheta + \frac{P}{|P|} a_0^* \sinh |P|\vartheta, \quad (108)$$

откуда получается следующее выражение для модуля квадрата амплитуды:

$$|a|^2 = \frac{|a_0|^2}{2} [(1 + \cos \chi) \exp(2|P|\vartheta) + (1 - \cos \chi) \exp(-2|P|\vartheta)]. \quad (109)$$

Фаза χ в (109) зависит от начальных условий. При больших ϑ имеем отсюда

$$\left| \frac{a}{a_0} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \chi}{2}} \exp(|P|\vartheta). \quad (110)$$

Видно, что амплитуда поперечных колебаний частиц при параметрическом резонансе возрастает в e раз за $n = (2\pi|P|)^{-1}$ оборотов пучка в ускорителе. К примеру, если $|P| = 10^{-3}$, то $n \simeq 150$ оборотов. Ясно поэтому, насколько опасен данный резонанс.

1.3.2. Линейный разностный резонанс связи

Связь поперечных колебаний частиц в ускорителе может приводить к потере части интенсивности пучка даже в том случае, когда остальные параметры ускорителя не выходят за допустимые пределы. Предположим, что при инжекции горизонтальный эмиттанс пучка в точности равен горизонтальному аксептансу вакуумной камеры, а также, что при использовании тонкого пучка осуществлена необходимая коррекция орбиты, бетатронной частоты, хроматичности и других параметров ускорителя и всё выглядит абсолютно нормальным. Однако после инжекции полномасштабного пучка появляются потери частиц. Причиной подобных потерь чаще всего является наличие в ускорителе косоугольного квадрупольного поля, приводящего к связи горизонтального и вертикального движений частиц.

Сильная связь бетатронных колебаний частиц в двух вертикальных направлениях подобна двум связанным гармоническим осцилляторам, когда имеет место передача энергии

от одного осциллятора к другому на частоте, равной разности их собственных частот. При этом горизонтальный эмиттанс пучка может полностью переходить в вертикальный, в результате чего пучок может превысить допустимую в вертикальном направлении апертуру.

Линейный разностный резонанс связи возбуждается в ускорителях азимутальными гармониками либо косоугольного квадрупольного, либо продольного магнитного поля. Рассмотрим подробно случай косоугольного квадрупольного поля, являющегося основной причиной данного резонанса, как будет видно из дальнейшего. При наличии косоугольного магнитного поля $h_z = G_s z$ и $h_x = -G_s x$ (G_s — градиент этого поля), так что уравнения движения имеют вид

$$x'' + g_x x = -\frac{G_s}{HR} z; \quad (111)$$

$$z'' + g_z z = -\frac{G_s}{HR} x. \quad (112)$$

Методика решения уравнений (111) и (112) аналогична использованной выше при решении уравнения (97). Применяя метод вариации произвольных постоянных и усредняя по обороту получившиеся дифференциальные уравнения для комплексных амплитуд a_x и a_z , имеем вместо (111) и (112) следующую систему из двух укороченных уравнений:

$$\frac{da_x}{d\vartheta} = iP \exp(-i\delta\vartheta) a_z; \quad (113)$$

$$\frac{da_z}{d\vartheta} = iP^* \exp(i\delta\vartheta) a_x, \quad (114)$$

где $\delta = Q_x - Q_z$, $|\delta| \ll 1$, а сила резонанса P определена соотношением

$$P = \frac{R_0}{2\Delta} < \frac{G_s}{HR} \varphi_x^* \varphi_z >, \quad (115)$$

в котором значения функций Флоке берутся при $\delta = 0$. При переходе от уравнений (111), (112) к укороченным уравнениям (113), (114) отброшены члены, пропорциональные $\varphi_x^* \varphi_z^*$, имеющие отношение к линейному суммовому резонансу связи, который рассматривается в следующем разделе.

Составляя с помощью (113) и (114) уравнения для квадратов модулей амплитуд, нетрудно показать, что суммарная амплитуда поперечных колебаний остаётся неизменной при линейном разностном резонансе связи: $|a_x|^2 + |a_z|^2 = const$. Следовательно, если поперечные эмиттансы пучка равны для обоих направлений, то данный резонанс не представляет опасности. Однако на практике часто бывает так, что радиальный эмиттанс в несколько раз превышает вертикальный. В последнем случае разностный резонанс может приводить к потерям частиц.

Продифференцировав обе части уравнения (113) по ϑ , получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно комплексной амплитуды a_x

$$a_x'' + i\delta a_x' + |P|^2 a_x = 0. \quad (116)$$

Здесь и ниже (до конца настоящей главы) штрихом обозначается дифференцирование по ϑ . Аналогичное уравнение относительно амплитуды a_z отличается от (116) лишь знаком

перед вторым членом. Поэтому общие решения для комплексных амплитуд могут быть записаны в виде

$$a_{x,z} = A_{x,z} \exp[-i(\pm\delta - \eta)\frac{\vartheta}{2}] + B_{x,z} \exp[-i(\pm\delta + \eta)\frac{\vartheta}{2}], \quad (117)$$

где $\eta = (\delta^2 + 4|P|^2)^{1/2}$. Дифференцируя далее уравнения (117) по ϑ и приравнивая соответствующие результаты к правым частям уравнений (113) и (114), а также полагая $A_x = A$ и $B_z = B$, получаем следующие связи между постоянными коэффициентами: $A_z = A(\eta - \delta)/2P$; $B_x = -B(\eta - \delta)/2P^*$.

Подставляя в (117) получившиеся соотношения и вычисляя модули квадратов амплитуд, получаем для $|a_x|^2$ выражение

$$|a_x|^2 = |A|^2 + |B|^2 \frac{(\eta - \delta)^2}{4|P|^2} - \left| \frac{AB^*}{P} \right| (\eta - \delta) \cos(\eta\vartheta - \chi). \quad (118)$$

Уравнение для $|a_z|^2$ получается из (118), если в нём поменять местами постоянные A и B и изменить знак перед последним членом. Следовательно, формула для суммы квадратов модулей амплитуд может быть записана в виде

$$|a_x|^2 + |a_z|^2 = (|A|^2 + |B|^2) \left[1 + \frac{(\eta - \delta)^2}{4|P|^2} \right]. \quad (119)$$

Из формулы (118) нетрудно найти период биений амплитуд поперечных колебаний частиц T при разностном резонансе связи, полагая $\eta\vartheta = 2\pi$, откуда

$$T = \frac{1}{f_0} \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + 4|P|^2}}. \quad (120)$$

Чтобы определить глубину биений, предположим, что в некоторый момент времени пучок был резко смещён в горизонтальном направлении. Начальная амплитуда колебаний пучка в вертикальном направлении равна нулю, поэтому из формулы (117) получается следующая связь между коэффициентами A и B : $B = -A(\eta - \delta)/2P$. Полное изменение квадрата модуля амплитуды в процессе биений найдём, воспользовавшись формулой (118),

$$\Delta|a_x|^2 = 2|AB^*| \frac{\eta - \delta}{|P|} = |A|^2 \frac{(\eta - \delta)^2}{|P|^2}. \quad (121)$$

Вычисляя затем квадрат модуля начальной амплитуды колебаний пучка $|a_{x0}|^2$ с помощью инварианта (119),

$$|a_{x0}|^2 = |A|^2 \left[1 + \frac{(\eta - \delta)^2}{4|P|^2} \right]^2, \quad (122)$$

и составляя отношение выражений (121) и (122), получаем после несложных преобразований

$$\frac{\Delta|a_x|^2}{|a_{x0}|^2} = \frac{4|P|^2}{4|P|^2 + \delta^2}. \quad (123)$$

Формула (123) показывает, что при резонансе ($\delta = 0$) глубина биений имеет наибольшую величину, причём модуляция амплитуды колебаний пучка достигает 100%. Вдали от резонанса (при $|\delta| \gg |P|$) глубина биений даётся выражением

$$\frac{\Delta|a_x|^2}{|a_{x0}|^2} \simeq \frac{4|P|^2}{\delta^2}. \quad (124)$$

Отметим также, что формулы (120) и (123) позволяют относительно просто определять расстройку δ и силу резонанса $|P|$ по результатам измерений глубины и периода биений после резкого смещения пучка по одному из поперечных направлений.

При линейном разностном резонансе связи можно выделить главные оси, вдоль которых поперечные колебания частиц имеют одинаковые частоты, называемые собственными. Обозначим $Q = (Q_x + Q_z)/2$, так что $Q_{x,z} = Q \pm \delta/2$, и запишем, с учётом формулы (117), решения уравнений (111) и (112) в виде

$$x = Af_x \exp\left[i\left(Q + \frac{\eta}{2}\right)\vartheta\right] - Bf_x \frac{\eta - \delta}{2P^*} \exp\left[i\left(Q - \frac{\eta}{2}\right)\vartheta\right] + \text{к.с.}; \quad (125)$$

$$z = Bf_z \exp\left[i\left(Q - \frac{\eta}{2}\right)\vartheta\right] + Af_z \frac{\eta - \delta}{2P} \exp\left[i\left(Q + \frac{\eta}{2}\right)\vartheta\right] + \text{к.с.} \quad (126)$$

Если теперь в выражениях (125) и (126) сначала положить $A = 0$, а затем — $B = 0$, то таким образом определятся направления главных осей колебаний,

$$\frac{x}{z} = \left| \frac{\varphi_x}{\varphi_z} \right| \frac{\delta \pm \sqrt{\delta^2 + 4|P|^2}}{2|P|}. \quad (127)$$

При разностном резонансе связи сначала измеряются собственные частоты колебаний, равные $Q \pm \eta/2$, а затем рассчитываются частоты $Q_{x,z}$ после предварительного определения значений δ и $|P|$ с помощью описанной выше методики.

1.3.3. Линейный суммовый резонанс

Если бетатронные частоты удовлетворяют соотношению $Q_x + Q_z = k + \delta$, где k — целое число, $|\delta| \ll 1$, то имеет место линейный суммовый резонанс. Дифференциальные уравнения для комплексных амплитуд получаются из уравнений движения (111) и (112) аналогичным образом, как и в случае разностного резонанса, за исключением того, что усреднению по обороту в правых частях уравнений теперь подлежат отброшенные ранее члены, пропорциональные $\varphi_x^* \varphi_z^*$. Укороченные уравнения относительно комплексных амплитуд могут быть записаны в виде

$$\frac{da_x}{d\vartheta} = iP \exp(-i\delta\vartheta) a_z^*; \quad (128)$$

$$\frac{da_z}{d\vartheta} = iP \exp(-i\delta\vartheta) a_x^*, \quad (129)$$

где сила резонанса P определена соотношением

$$P = \frac{R_0}{2\Delta} \left\langle \frac{G_s}{HR} \varphi_x^* \varphi_z^* \right\rangle, \quad (130)$$

где, как и в предыдущем разделе, функция $G_s(\vartheta)$ описывает зависимость косоугольного градиента магнитного поля от азимута ускорителя.

Подставляя в (128) и (129) комплексные амплитуды в виде $a_{x,z} = |a_{x,z}| \exp(i\eta_{x,z})$ и отделяя в уравнениях реальные и мнимые части, приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$|a_x|' = |a_z P| \sin(w_x + w_z); \quad (131)$$

$$|a_z|' = |a_x P| \sin(w_x + w_z); \quad (132)$$

$$\eta_x' = \left| \frac{a_z}{a_x} \right| |P| \cos(w_x + w_z); \quad (133)$$

$$\eta_z' = \left| \frac{a_x}{a_z} \right| |P| \cos(w_x + w_z), \quad (134)$$

где $w_{x,z} = \eta_{x,z} + (\delta\vartheta - \arg P)/2$.

Сделаем теперь следующую замену переменных: $I_x = |a_x|^2/2$ и $I_z = |a_z|^2/2$. В переменных (I, w) уравнения становятся каноническими с гамильтонианом \mathcal{H} , равным

$$\mathcal{H} = 2|P| \sqrt{I_x I_z} \cos(w_x + w_z) + (I_x + I_z) \frac{\delta}{2}, \quad (135)$$

не зависящим явно от времени и являющимся поэтому интегралом движения.

Непосредственно из уравнений (131) и (132) получается следующая связь между абсолютными величинами поперечных амплитуд: $|a_x|^2 - |a_z|^2 = \text{const}$ (или $I_x - I_z = \text{const}$). Следовательно, при суммовом резонансе одновременно возрастают амплитуды колебаний по обоим направлениям. Полагая начальные амплитуды колебаний одинаковыми, выясним, при каких параметрах ускорителя теряется устойчивость поперечного движения. В силу приведенной здесь связи амплитуд поперечных колебаний, можно в таком случае положить $I_x = I_z = I$, $w_x + w_z = w - \pi/2$, так что гамильтониан \mathcal{H} примет тот же самый вид, который он имеет при параметрическом резонансе $\mathcal{H} = I[\delta - 2|P| \sin(w)]$, откуда видно, что разрыв фазовых траекторий происходит при $|\delta/P| < 2$.

Физика развития суммового резонанса аналогична рассмотренному выше случаю параметрического резонанса, за исключением того, что при суммовом резонансе амплитуды колебаний возрастают одновременно по обоим направлениям. В области устойчивости (при $|\delta/P| > 2$) имеет место формула для периода биений T , подобная соответствующим формулам для параметрического и разностного резонансов,

$$T = \frac{1}{f_0} \frac{1}{\sqrt{\delta^2 - 4|P|^2}}. \quad (136)$$

В заключение раздела отметим, что линейные резонансы связи могут также возникать из-за продольного магнитного поля. Обычно, однако, его влияние существенно более слабое по сравнению со случаем косоугольного квадрупольного магнитного поля, так как соответствующие члены в уравнениях движения пропорциональны поперечным скоростям частиц, которые малы по сравнению с продольной скоростью пучка.

1.3.4. Квадратичный одномерный резонанс

При наличии в ускорителе пространственных гармоник квадратичной нелинейности магнитного поля может иметь место нелинейный резонанс третьего порядка. Данный резонанс может также создаваться искусственно с целью его использования для медленного вывода частиц из ускорителя. В последнем случае резонансная раскачка пучка осуществляется с помощью специальной системы, представляющей собой набор секстипольных линз, создающих в ускорителе необходимую для возбуждения данного резонанса гармонику квадратичной нелинейности магнитного поля.

В качестве исходного уравнения движения воспользуемся уравнением (87), в котором положим $\Delta p = 0$. Член в правой части данного уравнения, пропорциональный z^2 , ответственный за нелинейный резонанс связи, здесь не рассматривается. Решая (87) методом вариации произвольных постоянных при учёте в правой части уравнения только члена, пропорционального x^2 , получаем дифференциальное уравнение относительно комплексной амплитуды поперечных колебаний a (индекс x в настоящем разделе будет опускаться, так как рассматриваемый резонанс одномерный),

$$\frac{da}{d\vartheta} = -\frac{iR_0}{2\Delta} \frac{\Delta H_{\kappa\epsilon}}{HRb^2} (a^2|\varphi|^2\varphi + 2|a|^2|\varphi|^2\varphi^* + a^{*2}\varphi^{*3}). \quad (137)$$

Первый и второй члены в уравнении (137) могут быть отброшены, так как они ответственны за целый резонанс при $Q = k$, уже обсуждавшийся ранее. Оставим в (137) только третий член, возбуждающий резонанс $3Q = k$, и воспользуемся методом усреднения — раскладывая в ряд Фурье выражение $(\Delta H_{\kappa\epsilon}/HRb^2)f^{*3}$, а затем усредняя правую часть уравнения (137) по обороту, получаем укороченное уравнение относительно комплексной амплитуды a ,

$$\frac{da}{d\vartheta} = P \exp(-3i\delta\vartheta) a^{*2}, \quad (138)$$

в котором сила резонанса P определена соотношением

$$P = -\frac{iR_0}{2\Delta} \left\langle \frac{\Delta H_{\kappa\epsilon}}{HRb^2} \varphi^{*3} \right\rangle. \quad (139)$$

Отделяя затем в правой и левой частях уравнения (138) реальные и мнимые части и, соответственно, приравнивая их, и затем переходя к каноническим переменным $I = |a|^2/2$ и $w = \eta + \delta\vartheta - \arg P/3$, получаем следующую систему уравнений:

$$I' = 2\sqrt{2}|P|I^{3/2} \cos 3w; \quad (140)$$

$$w' = \delta - |P|\sqrt{2I} \sin 3w, \quad (141)$$

где $\delta = 3Q - k$.

На плоскости (I, w) область устойчивых колебаний отделяется от неустойчивой области кривой, называемой сепаратрисой. Фазовые траектории частиц для квадратичного резонанса показаны на рис. 12. Сепаратриса проходит через три особые точки, координаты которых легко найти, если положить в уравнениях (140) и (141) $I' = 0$ и $w' = 0$. Из первого уравнения имеем $\cos 3w = 0$, а из второго — $|\delta| = |P|\sqrt{2I}$, поэтому координаты особых точек равны $I_l = (\delta/|P|)^2/2$; $w_l = \pi/6 + (l-1)2\pi/3$, где $l = 1, 2, 3$.

При использовании квадратичного резонанса для медленного вывода частиц из ускорителя каждая конкретная частица попадает на азимут, где происходит вывод, через два оборота на третий. За это время должен обеспечиваться достаточный прирост амплитуды поперечных колебаний, так чтобы выводимые частицы не попадали на нож септума.

В заключение отметим, что характеристики нелинейных резонансов зависят от величины амплитуды поперечных колебаний A_{max} , поэтому они в основном представляют опасность при инжекции частиц в ускоритель, а также на начальном участке ускорительного цикла, когда амплитуды поперечных колебаний частиц достаточно велики. Дело в том, что как отмечалось выше, $A_{max} \sim \sqrt{\epsilon} \sim 1/\sqrt{p}$. Отсюда видно, что из-за адиабатического затухания поперечных колебаний частиц влияние нелинейных бетатронных

резонансов быстро ослабевает с увеличением энергии пучка. Так, например, рассмотренный в настоящем разделе квадратичный резонанс не представляет опасности, если максимальное значение переменной $I = I_{max}$ для частиц в пучке удовлетворяет условию $2I_{max} \ll (\delta/|P|)^2$, что эквивалентно следующему требованию к амплитуде A_{max} : $A_{max} \ll 2|\varphi_{max}|\delta/|P|$.

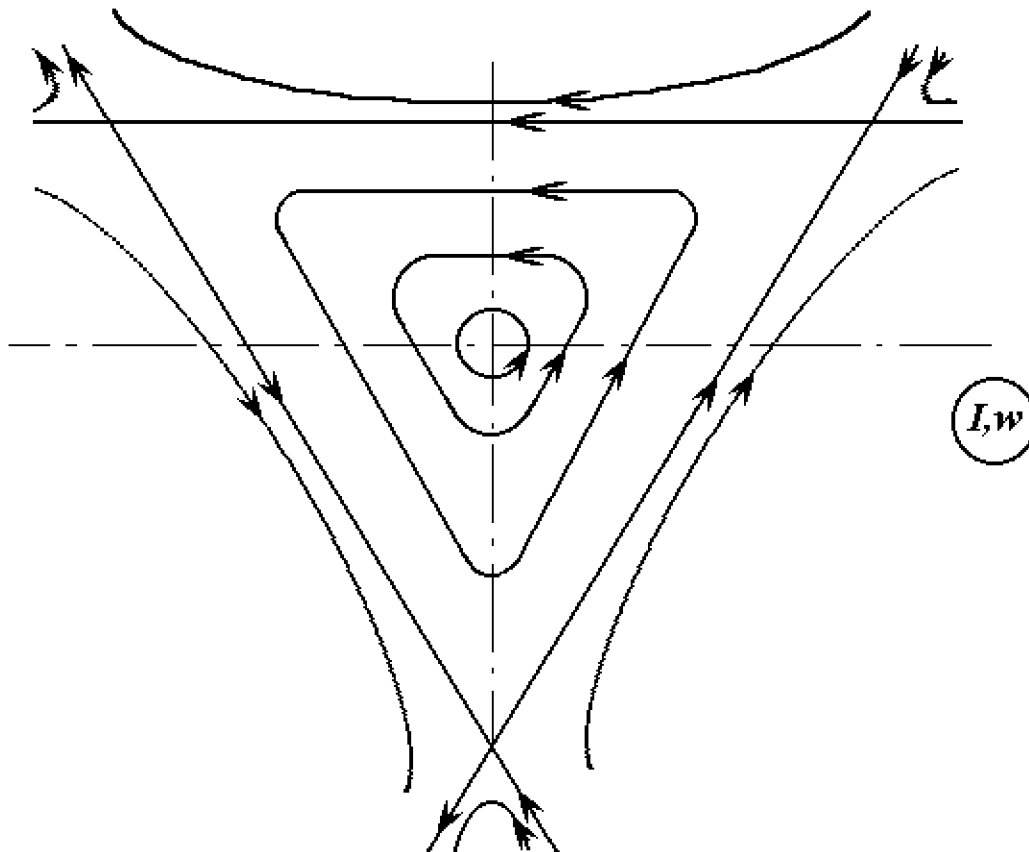


Рис. 12. Фазовая диаграмма для резонанса $3Q = k$.

1.4. ПРОДОЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ПРОТОННОМ СИНХРОТРОНЕ

1.4.1. Фазовое уравнение

Рассмотрим основные особенности продольного движения частиц в протонном синхротроне. Продольное электрическое поле \mathcal{E} , используемое для ускорения протонов, создаётся обычно с помощью резонаторов, расположенных вдоль орбиты ускорителя и соответствующим образом сфазированных. Данное поле может быть разложено на волны, бегущие вдоль азимута ускорителя:

$$\mathcal{E} = \sum_k \mathcal{E}_k \exp[i \int (k\omega - \omega_{RF}) dt], \quad (142)$$

где ω — частота обращения пучка в ускорителе, ω_{RF} — радиочастота. Систематический вклад в энергию частиц даётся резонансной волной, фазовая скорость которой примерно совпадает со скоростью частицы. Нерезонансные волны в среднем не оказывают влияния на продольное движение частиц в ускорителе и при дальнейшем анализе могут не учитываться. Методика выделения резонансной бегущей волны продольного электрического поля позволяет использовать единый подход при описании продольных колебаний частиц независимо от конкретной конструкции ускоряющей системы.

Запишем резонансную волну продольного электрического поля в виде $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}_q \cos \varphi$, где φ — фаза частицы относительно внешнего ускоряющего поля, $\varphi = \int \omega_{RF} dt - q \int \omega dt$; целое число q называют кратностью ускорения. Более привычно вместо \mathcal{E} использовать амплитуду ускоряющего напряжения V , связь между которыми можно получить из максимального значения прироста энергии частицы за оборот $V = \mathcal{E}_q 2\pi R_0$.

Частица, находящаяся в точном синхронизме с резонансной волной продольного электрического поля, называется синхронной или равновесной. Из равенства силы Лоренца и центростремительной силы на орбите, импульс синхронной частицы p_s удовлетворяет соотношению

$$p_s c = e \bar{H}_s R_{0s}, \quad (143)$$

где c — скорость света; e — заряд частицы; \bar{H}_s — средняя величина магнитного поля на орбите синхронной частицы; R_{0s} — средний радиус синхронной частицы. С другой стороны, скорость изменения синхронного импульса зависит от амплитуды ускоряющего напряжения V и фазы φ_s синхронной частицы,

$$\frac{dp_s}{dt} = e \mathcal{E}(\varphi_s) = \frac{eV}{2\pi R_0} \cos \varphi_s. \quad (144)$$

В протонном синхротроне ускорение частиц происходит обычно при $R_{0s} = const$, поэтому в таком случае из формул (143) и (144) получается следующее выражение для синхронной фазы φ_s :

$$\cos \varphi_s = \frac{2\pi R_{0s} R_s}{cV} \frac{dH}{dt}, \quad (145)$$

где dH/dt и R_s — соответственно скорость изменения магнитного поля и радиус кривизны синхронной частицы в магнитном блоке протонного синхротрона. Формула (145), в частности, показывает, что в протонном синхротроне скорость изменения магнитного поля и амплитуда ускоряющего напряжения не могут задаваться произвольным образом, так как должно выполняться условие $|\cos \varphi_s| < 1$.

Для произвольной частицы с импульсом $p = p_s + \Delta p$, движущейся по орбите со средним радиусом $R_0 = R_{0s} + \Delta R_0$, скорость изменения импульса \dot{p} даётся формулой, аналогичной (144),

$$\dot{p} = \frac{eV \cos \varphi}{2\pi(R_{0s} + \Delta R_0)}. \quad (146)$$

Составляя разность

$$(R_{0s} + \Delta R_0)\dot{p} - R_{0s}\dot{p}_s = \frac{eV}{2\pi}(\cos \varphi - \cos \varphi_s) \quad (147)$$

и преобразуя левую часть этого равенства (в линейном приближении по малым отклонениям $|\Delta R_0| \ll R_{0s}$ и $|\Delta p| \ll p_s$) к виду

$$(R_{0s} + \Delta R_0)\dot{p} - R_{0s}\dot{p}_s \simeq R_{0s} \frac{d\Delta p}{dt} + \dot{p}_s \left. \frac{dR_0}{dp} \right|_s \Delta p, \quad (148)$$

получаем одно из двух обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих продольные колебания частиц в ускорителях,

$$\frac{d(R_{0s}\Delta p)}{dt} = \frac{eV}{2\pi}(\cos \varphi - \cos \varphi_s). \quad (149)$$

К уравнению (149) должно быть добавлено второе дифференциальное уравнение для фазы φ . Оно получается дифференцированием по времени определения фазы φ , приведенного выше, в результате чего имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_{RF} - q\omega. \quad (150)$$

Учитывая, что по определению $\omega_{RF} = q\omega_s$, где ω_s — частота обращения синхронной частицы, а также раскладывая ω в ряд вблизи значения ω_s , получаем дифференциальное уравнение для фазы φ ,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{q\eta\omega_s}{p_s}\Delta p, \quad (151)$$

в котором параметр η описывает дисперсию частот обращения при малых отклонениях импульса частицы от синхронного значения,

$$\eta = -\left. \frac{p_s}{\omega_s} \frac{\partial \omega}{\partial p} \right|_{p=p_s} = \alpha - \gamma^{-2}, \quad (152)$$

где α — коэффициент расширения орбит, введённый ранее при рассмотрении дисперсионной функции D ; γ — релятивистский фактор. Объединяя уравнения (149) и (152), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее продольные колебания частиц в протонном синхротроне,

$$\frac{d}{dt} \frac{R_{0s}p_s}{q\eta\omega_s} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{eV}{2\pi}(\cos \varphi - \cos \varphi_s). \quad (153)$$

Из уравнений (149) и (151) непосредственно видно, что на плоскости переменных $(R_{0s}\Delta p, \varphi)$ имеются две особые точки с координатами $(0; \pm\varphi_s)$, в которых частицы неподвижны. В реальном пространстве данные частицы находятся в синхронизме с ускоряющей волной продольного электрического поля, причём одна из этих особых точек оказывается устойчивой, а другая — неустойчивой (особой точкой типа "седло"). Чтобы показать это, рассмотрим малые фазовые колебания ($\varphi = \varphi_s + \chi$, $|\chi| \ll 1$) и вынесем коэффициент перед $d\varphi/dt$ в (153), который на большей части ускорительного цикла протонного синхротрона изменяется медленно по сравнению с периодом фазовых колебаний частиц, за знак производной. В таком случае уравнение (153) принимает следующий вид:

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} + \text{sign}(\eta\varphi_s)\Omega_0^2\chi = 0, \quad (154)$$

где величина Ω_0 , равная

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{qeV\omega_s|\eta \sin \varphi_s|}{2\pi R_{0s}p_s}}, \quad (155)$$

называется частотой малых фазовых колебаний.

Устойчивость продольных колебаний частиц обеспечивается, как это видно из уравнения (154), при выполнении следующего условия: $\eta \sin \varphi_s > 0$ (так, например, ниже критической энергии $\eta < 0$ и необходимо иметь $\varphi_s < 0$; после перехода пучка через критическую энергию знак φ_s изменяется на противоположный). При этом перед вторым членом в уравнении (154) стоит знак плюс, и, следовательно, обеспечивается устойчивость малых фазовых колебаний частиц вблизи $\varphi = \varphi_s$. Вблизи второй особой точки (при $\varphi = -\varphi_s$) фазовое движение частиц описывается тем же уравнением (154) при отрицательном знаке $\eta \varphi_s$. В последнем случае решениями уравнения (154) являются гиперболические функции, так что равновесие частицы в точке $(0, -\varphi_s)$ оказывается неустойчивым.

Продольное движение частиц удобно анализировать на фазовой плоскости в координатах $(\Delta p, \varphi)$, являющихся канонически сопряжёнными при ускорении частиц на постоянном радиусе. Исследуем стационарный случай, когда коэффициент перед $d\varphi/dt$ в уравнении (153) изменяется незначительно за время $T = 2\pi/\Omega_0$. Введём гамильтониан \mathcal{H} ,

$$\mathcal{H} = \frac{q\eta\omega_s}{2p_s} \Delta p^2 - \frac{eV}{2\pi R_{0s}} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi_s), \quad (156)$$

с помощью которого уравнения движения (149) и (151) могут быть записаны в канонической форме

$$\frac{d\Delta p}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi}; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Delta p}. \quad (157)$$

Гамильтониан \mathcal{H} не зависит явно от времени и является поэтому интегралом движения, а линии $\mathcal{H} = const$ на плоскости $(\Delta p, \varphi)$ дают фазовые траектории частиц.

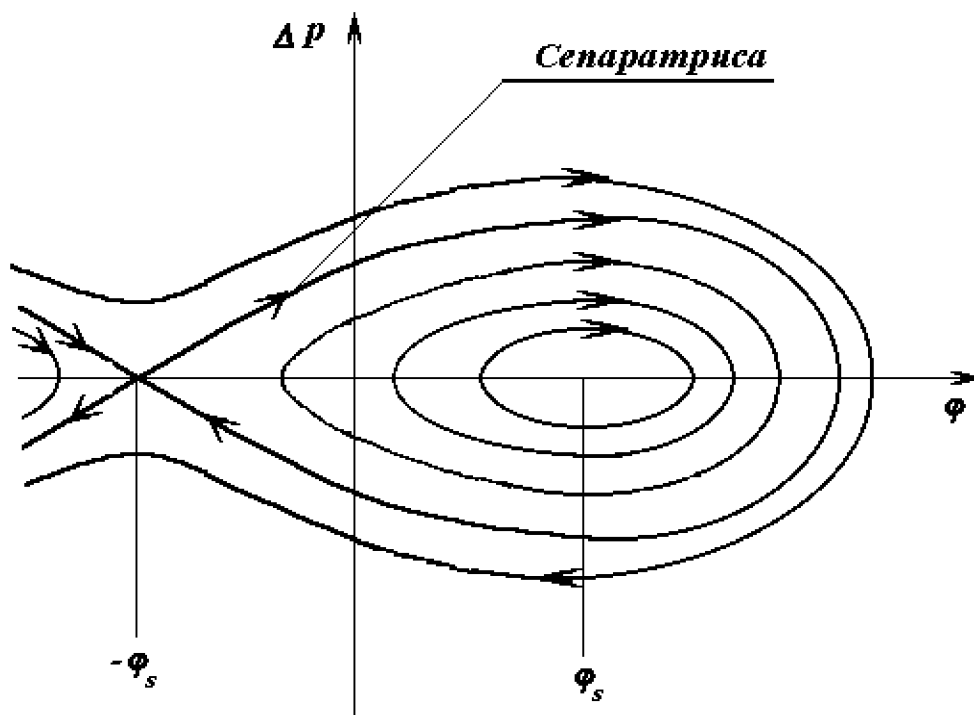


Рис. 13. Фазовые траектории частиц на плоскости $(\Delta p, \varphi)$.

На рис. 13 представлены фазовые траектории частиц для одного периода ускоряющего поля при энергии пучка выше критической ($\eta > 0$). Видно, что траектории частиц делятся на замкнутые (движение устойчиво) и незамкнутые (движение частиц неустойчиво) линией, проходящей через точку $(0, -\varphi_s)$. Данная кривая называется сепаратрисой, а часть фазовой плоскости, ограниченная ею, — областью устойчивых продольных колебаний частиц. Стрелки на рис. 13 показывают направление движения частиц относительно резонансной волны продольного электрического поля. Все частицы, попавшие внутрь сепаратрисы, ускоряются в среднем, совершая устойчивые колебания относительно равновесной частицы. Одновременно в ускорителе существуют q таких областей устойчивости, вращающихся с частотой ω_s .

Уравнение сепаратрисы $(\Delta p)_{cen}$ получается из формулы (156) при $\mathcal{H} = (eV/2\pi R_{0s})(\sin \varphi_s - \varphi_s \cos \varphi_s)$,

$$(\Delta p)_{cen} = \pm \frac{\Omega_0 p_s}{q\eta\omega_s} \sqrt{\frac{2}{\sin \varphi_s} [\sin \varphi + \sin \varphi_s - (\varphi + \varphi_s) \cos \varphi_s]}, \quad (158)$$

и, следовательно, максимальное отклонение импульса частицы, движущейся по сепаратрисе, от синхронного значения равно

$$(\Delta p)_{cen,max} = \frac{2\Omega_0 p_s}{q|\eta|\omega_s} \sqrt{1 - \varphi_s \cot \varphi_s}, \quad (159)$$

откуда видно, что при прочих одинаковых условиях наибольший разброс по импульсам имеет сепаратриса в режиме циркуляции сгруппированного пучка на плато магнитного поля (при $\cos \varphi_s = 0$), когда энергия пучка остаётся неизменной. При $\cos \varphi_s = 1$ область устойчивых фазовых колебаний стягивается в точку ($\varphi_s \cot \varphi_s \rightarrow 1$), так что процесс ускорения пучка становится невозможным.

Важной характеристикой сгустков частиц является их продольный фазовый объём S , который можно определить выражением $S = \oint (\Delta p/m_0 c) d\varphi$, где m_0 — масса покоя частицы; c — скорость света. При таком определении фазовый объём S не имеет размерности и обычно измеряется в миллирадианах. Вычислим наибольшее значение фазового объёма $S = S_{cen}$, ограничиваемого сепаратрисой, уравнение которой даётся формулой (158). В результате получим

$$S_{cen} = 16F(\cos \varphi_s) \sqrt{\frac{\gamma eV}{2\pi q\eta m_0 c^2}}, \quad (160)$$

где функция F изменяется в пределах от нуля до единицы в зависимости от значения $\cos \varphi_s$ и определена следующим соотношением:

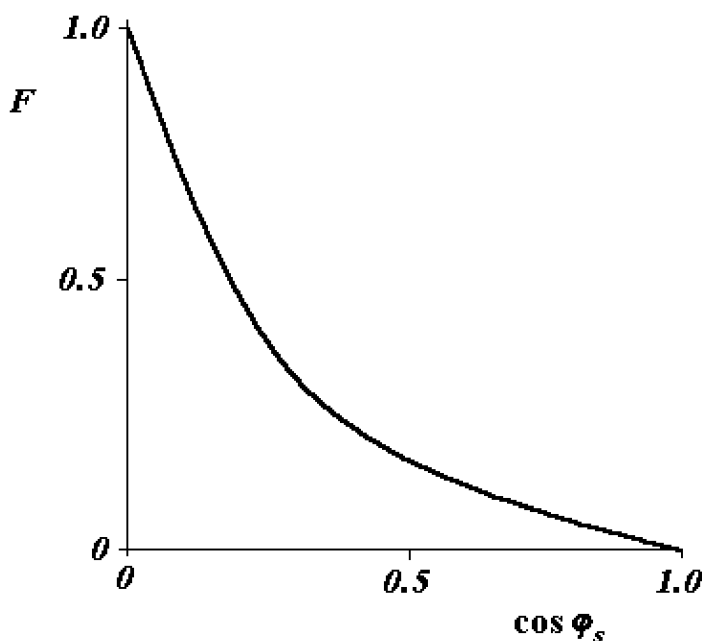


Рис. 14. Функция $F(\cos \varphi_s)$.

$$F = \frac{1}{8\sqrt{2}} \oint \sqrt{\sin \varphi + \sin \varphi_s - (\varphi + \varphi_s) \cos \varphi_s} d\varphi. \quad (161)$$

График функции F представлен на рис. 14.

Продольный фазовый объём сгустков частиц в случае малых фазовых колебаний даётся площадью эллипса с полуосями $(\Delta p)_{max}/m_0c$ и χ_{max} (χ_{max} — фазовый полуразмер сгустка). Полагая $\mathcal{H} = (eV/2\pi R_0)(\varphi_{max} \cos \varphi_s - \sin \varphi_{max})$, где $\varphi_{max} = \varphi_s + \chi_{max}$, и считая $\chi_{max} \ll 1$, получаем с помощью формулы (156) связь между максимальным разбросом частиц по импульсам в пучке $(\Delta p)_{max}$ и χ_{max} :

$$(\Delta p)_{max} = \frac{\Omega_0 p_s}{q\eta\omega_s} \chi_{max}, \quad (162)$$

с учётом которой можно записать выражение для фазовой площади S этого эллипса в виде

$$S = \frac{\pi\Omega_0 p_s}{m_0 c q |\eta| \omega_s} \chi_{max}^2. \quad (163)$$

В силу теоремы Лиувилля продольный фазовый объём, занятый частицами, ведёт себя подобно несжимаемой жидкости, т.е. сохраняется в процессе ускорения частиц. Строго говоря, речь может идти лишь о сохранении шестимерного фазового объёма, однако в большинстве случаев продольное движение может рассматриваться независимо от поперечного движения частиц. При адиабатическом изменении параметров фазового уравнения (медленном по сравнению с периодом фазовых колебаний $T = 2\pi/\Omega_0$) фазовый объём сгустков S является инвариантом и, следовательно, $\chi_{max} \sim (|\eta|/\gamma)^{1/4}$ в соответствии с формулой (163). В частности, при энергии пучка существенно больше критической $\eta \simeq \alpha$, и длина сгустков затухает как корень четвёртой степени из их энергии.

Отметим, что определение фазового объёма S , данное выше, может оказаться неудобным при продольном согласовании сгустков частиц в случае перевода пучка из одного ускорителя в другой. Дело в том, что данное определение базируется на интегрировании по фазе φ , связанной с продольной координатой s соотношением: $s = -(R_{0s}/q)\varphi$, так что один и тот же продольный фазовый объём имеет, вообще говоря, различные численные значения в разных ускорителях, так как средние радиусы и кратности ускорения в них обычно не совпадают. В таких случаях удобно использовать другое определение — $S = \oint \Delta p(s) ds$. При этом в качестве единицы измерения используется эВ·с.

1.4.2. Фазовое движение частиц вблизи критической энергии

При приближении энергии пучка к критическому значению ($\gamma \rightarrow \gamma_{tr} = \alpha^{-1/2}$, $\eta \rightarrow 0$) частота синхротронных колебаний Ω_0 стремится к нулю, и поэтому изменение параметров фазового движения в этом районе происходит неадиабатически. Продольный фазовый объём сгустков S перестаёт быть адиабатическим инвариантом на рассматриваемом участке ускорительного цикла, однако теорема Лиувилля, тем не менее, остаётся справедливой, так как фазовое уравнение, по-прежнему, может быть записано в канонической форме. Раскладывая параметр η в ряд вблизи критической энергии

$$\eta \simeq \frac{2\dot{\gamma}t}{\gamma_{tr}^3}, \quad (164)$$

где время t отсчитывается от момента прохождения пучком критической энергии, а также считая фазовые колебания частиц вблизи критической энергии малыми, запишем систему уравнений (157) в явном виде

$$\frac{d(\Delta p)}{dt} = -\frac{eV \sin \varphi_s}{2\pi R_{0s}} \chi; \quad (165)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{2q\dot{\gamma}t}{m_0\gamma_{tr}^4 R_{0s}} \Delta p. \quad (166)$$

В момент времени $t = 0$ знак коэффициента перед Δp в уравнении (166) меняется с отрицательного на положительный. Для обеспечения устойчивости фазовых колебаний одновременно с этим необходимо скачкообразно изменить фазу ускоряющего напряжения на величину $2|\varphi_s|$, так чтобы знак $\sin \varphi_s$ также изменился на обратный.

На рис. 15 в качестве иллюстрации приведены результаты численного расчёта с помощью уравнений (165) и (166) фактора группировки частиц по фазе $B = \chi_{max}/\pi$ (кривая 1) и максимума разброса частиц по импульсам в пучке $(\Delta p)_{max}/m_0c$ (кривая 2), нормированные на \sqrt{S} , для параметров ускорителя ИФВЭ: $V|\sin \varphi_s| = 320$ кВ; $\dot{\gamma} = 30$ с⁻¹; $\gamma_{tr} = 9,45$; $R_{0s} = 236$ м. В качестве начальных условий в момент времени $t = -30$ мс брался эллипс, ограничивающий фазовую площадь S , который фиксировался изображающими точками на фазовой плоскости. Результаты расчёта симметричны относительно момента времени $t = 0$, поэтому по оси абсцисс отложена абсолютная величина t . Из рис. 15, в частности, видно, что при энергии пучка, близкой к критическому значению, наряду с уменьшением длины сгустков происходит довольно резкое увеличение разброса частиц по импульсам в пучке. Из симметрии решений относительно момента времени $t = 0$, являющейся следствием симметрии самих уравнений движения, следует, что рассогласование сгустков имеет место лишь в непосредственной близости от критической энергии. В самом деле, если сгустки частиц были согласованы при $\gamma < \gamma_{tr}$ вплоть до некоторого момента времени $t = t_0$, то за критической энергией они окажутся также согласованными в силу симметрии решений при $t \geq |t_0|$.

Чтобы получить аналитические выражения для фазовых траекторий частиц вблизи критической энергии, преобразуем систему уравнений (165), (166) в дифференциальное уравнение второго порядка, предварительно заменив независимую переменную t на переменную $\tau = t/T_0$, где параметр T_0 , характеризующий длительность неадиабатического участка вблизи критической энергии, равен

$$T_0 = \sqrt[3]{\frac{\pi m_0 \gamma_{tr}^4 R_{0s}^2}{qeV |\sin \varphi_s| \dot{\gamma}}}. \quad (167)$$

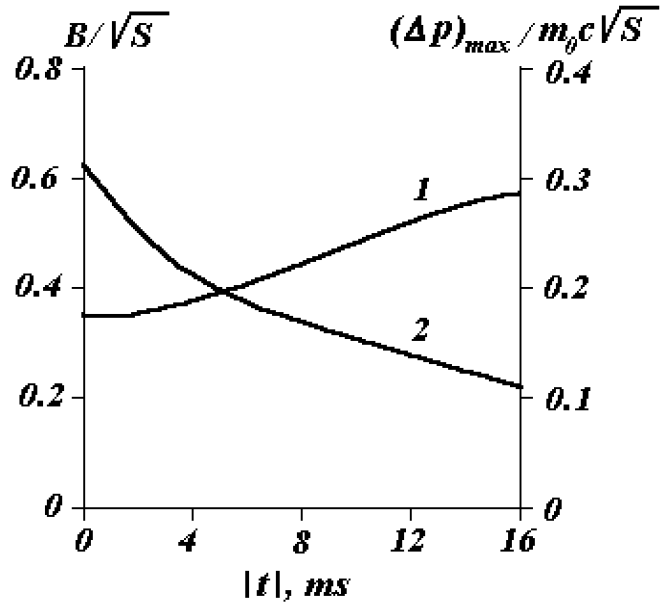


Рис. 15. Зависимость от времени размеров сгустков вблизи критической энергии.

В результате имеем следующее уравнение:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{1}{\tau} \frac{d\chi}{d\tau} = \pm\chi, \quad (168)$$

где знаки плюс и минус относятся соответственно к энергиям пучка ниже и выше критического значения. Уравнение (168) не содержит конкретных параметров ускорителя, следовательно фазовое движение частиц вблизи критической энергии происходит одинаковым образом в любом протонном синхротроне, различен только масштаб времени T_0 .

Наконец, сделав ещё одну, последнюю, замену переменных: $\chi = \tau y$, $z = (2/3)|\tau|^{3/2}$, можно перейти от уравнения (168) к уравнению Бесселя порядка $2/3$ относительно функции $y(z)$, так что общее решение для фазы χ должно иметь следующий вид:

$$\chi = \tau[C_1 J_{2/3}(z) + C_2 J_{-2/3}(z)], \quad (169)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий; $J_{\pm 2/3}$ — функции Бесселя. Из уравнения (169) с учётом (165), а также рекуррентных соотношений для функций Бесселя можно выразить Δp через функции Бесселя порядка $\pm 1/3$

$$\Delta p = \frac{eV |\sin \varphi_s| T_0 \sqrt{|\tau|}}{2\pi R_{0s}} [C_1 J_{-1/3}(z) - C_2 J_{1/3}(z)]. \quad (170)$$

Вычислим величину разброса частиц по импульсам в пучке $(\Delta p)_{max}(0)$ при $\gamma = \gamma_{tr}$. Воспользовавшись асимптотикой функций Бесселя (при $z \rightarrow 0$), имеем из (170)

$$(\Delta p)_{max}(0) = C_1 \frac{\sqrt[3]{3} eV |\sin \varphi_s| T_0}{2\pi R_{0s} \Gamma(2/3)}, \quad (171)$$

где Γ — гамма-функция. Выражая далее значение $(\Delta p)_{max}$ в адиабатическом районе ($|t| \gg T_0$) через фазовый объём сгустков S с помощью формул (162) и (163),

$$(\Delta p)_{max} = \sqrt{\frac{m_0 c p_s \Omega_0 S}{\pi q \eta \omega_s}}, \quad (172)$$

и приравнявая затем соотношения (170) и (172), получаем с учётом разложения (164) и асимптотики функций Бесселя при больших значениях аргумента

$$C_1 = \sqrt{\frac{2S \dot{\gamma} q c}{\pi \gamma_{tr}^4 R_{0s}}} T_0. \quad (173)$$

Подставляя полученное выражение для C_1 в формулу (171), имеем окончательно

$$(\Delta p)_{max}(0) \simeq \frac{\sqrt[3]{3}}{\alpha T_0 \Gamma(2/3)} \sqrt{\frac{S R_{0s}}{2\pi q c \dot{\gamma}}}. \quad (174)$$

С разбросом частиц по импульсам $(\Delta p)_{max}(0)$ связана часть радиальной апертуры вакуумной камеры, необходимой для продольного движения частиц. Поэтому его величина не должна выходить за допустимые пределы. Реальный импульсный разброс пучка при критической энергии обычно превышает величину, даваемую формулой (174). Это связано с возмущениями параметров ускорителя, а также с эффектами пространственного заряда пучка. Последние рассматриваются во второй части настоящей работы.

1.4.3. Фазовое движение частиц при наличии возмущений параметров ускорителя

При наличии возмущений ведущего магнитного поля ускорителя, а также частоты и амплитуды ускоряющего напряжения в уравнении фазовых колебаний появляется возмущающая сила. Возмущение амплитуды ускоряющего напряжения ΔV вызывает возмущение синхронной фазы φ_s , причём так как скорость изменения магнитного поля и средний радиус R_{0s} в протонном синхротроне можно считать примерно постоянными на большей части ускорительного цикла, то $V \cos \varphi_s \simeq const$ и существует следующая связь между ними: $\Delta \varphi_s = (\Delta V/V) \cot \varphi_s$.

Ошибки радиочастоты $\Delta \omega_{RF}$ и магнитного поля $\Delta \bar{H}$ приводят к изменениям частот обращения частиц $\Delta \omega$, поэтому разность частот, определяющая скорость изменения фазы φ , должна быть дополнена соответствующими возмущениями: $\omega_{RF} - q\omega \rightarrow \omega_{RF} - q\omega + \Delta \omega_{RF} - q\Delta \omega$. Так как $\omega = v/R_0$ (v — скорость частицы), можно отсюда получить $\Delta \omega \simeq \omega_s \alpha \Delta \bar{H}/\bar{H}$. При получении последнего соотношения учтено, что по воздействию на орбиту частицы ошибка в магнитном поле ускорителя, равная $\Delta \bar{H}/\bar{H}$, эквивалентна относительному изменению импульса частицы на величину $\Delta p/p_s = -\Delta \bar{H}/\bar{H}$, что следует из соотношения $p_s c = e \bar{H} R_0$. Следовательно, уравнение малых фазовых колебаний (154) имеет при наличии возмущений параметров ускорителя следующий вид:

$$\frac{d^2 \chi}{dt^2} + \Omega_0^2 \left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right) \chi = \Omega_0^2 \cot \varphi_s \frac{\Delta V}{V} + \frac{d}{dt} \left(\Delta \omega_{RF} - \alpha \omega_{RF} \frac{\Delta \bar{H}}{\bar{H}} \right) = F(t). \quad (176)$$

Отметим, что член в левой части уравнения, пропорциональный отклонению амплитуды ускоряющего напряжения от номинала $\Delta V/V$, ответственен за параметрический резонанс фазовых колебаний, имеющий место в случае, когда амплитуда ускоряющего напряжения изменяется с частотой, равной удвоенной частоте синхротронных колебаний. Члены в правой части уравнения (176) представляют основную опасность при наличии возмущений параметров ускорителя с частотой синхротронных колебаний Ω_0 .

Возмущения параметров, воздействующих на продольное движение частиц в ускорителе, могут быть как медленными, так и быстрыми по сравнению с периодом синхротронных колебаний $T = 2\pi/\Omega_0$, а также резонансными, причём в отличие от поперечных колебаний синхротронная частота Ω_0 при ускорении пучка, как правило, непрерывно изменяется, поэтому наибольший интерес представляет прохождение частиц через резонанс. Отметим также, что синхротронные колебания частиц в большинстве случаев нелинейны, следовательно использование уравнения малых фазовых колебаний при анализе влияния возмущений даёт оценку по максимуму.

Медленные по сравнению с частотой Ω_0 возмущения параметров ускорителя приводят к изменению значений синхронной фазы φ_s и равновесного импульса p_s . При этом сгустки частиц смещаются как по радиусу, так и по фазе относительно ускоряющего поля, оставаясь согласованными со своими фазовыми траекториями. Из уравнения (176) получаются следующие соотношения для изменений синхронной фазы $\Delta \varphi_s$ и равновесного импульса Δp_s :

$$\Delta \varphi_s \simeq \frac{\Delta V}{V} \cot \varphi_s + \frac{1}{\Omega_0^2} \frac{d}{dt} \left(\Delta \omega_{RF} - \frac{\alpha \omega_{RF}}{\bar{H}} \Delta \bar{H} \right); \quad (177)$$

$$\frac{\Delta p_s}{p_s} = \frac{1}{\eta} \left(\alpha \frac{\Delta \bar{H}}{\bar{H}} - \frac{\Delta \omega_{RF}}{\omega_{RF}} \right). \quad (178)$$

Ускорение частиц на постоянном радиусе обеспечивается системой автоматической подстройки частоты ускоряющего поля в зависимости от положения пучка в ускорителе, причём управление частотой ω_{RF} осуществляется с помощью двух сигналов, пропорциональных ошибкам в положении пучка по радиусу и по фазе. При необходимости изменить в процессе ускорения пучка величину равновесного радиуса R_{0s} , осуществляется медленное по сравнению с синхротронной частотой изменение опорного сигнала в радиальном датчике системы автоподстройки частоты ускоряющего поля.

В другом крайнем случае, когда изменение параметров ускорителя происходит быстро по сравнению с периодом фазовых колебаний, возбуждаются когерентные колебания сгустков частиц. Наименее инерционным параметром является радиочастота ω_{RF} , которая может изменяться скачком, возбуждая колебания центров тяжести сгустков с максимальными отклонениями по импульсу Δp_c и по фазе $\Delta \chi_c$ равными

$$\frac{\Delta p_c}{p_s} = -\frac{\Delta \omega_{RF}}{\eta \omega_{RF}}; \quad (179)$$

$$\Delta \chi_c = \frac{\eta \omega_{RF}}{p_s \Omega_0} \Delta p_c = -\frac{\Delta \omega_{RF}}{\Omega_0}. \quad (180)$$

Отсюда видно, что допуск на быстрые отклонения радиочастоты от идеального закона должен быть жёстким в особенности вблизи критической энергии, где частота синхротронных колебаний Ω_0 и параметр η стремятся к нулю.

Если возмущение F изменяется гармоническим образом с некоторой частотой $\omega = \Omega_0$, а синхротронная частота $\Omega = \Omega(t)$ является функцией времени, то в таком случае может иметь место прохождение частиц через резонанс в момент времени, когда $\Omega = \Omega_0$. Решение однородного дифференциального уравнения второго порядка, описывающего малые фазовые колебания в отсутствие возмущений при медленном (адиабатическом) изменении эффективной массы синхротронного движения $M = m_0 \gamma / \eta$, имеет следующий вид:

$$\chi = a(t) \exp(i \int \Omega(t) dt) + \text{к.с.}; \quad \dot{\chi} = ia(t) \Omega(t) \exp(i \int \Omega(t) dt) + \text{к.с.}$$

При наличии же возмущения $F = F_0 \sin(\Omega_0 t + \phi_0)$ уравнение фазовых колебаний становится неоднородным,

$$\frac{1}{M} \frac{d(M \dot{\chi})}{dt} + \Omega^2 \chi = F_0 \sin(\Omega_0 t + \phi_0), \quad (181)$$

где ϕ_0 — начальное значение фазы возмущения. Решение уравнения (181) ищется в виде, подобном приведенному выше для соответствующего однородного уравнения. В этих решениях комплексные амплитуды $a(t)$ удобно заменить произведениями $a(t)C(t)$, причём медленно изменяющиеся амплитуды $a(t)$ и $a^*(t)$ будем считать квазипостоянными. Варьируя произвольные постоянные C и C^* , получаем дифференциальное уравнение относительно C ,

$$\frac{dC}{dt} = \frac{F_0}{2ia(t)\Omega(t)} \sin(\Omega_0 t + \phi_0) \exp(-i \int \Omega dt), \quad (182)$$

где $a(t)$ — амплитуда синхротронных колебаний в отсутствие резонанса. Чтобы проинтегрировать уравнение (182), разложим частоту Ω в показателе экспоненты в ряд $\Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}_0 \tau + \dots$, где $\tau = 0$ соответствует моменту прохождения резонанса. Отбрасывая

в (182), кроме этого, нерезонансный член, колеблющийся с удвоенной частотой, получаем

$$\Delta a = a(t)(C - 1) = -a(t) \int \frac{F_0}{4a(\tau)\Omega(\tau)} \exp(-i\dot{\Omega}_0\tau^2/2 + i\phi_0) d\tau. \quad (183)$$

Пренебрегая изменением величин ϕ_0 , $a(t)$ и $\Omega(t)$ за время прохождения резонанса, найдём отсюда приращение амплитуды колебаний вдали от резонанса (при $t \rightarrow \infty$):

$$\Delta a \simeq -a(t) \frac{F_0}{4a_0\Omega_0} \sqrt{\frac{2\pi}{|\dot{\Omega}_0|}} \exp(i\phi_0 \pm i\pi/4), \quad (184)$$

где знак перед $i\pi/4$ в показателе экспоненты выбирается в зависимости от знака производной $d\Omega/dt$ в момент прохождения резонанса.

На практике зачастую происходит многократное прохождение частицами синхротронных резонансов. Такой случай, например, имеет место, если резонансы возбуждаются гармониками сетевого питающего напряжения, амплитуды которых примерно постоянны в диапазоне изменения синхротронной частоты. Предположим, что частицы распределены по фазе синхротронных колебаний ϕ_0 примерно равномерно. В таком случае нетрудно рассчитать средний и среднеквадратический приросты амплитуды синхротронных колебаний A за одно прохождение резонанса.

Исходя из выражения $A = 2|a|$ и считая относительные приращения комплексных амплитуд малыми по сравнению с единицей, а также учитывая следующие очевидные соотношения: $\overline{\Delta a} = \overline{\Delta a^*} = 0$ и $\overline{(\Delta a)^2} = \overline{(\Delta a^*)^2} = 0$, где черта означает усреднение по фазе ϕ_0 , получим (с точностью до квадратичных членов) известные из теории вероятностей формулы

$$\overline{\Delta A} = \frac{A}{4} \frac{\overline{|\Delta a|^2}}{|a|^2}; \quad \overline{(\Delta A)^2} = 2A\overline{\Delta A}. \quad (185)$$

С учётом соотношения (184) имеем отсюда

$$\overline{\Delta A} = A(t) \frac{\pi F_0^2}{8\Omega_0^2 A_0^2 |\dot{\Omega}_0|}. \quad (186)$$

Так как при многократном прохождении частиц через синхротронные резонансы приращения амплитуды $\overline{\Delta A}$ статистически независимы (фаза ϕ_0 является случайной величиной при каждом последующем прохождении резонанса), то средняя амплитуда синхротронных колебаний должна монотонно возрастать с увеличением числа прохождений резонансов.

2. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ С УЧЁТОМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА И ТОКА ПУЧКА

2.1. КУЛОНОВСКИЕ СДВИГИ БЕТАТРОННЫХ ЧАСТОТ

До сих пор неявно предполагалось, что интенсивность ускоряемого пучка пренебрежимо мала, и, следовательно, его собственное электромагнитное поле не оказывает существенного влияния на движение частиц в ускорителе. Однако интенсивность современных кольцевых ускорителей протонов как раз и ограничивается в основном эффектами пространственного заряда пучка, поэтому вторая часть настоящего курса посвящена динамике интенсивного пучка протонов.

Эффекты пространственного заряда пучка делятся на поперечные и продольные, которые, в свою очередь, подразделяются на некогерентные и когерентные. Некогерентные эффекты приводят к изменению характеристик движения отдельных частиц, таких, как частота и амплитуда колебаний. При этом распределение частиц в процессе ускорения пучка остаётся самосогласованным и когерентные колебания пучка не возникают. Напротив, когерентные эффекты являются характеристиками пучка как целого. Так, например, при поперечном движении частиц возникает когерентный сдвиг бетатронной частоты, обусловленный смещением замкнутой орбиты пучка относительно центра вакуумной камеры ускорителя. В реальных пучках кулоновские сдвиги бетатронных частот отдельных частиц зависят как от бетатронной амплитуды, так и от продольного положения частицы в сгустке. Вследствие этого силы пространственного заряда приводят к разбросу бетатронных частот, поэтому пучок может занимать заметную область в рабочей клетке ускорителя, усугубляя таким образом действие бетатронных резонансов.

2.1.1. Некогерентные сдвиги бетатронных частот

Рассмотрим сначала пучок частиц в свободном пространстве. Так как силы, действующие в поперечном направлении и обусловленные его собственными электрическим и магнитным полями, имеют противоположные знаки, они частично компенсируют друг друга, причём при скорости пучка, равной скорости света, результирующая поперечная сила, связанная с собственным электромагнитным полем пучка, становится равной нулю.

Начнём с простейшего случая — рассмотрим круглый пучок радиуса a , равномерно распределённый вдоль азимута ускорителя (см. рис. 16). Считая плотность заряда в поперечном сечении пучка постоянной и применяя к элементу пучка длиной ds , содержащему заряд dq , теорему Остроградского-Гаусса, найдём радиальную компоненту E_r собственного электрического поля пучка

$$E_r = \frac{2\rho_0}{a^2}r, \quad (1)$$

где $\rho_0 = dq/ds$ — линейная плотность заряда.

Далее из теоремы Стокса следует, что компонента магнитного поля H_φ связана с E_r соотношением: $H_\varphi = \beta E_r$, где $\beta = v/c$. В прямоугольной системе координат (см. рис. 1) $E_x = E_r \cos \varphi$, $H_z = \beta E_x$, так что $E_x - \beta H_z = E_x/\gamma^2 = E_r/\gamma^2$, так как $\varphi = 0$ (аналогично, сила, обусловленная пространственным зарядом пучка и действующая на частицы в

вертикальном направлении, также $\sim E_r/\gamma^2$). Поэтому уравнение поперечных колебаний (в гладком приближении, $u = x, z$) может быть записано в виде

$$u'' + \left(\frac{Q_0}{R_0}\right)^2 u = \frac{2e\rho_0}{m_0c^2\beta^2\gamma^3a^2}u, \quad (2)$$

откуда следует, что результирующая частота Q бетатронных колебаний равна $Q \simeq Q_0 + \Delta Q_{inc}$, где через ΔQ_{inc} обозначен некогерентный кулоновский сдвиг бетатронной частоты, равный (с учётом соотношения $\rho_0 = Ne/2\pi R_0$ для однородного пучка, где N — число частиц в ускорителе)

$$\Delta Q_{inc} = -\frac{r_0NR_0}{2\pi Q_0\beta^2\gamma^3a^2}. \quad (3)$$

В (3) $r_0 = e^2/m_0c^2 = 1,54 \cdot 10^{-16}$ см — классический радиус протона.

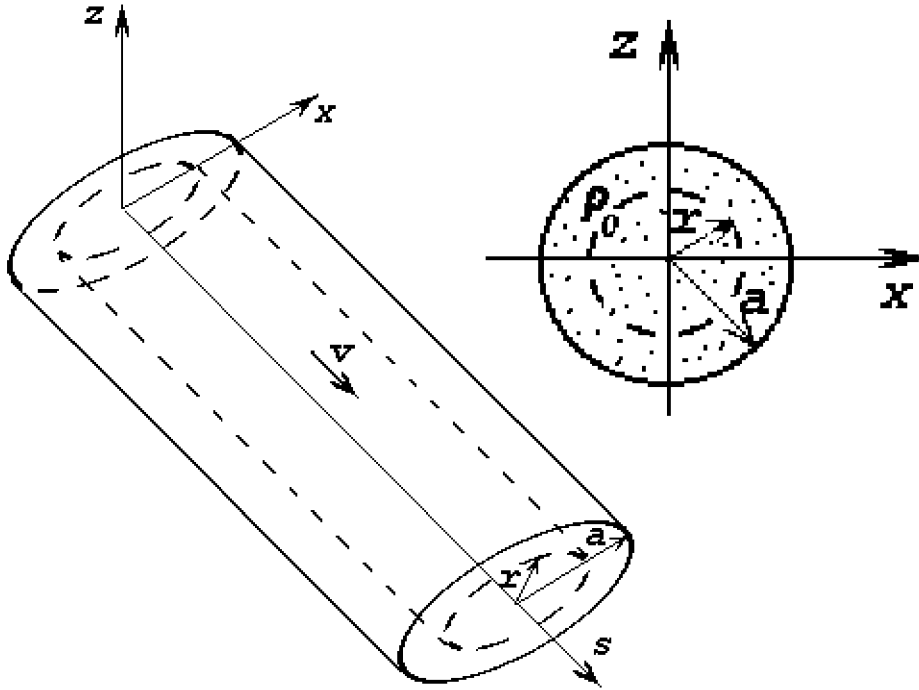


Рис. 16. К вычислению электромагнитного поля пучка.

При наличии внешнего ускоряющего поля пучок состоит из сгустков, в которых частицы колеблются относительно своих равновесных фаз. Линейная плотность заряда зависит в таком случае от продольной координаты частицы, поэтому величина некогерентного кулоновского сдвига бетатронной частоты у каждой конкретной частицы колеблется с течением времени, причём амплитуда этих колебаний довольно быстро затухает с ростом энергии пучка.

Предположим, что в ускорителе имеется q одинаковых сгустков частиц (здесь q — кратность ускорения), каждый длиной $2s_{max}$. Величина $B = 2s_{max}/L$ называется фактором продольной группировки частиц ($L = 2\pi R_0/q$). В сгруппированном пучке протонов ток пучка является функцией продольной координаты s . Зависимость некогерентного кулоновского сдвига от продольной координаты частицы можно в таком случае учесть,

если ввести в правую часть формулы (3) множитель $G = \rho/\rho_0$, представляющий собой отношение линейной плотности заряда в месте расположения рассматриваемой частицы в сгустке к её среднему значению ρ_0 . Основанием для такого подхода служит тот факт, что собственное поле реального пучка в протонном синхротроне экранируется хорошо проводящей узкой вакуумной камерой на расстояниях $\sim b/\gamma$ (b — характерный поперечный размер камеры), а характерная длина Δs , на которой заметно меняется линейная плотность заряда ρ , обычно значительно превышает это расстояние.

В качестве примера рассмотрим сгусток частиц с линейной плотностью заряда ρ , изменяющейся в зависимости от продольной координаты s ($|s| \leq s_{max}$) по параболическому закону:

$$\rho = \frac{3Ne}{4qs_{max}} \left[1 - \left(\frac{s}{s_{max}} \right)^2 \right]. \quad (4)$$

Учитывая, что зависимость продольной координаты частицы s от времени в приближении малых фазовых колебаний даётся формулой $s = s_0 \cos \Omega_0 t$, где s_0 и Ω_0 — соответственно амплитуда и частота фазовых колебаний, а также формулу (4), запишем множитель G в виде

$$G = \frac{3}{2B} \left[1 - \left(\frac{s_0}{s_{max}} \right)^2 \cos^2 \Omega_0 t \right], \quad (5)$$

откуда видно, что для частицы с максимальной амплитудой фазовых колебаний ($s_0 = s_{max}$) множитель G колеблется в пределах $0 \leq G \leq 3/2B$; для частицы с половинной амплитудой ($s_0 = s_{max}/2$) — $9/8B \leq G \leq 3/2B$. Следовательно, с учётом формулы (3) и максимального значения множителя G , равного $3/2B$, получается следующее выражение для максимального значения некогерентного кулоновского сдвига бетатронной частоты в сгруппированном пучке протонов:

$$|\Delta Q_{inc}|_{max} = \frac{3r_0 N R_0}{4\pi B Q_0 \beta^2 \gamma^3 a^2}. \quad (6)$$

Если рассмотреть другие реалистические распределения частиц в сгустках, то соответствующие формулы для $|\Delta Q_{inc}|_{max}$ будут отличаться от (6) лишь постоянным множителем, равным по порядку величины единице. Так, например, для распределения $\rho(s) \sim \cos(\pi s/2s_{max})$, возможно несколько лучше приближающего зависимость линейной плотности заряда от продольной координаты в реальных сгустках частиц, этот множитель равен $3/2$.

Допустимые величины некогерентных кулоновских сдвигов бетатронных частот обычно определяются расстоянием до ближайшего параметрического бетатронного резонанса. Полагая в формуле (6) $|\Delta Q_{inc}|_{max} \simeq 0,25$, найдём предельное число частиц в ускорителе N_{max} по кулоновскому расталкиванию в поперечном направлении:

$$N_{max} \simeq \frac{B Q_0 \beta^2 \gamma^3 a^2}{r_0 R_0}. \quad (7)$$

На практике могут представлять опасность и резонансы третьего порядка, если они многократно пересекаются из-за некогерентных кулоновских сдвигов бетатронных частот, что может иметь место в режиме накопления сгустков частиц в ускорителе, а также на начальном этапе ускорительного цикла. Поэтому при необходимости подобные резонансы должны корректироваться.

Посмотрим теперь, как влияет на величины некогерентных кулоновских сдвигов бетатронных частот характер распределения частиц в поперечном сечении пучка. Выше был

рассмотрен один из возможных вариантов — постоянное распределение, для которого плотность частиц не зависит ни от радиуса, ни от угловой координаты. Возьмём, для сравнения, распределение $f = (2\rho/\pi a^2)(1 - r^2/a^2)$, спадающее от центра к краю пучка по параболическому закону. Вырежем из пучка соосный цилиндр радиуса r и длиной ds и применим к нему теорему Остроградского-Гаусса. В результате получим следующую формулу для радиального электрического поля E_r внутри сгустка частиц:

$$E_r = \frac{4\rho}{a^2} \left(r - \frac{r^3}{2a^2} \right). \quad (8)$$

Сравнивая последнее выражение с формулой (1), дающей поле $E_r(r)$ для случая $f = const$, нетрудно видеть, что при параболическом распределении частицы с малыми амплитудами колебаний ($r \ll a$) испытывают воздействие в два раза большего поля (при одинаковых параметрах пучка), а на краю пучка (при $r = a$) поля совпадают. Следовательно, при расчёте максимальных величин кулоновских сдвигов бетатронных частот необходимо несколько изменить определение множителя G , введённого ранее, положив $G = \kappa\rho/\rho_0$, где коэффициент κ зависит от вида распределения f (так, например, $\kappa = 2$ в случае параболического распределения f).

Обобщим формулу (3) на случай пучка эллиптического сечения с размерами полуосей a_x и a_z . Считая плотность частиц в поперечном сечении пучка постоянной, можно получить для поля E_x формулу, подобную формуле (1),

$$E_x = \frac{4\rho x}{a_x(a_x + a_z)}. \quad (9)$$

Формулу для некогерентных кулоновских сдвигов бетатронных частот получим, исходя из уравнений движения. При наличии жёсткой фокусировки частиц в поперечном направлении уравнение движения вдоль оси x имеет вид

$$x'' + g_x x = \frac{4e\rho x}{a_x(a_x + a_z)m_0c^2\beta^2\gamma^3}. \quad (10)$$

Аналогичное выражение (с заменой x на z) получается для вертикального направления. Воспользовавшись далее формулой (1.80) (здесь и ниже цифра 1 перед формулой означает, что ссылка делается на формулу первой части настоящего курса лекций) и вводя также множитель $G = \kappa\rho/\rho_0$ для учёта влияния вида функции распределения f в поперечном сечении пучка и продольной группировки частиц в пучке, имеем для некогерентных кулоновских сдвигов бетатронных частот следующее соотношение:

$$(\Delta Q_{x,z})_{inc} = -\frac{r_0NG}{\pi\beta^2\gamma^3} < \frac{\beta_{x,z}}{a_{x,z}(a_x + a_z)} >. \quad (11)$$

В формуле (11) удобно заменить полуоси эллипса $a_{x,z}$, зависящие через функции Флоке от азимута ускорителя, эмиттансами пучка $\varepsilon_{x,z} = a_{x,z}^2/\beta_{x,z}$. В таком случае усреднению по периоду структуры подлежат выражения вида $(\beta_{z,x}/\beta_{x,z})^{1/2}$, дающие единицу после их усреднения, поэтому имеем:

$$(\Delta Q_{x,z})_{inc} = -\frac{r_0NG}{\pi\beta^2\gamma^3} \frac{1}{\varepsilon_{x,z} + \sqrt{\varepsilon_x\varepsilon_z}}. \quad (12)$$

Мы получили, таким образом, формулы для некогерентных кулоновских сдвигов бетатронных частот в идеализированном случае, когда пучок частиц движется в свободном

пространстве. В реальном ускорителе собственные поля, создаваемые частицами пучка, искажаются из-за взаимодействия пучка с окружающим его оборудованием ускорителя. Необходимо поэтому выяснить, как изменятся полученные формулы при учёте граничных условий. При наличии гладкой и идеально проводящей вакуумной камеры граничные условия для полей пучка могут быть удовлетворены, если ввести токи и заряды изображений. Так как электрические и магнитные поля имеют различные граничные условия, то их взаимоослабление нарушается. Силы, возникающие из-за зарядов и токов изображений, уже не спадают с ростом энергии обратно пропорционально γ^2 и могут давать основной вклад в кулоновские сдвиги бетатронных частот при высокой энергии пучка.

С учётом вакуумной камеры, экранирующей пучок в ускорителе, которую при расчёте частотных сдвигов можно считать идеально проводящей, требуется выполнение на стенке камеры граничного условия — равенства нулю продольной составляющей электрического поля пучка. При этом собственное поле пучка, вообще говоря, изменяется по сравнению со случаем свободного пространства. Граничные условия в случае широкой вакуумной камеры (при этом обычно рассматривается предельный вариант, когда пучок располагается между параллельными металлическими плоскостями), а также при наличии цилиндрической границы нетрудно удовлетворить, заменяя границу зарядами изображений. При более сложной форме границы для этой цели могут быть использованы конформные преобразования.

Подобное условие необходимо также удовлетворить для касательной компоненты магнитного поля пучка на ферромагнитной границе — на поверхностях полюсов электромагнита ускорителя, для чего вводятся токи изображений.

В качестве простейшего примера рассмотрим пучок протонов, движущийся между двумя идеально проводящими металлическими поверхностями, расположенными на расстояниях $\pm h$ от центра пучка (см. рис. 17а). Для того чтобы удовлетворить граничным условиям, расположим заряженные нити с плотностями зарядов $-\rho$ на расстояниях $\pm 2h$ от центра пучка. Однако поле, создаваемое верхним изображением требует, в свою очередь, заряда изображения противоположного знака за нижней пластиной на расстоянии $4h$ от пучка и т.д. В результате получаются бесконечные цепочки зарядов изображений сверху и снизу от рассматриваемых пластин, располагающиеся на расстояниях от пучка, равных $\pm 2nh$ ($n = 1, 3, 5, \dots$ для отрицательных и $n = 2, 4, 6, \dots$ для положительных изображений). Электрическое поле, создаваемое парой изображений с номерами $\pm n$ в месте расположения частицы пучка с координатой z , равно

$$E_{nz}^i = (-1)^n 2\rho \left(\frac{1}{2nh + z} - \frac{1}{2nh - z} \right) \simeq -(-1)^n \frac{\rho z}{(hn)^2}, \quad (13)$$

так что формула для результирующего поля изображений E_z^i имеет вид

$$E_z^i = \sum_n E_{nz}^i = \frac{\pi^2 \rho z}{12h^2}. \quad (14)$$

Горизонтальную составляющую поля изображений \mathbf{E}^i можно найти, воспользовавшись уравнением Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{E}^i = 0$, откуда с учётом того, что рассматриваемое поле является плоским, имеем

$$\frac{\partial E_x^i}{\partial x} = -\frac{\partial E_z^i}{\partial z} = -\frac{\pi^2 \rho}{12h^2}, \quad (15)$$

или,

$$E_x^i = -\frac{\pi^2 \rho x}{12h^2}. \quad (16)$$

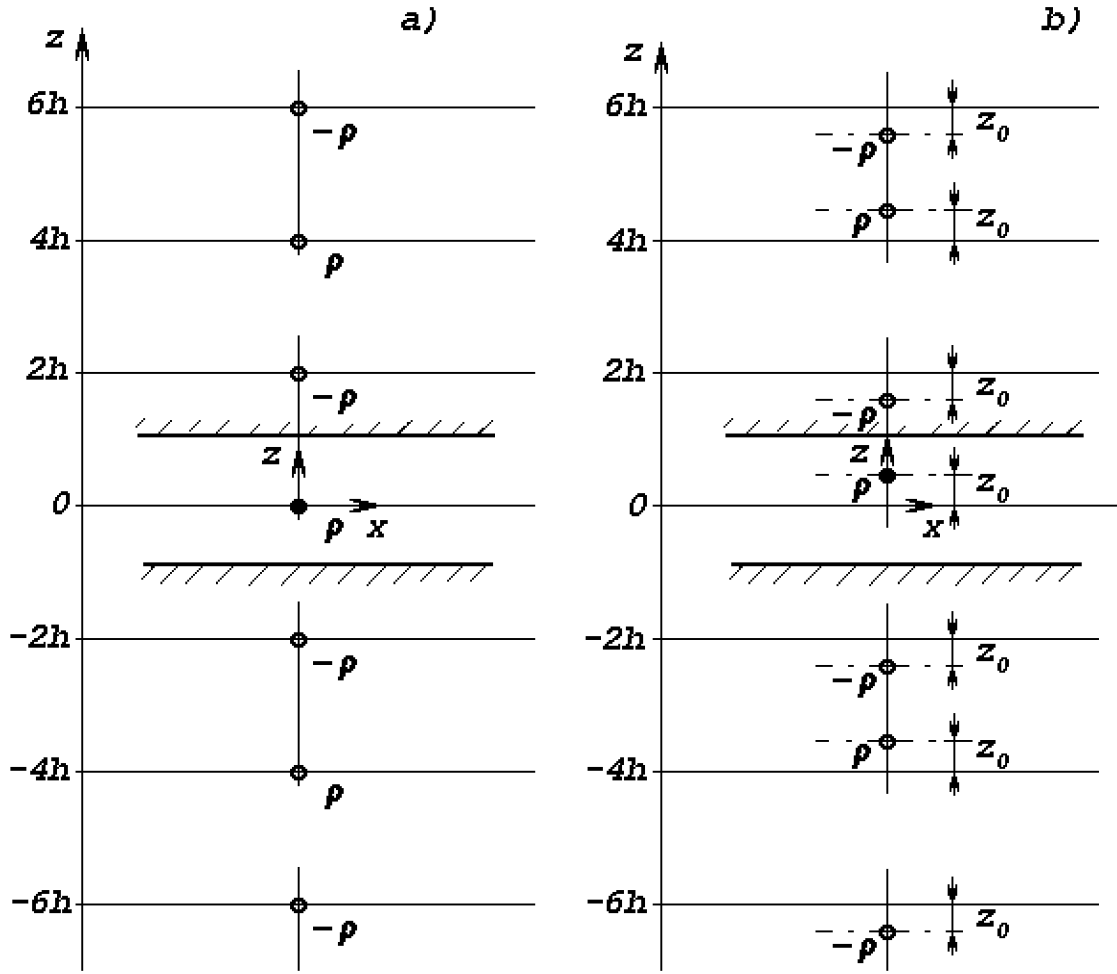


Рис. 17. К вычислению сдвигов бетатронных частот при наличии проводящих металлических плоскостей.

Здесь необходимо отметить, что граничные условия, накладываемые проводящими металлическими пластинами, не влияют на постоянную составляющую магнитного поля пучка, в результате чего нарушается взаимная компенсация полей изображений при высокой энергии частиц. Поэтому формула (3) для некогерентного кулоновского сдвига бетатронных частот в случае однородного пучка протонов, экранированного металлическими пластинами, может быть записана в виде

$$\Delta Q_{x,z}^{inc} = -\frac{r_0 N R_0}{4\pi Q_0 \beta^2 \gamma} \left(\frac{2}{a^2 \gamma^2} \mp \frac{\pi^2}{12h^2} \right). \quad (17)$$

Первый член в скобках в (17) описывает непосредственное действие на бетатронные частоты пространственного заряда пучка и спадает $\sim \gamma^2$ за счёт противоположной направленности сил, создаваемых электрическим и магнитным полями пучка; второй член описывает суммарное воздействие зарядов изображений и в приближении $h \gg a$ не зависит от поперечного размера пучка и может давать основной вклад при очень высокой энергии пучка, когда сдвиги бетатронных частот изменяются пропорционально γ^{-1} .

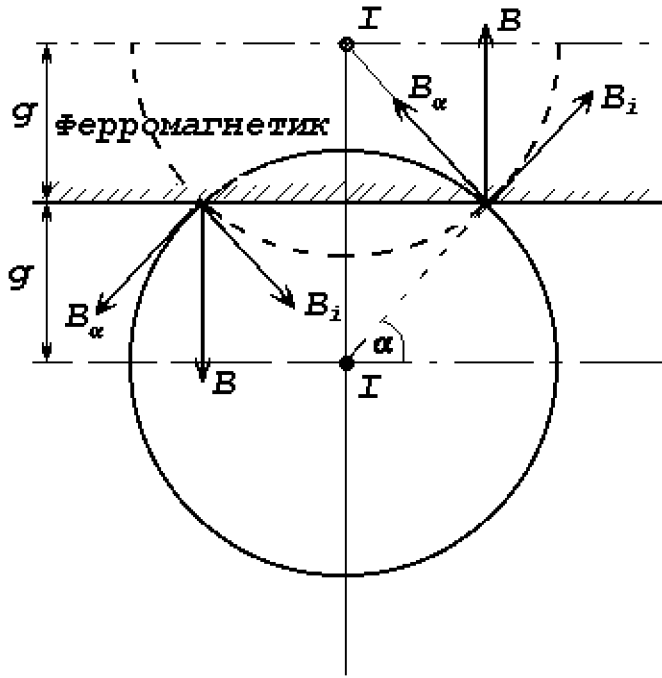


Рис. 18. Замена граничного условия для магнитного поля пучка током изображения.

условий необходимо использовать бесконечную цепочку токов изображений, текущих в одном и том же направлении и расположенных в точках с координатами $\pm 2gn$. Снова используя линейное приближение по x и z , получаем для суммарной величины магнитного поля токов изображений B_z^i следующую формулу:

$$B_z^i = \frac{2I}{c} \sum_n \left(\frac{1}{2ng - z} - \frac{1}{2ng + z} \right) \simeq \frac{\pi^2 I z}{6cg^2}, \quad (18)$$

где учтено, что $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$. Из $\text{div} \mathbf{B}^i = 0$ следует

$$B_x^i = -\frac{\pi^2 I x}{6cg^2}, \quad (19)$$

так что сдвиги бетатронных частот могут быть записаны в виде

$$\Delta Q_{x,z}^{inc} = -\frac{r_0 N R_0}{4\pi Q_0 \beta^2 \gamma} \left(\frac{2}{a^2 \gamma^2} \mp \frac{\pi^2}{12h^2} \mp \frac{\pi^2 \beta^2}{6g^2} \right). \quad (20)$$

Так как ферромагнетик одновременно является проводником, он может, в принципе, через условия на границе влиять на электрическое поле пучка. Однако на практике между магнитным полюсом и пучком обычно располагается хорошо проводящая вакуумная камера ускорителя. По этой причине полюса магнитов, как правило, не оказывают влияния на электрическое поле пучка.

Аналогичным образом рассчитываются дополнительные сдвиги бетатронных частот при наличии вблизи пучка ферромагнитного экрана. Так, полюс дипольного магнита можно аппроксимировать ферромагнитной поверхностью, расположенной на расстоянии g от центра пучка. На этой поверхности должна отсутствовать касательная составляющая магнитного поля, что можно удовлетворить, если расположить на расстоянии g за экраном ток изображения (см. рис. 18). Ток пучка и текущий в том же направлении ток изображения создают магнитные поля с равными по величине и противоположно направленными касательными компонентами на этой поверхности.

Так как реальные полюса дипольных магнитов располагаются как сверху, так и снизу от пучка, то, как и в случае с металлическими пластинами, для удовлетворения граничных

2.1.2. Когерентные сдвиги бетатронных частот

С учётом вакуумной камеры и полюсов электромагнита ускорителя поле пучка изменяется при его смещении относительно центра камеры, что практически всегда имеет место, так как реальная орбита никогда не совпадает с идеальной из-за рассмотренных выше возмущений ведущего магнитного поля. Аналогичная ситуация возникает и при наличии поперечных когерентных колебаний пучка. Связанные с отклонением пучка относительно центра вакуумной камеры частотные сдвиги называют когерентными кулоновскими сдвигами бетатронных частот.

Рассчитаем сдвиги бетатронных частот, возникающие при поперечном движении пучка как целого. Очевидно, что в свободном пространстве при наличии колебаний центра тяжести пучка дополнительные сдвиги бетатронных частот не появляются, так как когерентные колебания не оказывают в таком случае влияния на собственное электромагнитное поле пучка (эффекты, связанные с запаздывающими потенциалами, здесь можно не учитывать). Иначе обстоит дело, если пучок экранируется металлическими и ферромагнитными поверхностями, как это обычно имеет место на практике.

Рассмотрим пучок, совершающий когерентные поперечные колебания между параллельными проводящими плоскостями и имеющий в некоторый момент времени отклонение z_0 относительно равновесного положения $z = 0$. Заряды изображений, требующиеся для удовлетворения граничных условий, при этом также смещаются по сравнению со случаем, представленным на рис. 17а. Так, например, ближайший к пучку верхний заряд изображения имеет отрицательный знак и располагается на расстоянии $2h - 2z_0$, а ближайший отрицательный нижний заряд — на расстоянии $2h + 2z_0$ от пучка (см. рис. 17б). Вторая (положительная) пара зарядов-изображений располагается на расстоянии $\pm 4h$ от пучка и т.д. Поэтому электрическое поле, создаваемое парой зарядов-изображений с номером n , в месте расположения пучка равно

$$E_{n,z}^c = (-1)^n 2\rho \left[\frac{1}{2hn + z_0(1 - (-1)^n)} - \frac{1}{2hn - z_0(1 - (-1)^n)} \right]. \quad (21)$$

Ограничиваясь членами, линейными по z_0 , и суммируя по всем n , получаем результирующее электрическое поле зарядов-изображений:

$$E_z^c = \frac{\rho z_0}{h^2} \sum_n \frac{1 + (-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2 \rho z_0}{4h^2}, \quad (22)$$

приводящее к когерентному сдвигу бетатронной частоты, равному

$$\Delta Q_z^c = \frac{\pi r_0 N R_0}{16 Q_0 \beta \gamma h^2}. \quad (23)$$

В рассматриваемом здесь случае пластин, ориентированных перпендикулярно оси z , горизонтальное движение пучка не приводит к когерентному сдвигу частоты бетатронных колебаний, так что $\Delta Q_x^c = 0$.

Рассмотрим ещё одну простейшую конфигурацию проводящего экрана — цилиндрическую поверхность радиуса b . Предположим, что в равновесном положении пучок движется по оси цилиндра. При этом на внутренней стенке цилиндра индуцируется заряд с равномерной поверхностной плотностью и интегральным зарядом на единицу длины, равным $-\rho$. Результирующее действие симметрично распределённого поверхностного заряда на

ось пучка равно нулю, поэтому присутствие цилиндрического проводящего экрана не сказывается на величинах некогерентных кулоновских сдвигов бетатронных частот.

Предположим теперь, что пучок располагается на расстоянии x_0 от оси цилиндрической поверхности. В таком случае поверхностная плотность заряда не является больше равномерной, и создаваемое ей поле будет воздействовать на пучок, изменяя частоты его поперечных колебаний. Для удовлетворения граничного условия $E_\varphi(b) = 0$ введём линейный заряд-изображение, расположенный на расстоянии d от оси цилиндра и параллельный ей, с погонной плотностью, равной $-\rho$. Касательная компонента электрического поля, создаваемая пучком на стенке цилиндра, равна (см. рис. 19а)

$$E_{\varphi 1} = \frac{2\rho \sin \alpha_1}{r_1}, \quad (24)$$

где $r_1^2 = b^2 + x_0^2 - 2bx_0 \cos \varphi$, $\sin \alpha_1 / \sin \varphi = x_0 / r_1$, так что формулу для $E_{\varphi 1}$ можно переписать в виде

$$E_{\varphi 1} = \frac{2\rho x_0 \sin \varphi}{b^2 + x_0^2 - 2bx_0 \cos \varphi}. \quad (25)$$

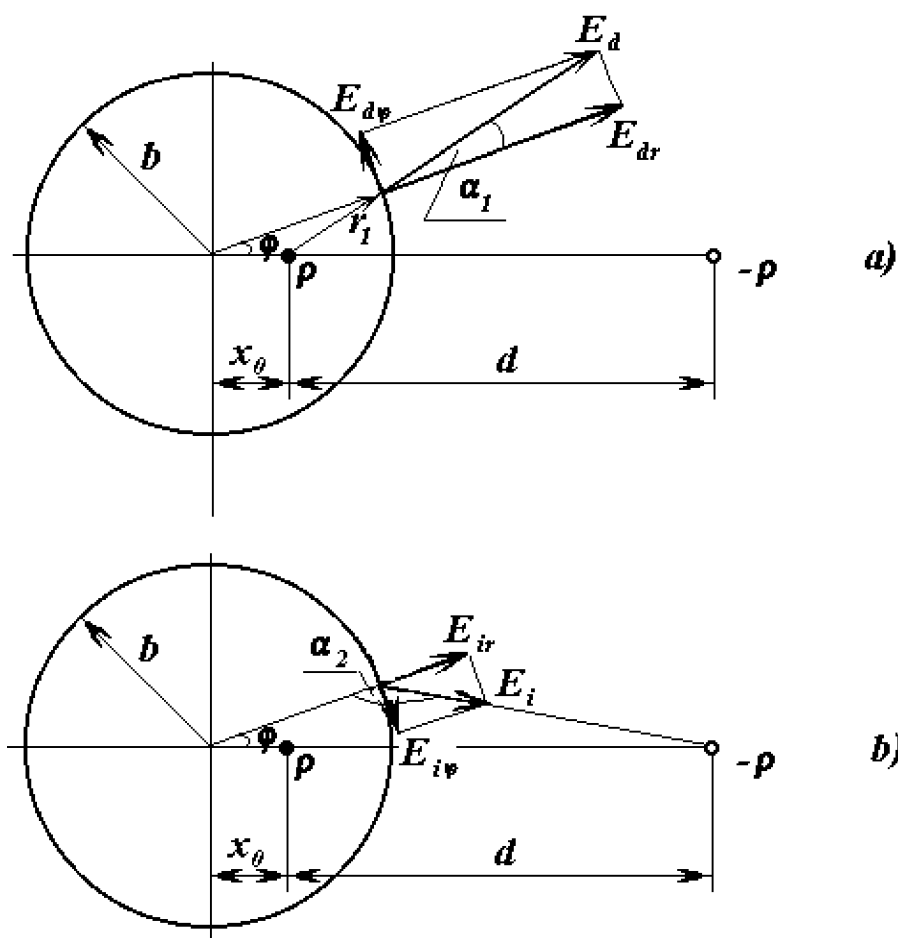


Рис. 19. К вычислению когерентных кулоновских сдвигов в пучке, экранированном цилиндрической вакуумной камерой.

Подобным образом получается формула для касательной компоненты электрического поля $E_{\varphi 2}$, создаваемого зарядом-изображением (см. рис. 19б),

$$E_{\varphi 2} = -\frac{2\rho \sin \alpha_2}{r_2} = -\frac{2\rho d \sin \varphi}{b^2 + d^2 - 2bd \cos \varphi}. \quad (26)$$

Полагая $E_{\varphi}(b) = E_{\varphi 1} + E_{\varphi 2} = 0$, приходим к квадратному уравнению относительно d ,

$$x_0 d^2 - (x_0^2 + b^2)d + x_0 b^2 = 0, \quad (27)$$

откуда следует, что расстояние d должно удовлетворять условию $d = b^2/x_0$, так что электрическое поле $E_{i,x}$, создаваемое зарядом-изображением в месте расположения пучка, равно

$$E_{i,x} = \frac{2\rho x_0}{b^2}. \quad (28)$$

В силу цилиндрической симметрии аналогичная формула справедлива и для вертикальной компоненты электрического поля заряда-изображения (с заменой x_0 на z_0), поэтому когерентные сдвиги бетатронных частот могут быть записаны в виде

$$\Delta Q_{x,z}^c = \frac{r_0 N R_0}{2\pi Q_0 \beta^2 \gamma b^2}. \quad (29)$$

Посмотрим теперь, как влияют на кулоновские сдвиги бетатронных частот вакуумная камера и полюса электромагнита ускорителя в случае сгруппированного пучка протонов. Ограничимся для определённости вертикальным направлением и вычислим силу F_z , действующую на частицу, которая в общем случае является функцией двух переменных — координаты z частицы и координаты z_0 центра тяжести пучка.

В отличие от рассмотренного выше случая однородного пучка протонов электромагнитное поле кроме постоянной содержит также переменную компоненту. Для электрического поля граничное условие остаётся прежним — должна равняться нулю его составляющая, касательная к экранирующей проводящей поверхности. В линейном по координатам z и z_0 приближении поле E_z можно записать в следующем виде:

$$E_z = \frac{\rho}{h^2}(\alpha_1^z z_0 + \alpha_2^z z), \quad (30)$$

где постоянные коэффициенты $\alpha_{1,2}^z$ определяются геометрией вакуумной камеры.

Магнитное поле, создаваемое пучком и действующее на частицы в вертикальном направлении, представим как сумму двух компонент — постоянной \bar{H}_x и переменной \tilde{H}_x . Вакуумная камера ускорителя не оказывает влияния на постоянную компоненту магнитного поля, общий вид которого даётся формулой, подобной формуле (30) для поля E_z :

$$\bar{H}_x = -\frac{\rho\beta}{g^2}(\mu_1^z z_0 + \mu_2^z z), \quad (31)$$

где $\mu_{1,2}^z$ — постоянные коэффициенты, зависящие от конфигурации ферромагнитной поверхности, расположенной вблизи вакуумной камеры ускорителя.

Что касается переменной компоненты магнитного поля, то она, подобно электрическому полю E_z , полностью экранируется идеально проводящей вакуумной камерой ускорителя, и, следовательно, как и в случае пучка в свободном пространстве, рассматриваемые компоненты электромагнитного поля взаимно ослабляют друг друга, будучи связанными соотношением $H_x = \beta E_z$, или в явном виде

$$\tilde{H}_x = \frac{\beta \tilde{\rho}}{h^2} (\alpha_1^z z_0 + \alpha_2^z z), \quad (32)$$

где $\tilde{\rho} = \rho - \rho_0$ — переменная часть линейной плотности заряда пучка. С учётом формул (30)÷(32) можно представить силу $F_z = e(E_z - \beta H_x)$ в виде

$$F_z = \frac{N e^2 \beta^2}{2\pi R_0} \left[\left(1 + \frac{G}{\beta^2 \gamma^2} \right) \frac{\alpha_1^z z_0 + \alpha_2^z z}{h^2} + \frac{\mu_1^z z_0 + \mu_2^z z}{g^2} \right]. \quad (33)$$

Полагая $z_0 = 0$ и подставляя F_z в уравнение движения

$$z'' + \left(\frac{Q_0}{R_0} \right)^2 z = \frac{F_z}{m\gamma\beta^2 c^2}, \quad (34)$$

получаем добавку к некогерентному кулоновскому сдвигу, обусловленному окружающим пучком оборудованием. Если представить полный некогерентный кулоновский сдвиг в виде суммы: $\Delta Q_z^{inc} = \Delta Q_{z,1}^{inc} + \Delta Q_{z,2}^{inc}$, где $\Delta Q_{z,1}^{inc}$ — часть некогерентного сдвига бетатронной частоты, связанная с поперечным кулоновским расталкиванием частиц и даваемая формулой (11), а $\Delta Q_{z,2}^{inc}$ — часть сдвига ΔQ_z^{inc} , связанная с наличием граничных условий, то для $\Delta Q_{z,2}^{inc}$ получается следующая формула:

$$\Delta Q_{z,2}^{inc} = -\frac{r_0 N R_0}{4\pi Q_0 \gamma} \left[\left(1 + \frac{G}{\beta^2 \gamma^2} \right) \frac{\alpha_2^z}{h^2} + \frac{\mu_2^z}{g^2} \right]. \quad (35)$$

Полагая далее $z = z_0$ и снова подставляя F_z в уравнение (34), получаем подобную формулу для когерентного кулоновского сдвига ΔQ_z^c , где $\alpha_z = \alpha_1^z + \alpha_2^z$, $\mu_z = \mu_1^z + \mu_2^z$.

$$\Delta Q_z^c = -\frac{r_0 N R_0}{4\pi Q_0 \gamma} \left[\left(1 + \frac{G}{\beta^2 \gamma^2} \right) \frac{\alpha_z}{h^2} + \frac{\mu_z}{g^2} \right], \quad (36)$$

Выше фактически были вычислены коэффициенты $\alpha_{1,2}^{x,z}$ для широкой и круглой вакуумных камер и коэффициенты $\mu_{1,2}^{x,z}$ для параллельных ферромагнитных плоскостей. С помощью уравнений Максвелла была также показана справедливость следующих соотношений: $\alpha_2^x = -\alpha_2^z$ и $\mu_2^x = -\mu_2^z$. Так, в случае параллельных проводящих плоскостей было получено $\alpha_1^z = \pi^2/6$, $\alpha_1^x = \alpha_2^z = \pi^2/12$, а в случае круглой камеры — $\alpha_1^x = \alpha_1^z = 1$, $\alpha_2^z = 0$; для параллельных ферромагнитных плоскостей — $\mu_2^z = \pi^2/6$.

Вычисляя когерентные кулоновские сдвиги бетатронных частот при наличии параллельных ферромагнитных плоскостей, можно по аналогии с проводящими плоскостями получить $\mu_1^x = \pi^2/6$, $\mu_1^z = \pi^2/12$. В более общем случае эллиптического сечения вакуумной камеры значения коэффициентов $\alpha_{1,2}^{x,z}$ лежат, естественно, в пределах, ограниченных значениями соответствующих коэффициентов для рассмотренных выше предельных случаев.

На рис. 20 представлены графики, дающие коэффициенты $\alpha_1^{x,z}$ (рис. 20а) и α_2^z (рис. 20б) в зависимости от отношения полуосей эллиптической вакуумной камеры.

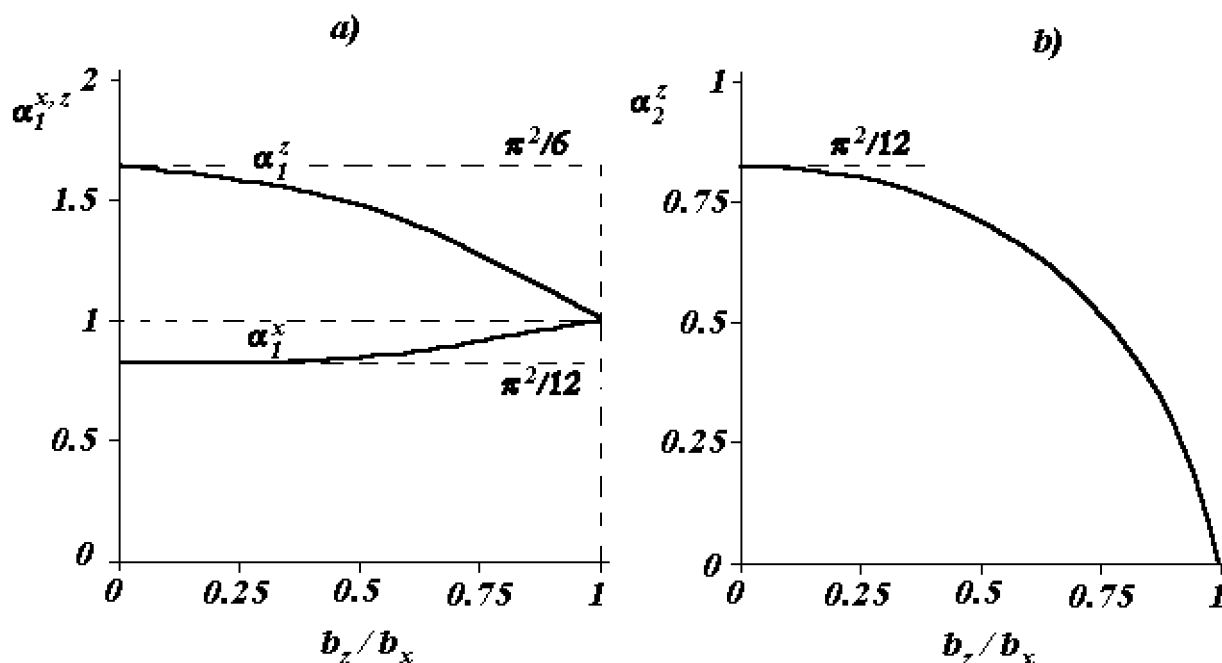


Рис. 20. Коэффициенты $\alpha_{1,2}^{x,z}$ для эллиптической вакуумной камеры.

2.2. ПРОДОЛЬНОЕ КУЛОНОВСКОЕ РАСТАЛКИВАНИЕ ЧАСТИЦ В ИНТЕНСИВНОМ ПУЧКЕ ПРОТОНОВ

Кулоновское расталкивание частиц в интенсивном пучке протонов происходит во всех направлениях, поэтому наряду со сдвигами бетатронных частот, рассмотренными в предыдущем разделе, имеет место также сдвиг синхротронной частоты, обусловленный собственным продольным электрическим полем пучка. В отличие от кулоновских сдвигов бетатронных частот кулоновский сдвиг синхротронной частоты может быть как отрицательным, так и положительным в зависимости от того, находится ли энергия пучка ниже или выше критического значения.

Отличаются также и физические процессы в пучке, связанные с кулоновским расталкиванием частиц в поперечном и продольном направлениях. Если для поперечного движения основную опасность представляет многократное пересечение частицами бетатронных резонансов при низкой энергии пучка, то для продольного движения наиболее опасным оказывается район критической энергии, так как в момент перехода интенсивного пучка через критическую энергию скачкообразно изменяется равновесная длина сгустков частиц, в результате чего возникает их рассогласование с фазовыми траекториями частиц.

Вычислим, исходя из уравнений Максвелла, собственное продольное электрическое поле в сгустке частиц, экранированном идеально проводящей вакуумной камерой ускорителя:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} - \frac{i\omega}{c}\mathbf{E}; \quad (37)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{i\omega}{c}\mathbf{H}. \quad (38)$$

Здесь предполагается, что зависимость электромагнитного поля и тока пучка от времени и от продольной координаты s даётся множителем $\exp(-i\omega t + iks)$, где $k = 2\pi/\lambda = n/R_0$ (n — целое число) — волновой вектор. Считая далее, что вектор плотности тока пучка \mathbf{j} имеет единственную составляющую, направленную вдоль орбиты ускорителя, и применяя к обеим частям уравнения (38) операцию rot , получаем с учётом (37) уравнение для продольной компоненты электрического поля E_s ,

$$\Delta_2 E_s + \frac{k^2}{\gamma^2} E_s = \frac{4\pi ik}{\gamma^2} \rho(s) f(x, z), \quad (39)$$

где нормированная на единицу функция $f(x, z)$ описывает распределение частиц в поперечном сечении сгустка.

Ограничимся рассмотрением длинноволновой части спектра поля E_s ($\lambda \gg 2\pi b/\gamma$, b — характерный поперечный размер вакуумной камеры ускорителя), оказывающей основное влияние на фазовое движение частиц в районе критической энергии. В таком случае уравнение (39) упрощается,

$$\Delta_2 E_s \simeq \frac{4\pi ik\rho}{\gamma^2} f(x, z), \quad (40)$$

и после введения обозначения $E_s = -(ik\rho/\gamma^2)U$ принимает стандартный вид уравнения Пуассона

$$\Delta_2 U = -4\pi f(x, z) \quad (41)$$

с граничным условием $U|_{\Sigma} = 0$.

Функция $U(x, z)$, как следует из её определения, описывает распределение продольного электрического поля по поперечному сечению пучка. Так как частицы, двигаясь вдоль орбиты ускорителя, наряду с радиально-фазовыми колебаниями участвуют также в быстром поперечном движении, то происходит естественное усреднение поля E_s по координатам x, z . Поэтому при расчётах в качестве продольного поля обычно используется усреднённое по распределению $f(x, z)$ поле \mathcal{E} , равное

$$\mathcal{E} = -\frac{ik\rho}{\gamma^2} \langle U(x, z) \rangle = -\frac{g}{\gamma^2} \frac{\partial \rho}{\partial s}, \quad (42)$$

где геометрический параметр g определён следующим выражением:

$$g = \langle U(x, z) \rangle = \int \int U(x, z) f(x, z) dx dz. \quad (43)$$

Рассчитаем в качестве примера параметр g для цилиндрической геометрии, когда круглый пучок радиуса a движется вдоль оси цилиндрической идеально проводящей металлической трубы радиуса b ; распределение частиц по поперечному сечению пучка будем для простоты считать равномерным. При этом уравнение (41) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dU}{dr} = -4\pi f(r). \quad (44)$$

Проинтегрировав два раза по r обе части уравнения (44), получим с учётом граничного условия $U(b) = 0$ выражение для $U(r)$ в виде двойного интеграла:

$$U = -4\pi \int_r^a \frac{dy}{y} \int_0^y f(r) r dr. \quad (45)$$

Так как распределение $f(r)$ отлично от нуля только в пределах сгустка, а вне его равно нулю, удобно представить последнее выражение в виде суммы двух членов:

$$U = 4\pi \int_r^a \frac{dy}{y} \int_0^y f(r) r dr + 4\pi \int_a^b \frac{dy}{y} \int_0^a f(r) r dr. \quad (46)$$

Подставляя в (46) распределение $f(r) = 1/\pi a^2$ и выполняя интегрирование, получаем

$$U = 1 - \frac{r^2}{a^2} + 2 \ln \frac{b}{a}. \quad (47)$$

Воспользовавшись далее формулой (43) и усреднив функцию $U(r)$ по поперечному сечению пучка, имеем окончательно

$$g = 2 \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{2}. \quad (48)$$

Здесь следует отметить, что хотя формула (48) получена для частного случая цилиндрической геометрии и равномерного распределения частиц по поперечному сечению пучка, даваемый ею результат слабо меняется при изменении формы вакуумной камеры, а также вида распределения $f(x, y)$. Это следует из рассмотрения других случаев (пучок эллиптического сечения в эллиптической камере, круглый пучок между параллельными металлическими плоскостями, тонкий кольцевой пучок в круглой камере), имеющих в литературе. В практически интересных случаях $g = (3 \div 5)$.

Посмотрим теперь, как влияет собственное продольное кулоновское поле \mathcal{E} на динамику частиц в ускорителе. Нас будет в основном интересовать район критической энергии, где величина поля \mathcal{E} наибольшая, поэтому воспользуемся для этой цели уравнением малых фазовых колебаний, которое с учётом кулоновского расталкивания частиц в продольном направлении можно записать в виде системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d\Delta p}{dt} = -\frac{eV \sin \varphi_s}{2\pi R_0} \chi + e\mathcal{E}(\chi); \quad (49)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{q\eta}{mR_0\gamma} \Delta p. \quad (50)$$

Для вычисления поля \mathcal{E} воспользуемся формулой (42), в которой заменим продольную координату s на фазу χ с помощью соотношения $\chi = -(q/R_0)s$, а также в предположении, что зависимость линейной плотности заряда от фазы χ описывается параболой

$$\rho = \frac{3Ne}{4R_0\chi_{max}^3} (\chi_{max}^2 - \chi^2), \quad (51)$$

где χ_{max} — фазовый полуразмер сгустков. В результате имеем

$$\mathcal{E} = -\frac{3eNqg}{2\gamma^2 R_0^2 \chi_{max}^3} \chi. \quad (52)$$

Таким образом, при выбранной параболической зависимости линейной плотности заряда от фазы χ поле \mathcal{E} оказывается линейным в пределах сгустка частиц.

Отметим, что несмотря на обратную пропорциональность поля \mathcal{E} квадрату энергии пучка, более существенной оказывается его зависимость от длины сгустков, имеющей минимум при энергии пучка, равной критическому значению. По этой причине коэффициент перед χ в формуле (52) обычно максимален при $\gamma = \gamma_{tr}$, так что наибольшее влияние на фазовое движение частиц поле \mathcal{E} оказывает вблизи критической энергии.

В силу отмеченной линейности собственного продольного поля сгустков для рассматриваемой здесь параболической зависимости $\rho(\chi)$, в адиабатическом районе вдали от критической энергии уравнение малых фазовых колебаний сводится к уравнению гармонического осциллятора, даваемого формулой (1.154), в котором частота синхротронных колебаний Ω зависит от числа частиц N в ускорителе в соответствии с выражением

$$\Omega = \Omega_0 \sqrt{1 \pm \frac{3\pi qgeN}{\gamma^2 R_0 \chi_{max}^3 V |\sin \varphi_s|}}, \quad (53)$$

в котором через Ω_0 обозначена частота малых синхротронных колебаний в отсутствие собственного продольного поля \mathcal{E} (см. формулу (1.155)); знак плюс соответствует энергии пучка выше критического значения, минус — $\gamma < \gamma_{tr}$.

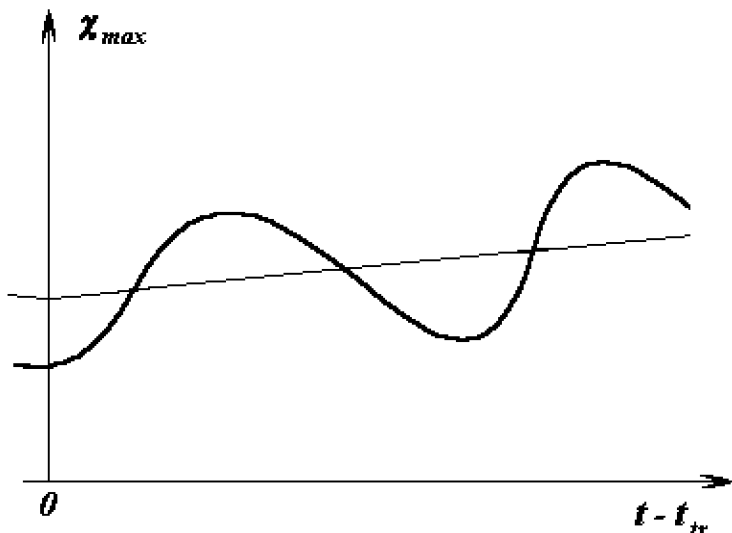


Рис. 21. Колебания длины сгустка в зависимости от времени вблизи критической энергии.

Как видно из формулы (53), по сравнению со случаем низкой интенсивности пучка частота фазовых колебаний Ω уменьшается перед критической энергией и увеличивается при $\gamma > \gamma_{tr}$. Соответственно изменяется и равновесная длина сгустка частиц — она увеличивается перед критической энергией и уменьшается при $\gamma > \gamma_{tr}$, в результате чего после перехода пучка через критическую энергию возникает рассогласование сгустков частиц со своими фазовыми траекториями, что приводит к колебаниям их размеров. Рис. 21 иллюстрирует зависимость длины сгустка от времени в районе критической энергии для линейного поля $\mathcal{E}(\chi)$, даваемого формулой (52).

В качестве простейшего способа борьбы с обсуждаемым здесь рассогласованием интенсивных сгустков частиц было предложено использовать при переходе пучка через критическую энергию тройное переключение фазы ускоряющего напряжения. Суть метода заключается в следующем: некоторое время спустя после первого (обычного) переброса фазы ускоряющего напряжения она снова скачком возвращается к значению, которое имело место непосредственно перед критической энергией, так что центры сгустков попадают в неустойчивую фазу ускоряющего напряжения ($\varphi = -\varphi_s$). Момент второго переключения фазы выбирается из условия совпадения главных осей эллипса, изображающего сгусток частиц на фазовой плоскости, с фазовыми траекториями, проходящими через узел сепаратрисы, причём ча-

стицы, располагающиеся на большой оси, должны двигаться к центру эллипса, а на малой — от его центра.

Используя данный способ, можно полностью устранить (по крайней мере теоретически) рассогласование сгустков, обусловленное кулоновским расталкиванием частиц в продольном направлении. После этого происходит третий (последний) скачок фазы ускоряющего напряжения на величину $2|\varphi_s|$, и сгустки снова попадают в устойчивую фазу синхротронных колебаний частиц.

Данный метод был предложен и исследован в протонном синхротроне ЦЕРНа (CERN PS), но его эффективность оказалась невелика, к тому же она снижалась с ростом интенсивности ускоряемого пучка. Его низкая эффективность, как выяснено, была обусловлена двумя основными причинами — нелинейностью собственного продольного поля сгустков $\mathcal{E}(\chi)$ и микроволновой неустойчивостью пучка, развивающейся в СВЧ-диапазоне.

В настоящее время для борьбы с рассогласованием интенсивных сгустков протонов практически повсеместно используется метод скачка γ_{tr} , существенно увеличивающий скорость пересечения пучком критической энергии. Для создания скачка критической энергии используется искажение функции $D(s)$, описывающей дисперсию орбит в ускорителе, для чего в магнитную структуру ускорителя вводится гармоника возмущения градиента магнитного поля с номером $k \simeq Q$ (здесь Q — бетатронная частота). Простейший способ создания скачка критической энергии — введение в магнитную структуру ускорителя вставок, содержащих дублеты из квадрупольных линз.

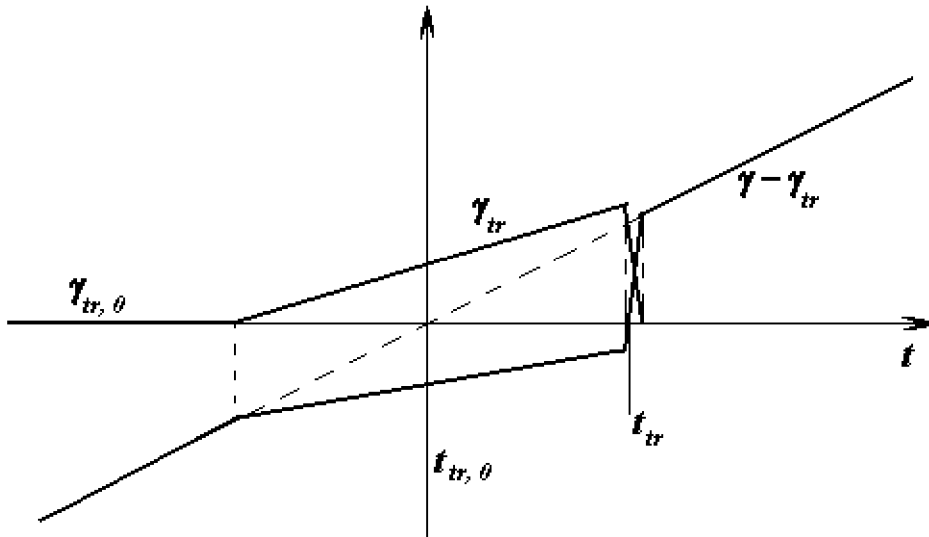


Рис. 22. Схема перевода пучка через критическую энергию в ускорителе ИФВЭ.

На рис. 22 в качестве примера показана схема скачка критической энергии, используемая для перевода интенсивного пучка протонов в ускорителе ИФВЭ. Скачок γ_{tr} создаётся за счёт возмущения градиента в фокусирующих магнитных блоках с номерами 2 и 8 в каждом из двенадцати суперпериодов ускорителя. Расстояние между указанными блоками равно примерно половине длины волны бетатронных колебаний, поэтому при равных по величине и противоположных по знаку возмущениях градиента магнитного поля G в них, что имеет место при скачке γ_{tr} в ускорителе ИФВЭ, бетатронные частоты изменяются мало.

С помощью независимых источников питания в градиентные обмотки указанных блоков подаются противофазно треугольные импульсы тока, причём их нарастание происходит медленно (за ~ 30 мс), а спад, напротив, — быстро (за время ~ 1 мс). С ростом величины токов в градиентных обмотках указанных магнитных блоков значение критической энергии ускорителя увеличивается пропорционально квадрату возмущения градиента магнитного поля ускорителя, достигая величины $\Delta\gamma_{tr} \simeq 0,75$ при величине возмущения градиента $\Delta G/G = 0.1$.

Таким образом, наличие критической энергии в кольцевом ускорителе протонов может приводить к значительным трудностям при большой интенсивности пучка, связанным с продольным рассогласованием сгустков частиц, причиной которого служат как продольное кулоновское расталкивание частиц, рассмотренное выше, так и взаимодействие пучка с элементами вакуумной камеры. Особенно жёсткие требования предъявляются к качеству пучка, если ускоритель используется в качестве инжектора в коллайдер. По этой причине во вновь разрабатываемых протонных синхротронах, как правило, стараются вообще избегать наличия критической энергии в рабочем диапазоне энергий ускорителя. Так, например, в бустере ИФВЭ магнитная структура подобрана так, что критическая энергия существенно превышает конечную, а в проекте УНК, напротив, критическая энергия располагается ниже энергии инжекции частиц. Существуют также предложения, как вообще устранить критическую энергию в кольцевом ускорителе протонов за счёт создания магнитной структуры с отрицательным коэффициентом расширения орбит α и, следовательно, с чисто мнимой величиной γ_{tr} .

2.3. ПРОДОЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОРОДНОГО ПУЧКА ПРОТОНОВ

Интенсивность большинства существующих в настоящее время ускорителей ограничивается когерентными неустойчивостями пучка. Они препятствуют повышению интенсивности выше некоторого порогового уровня без существенного ухудшения качества ускоряемого пучка и увеличения потерь частиц. Рассмотрим вначале продольную неустойчивость однородного пучка протонов. Подобный случай реализуется, например при медленном выводе частиц из ускорителя, когда ведущее магнитное поле примерно постоянно, а ускоряющее напряжение выключено.

Источником неустойчивости является электромагнитное поле, возбуждаемое пучком частиц в окружающем его оборудовании ускорителя (в элементах вакуумной камеры, ускоряющих пучок резонаторах, устройствах ввода-вывода пучка и др.). Граничные условия, зависящие от геометрии и электромагнитных свойств данного оборудования, существенным образом влияют на величину возбуждаемого пучком поля, а, следовательно, на возмущение движения частиц в ускорителе.

Ниже мы ограничимся рассмотрением случая достаточно малой величины собственного электромагнитного поля пучка по сравнению с внешним ведущим магнитным полем ускорителя. Другими словами, будем исследовать движение частиц, происходящее почти независимо от собственного поля пучка, действующего как возмущение.

2.3.1. Продольное движение одной частицы в отсутствие возмущений

Рассмотрим невозмущённое движение частицы в ускорителе, пренебрегая пока возбуждаемым пучком электромагнитным полем. Уравнение движения частицы имеет вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (54)$$

где \mathbf{p} — импульс; \mathbf{v} — скорость; e — заряд частицы; \mathbf{E} и \mathbf{B} — векторы электрического и магнитного полей, воздействующих на частицу.

В настоящем разделе нас будет интересовать продольное движение частиц в ускорителе, поэтому ограничимся пока рассмотрением продольной компоненты импульса p_s , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{dp_s}{dt} = e[E_s + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_s], \quad (55)$$

причём в однородном пучке протонов продольная компонента электрического поля E_s равна нулю, а составляющая $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_s$ — пренебрежимо малая величина, так как поперечные скорости частицы малы по сравнению с её продольной скоростью и, кроме того, из-за быстрого бетатронного движения частицы среднее значение последнего выражения также оказывается равным нулю, так что из уравнения (55) следует, что $\dot{p}_s = 0$ и продольная компонента импульса $p_s = p_0$ остаётся постоянной в процессе движения частицы.

Для описания движения частиц в пучке удобно ввести координаты τ и $\dot{\tau} = d\tau/dt$, где τ — время задержки прохождения данной частицей некоторого фиксированного азимута ускорителя относительно равновесной частицы ($\tau = \varphi/\omega_{RF}$). Координаты $\tau, \dot{\tau}$ определяют фазовое пространство.

Из определения параметра η (см. формулу (1.152)) следует,

$$\dot{\tau} = \frac{dT}{T_0} = \eta \frac{dp}{p_0} = const, \quad (56)$$

так что $\tau = \tau_0 + \dot{\tau}t$ — линейная функция времени, а уравнение движения имеет в новых координатах вид

$$\ddot{\tau} = \frac{\eta}{p_0} \dot{p} = \frac{\eta e}{p_0} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_s(t, \theta). \quad (57)$$

Здесь τ_0 — начальное значение τ в момент времени $t = 0$; $T_0 = 2\pi/\omega_0$ — период обращения равновесной частицы, ω_0 — её частота обращения. До сих пор полагалось, что правая часть уравнения (57) равна нулю. В дальнейшем она будет описывать собственное поле пучка, величина которого предполагается малой по сравнению с внешним ведущим магнитным полем.

Важной характеристикой пучка является зависимость его тока (или плотности тока) от времени t и его азимутального положения в ускорителе θ — $J(t, \theta)$ (или $\mathbf{j}(t, \theta)$), которую надо знать, прежде чем начать решать уравнения Максвелла для нахождения собственного поля пучка. На практике для наблюдения за током пучка используется сигнал с пикап-электрода, подаваемый на осциллограф.

Предположим, что в ускорителе имеется идеальный пикап-электрод с бесконечно широкой полосой пропускания, расположенный на азимуте θ ускорительного кольца, а внутри вакуумной камеры равномерно вращается тестовая частица. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ данная частица пересекает азимут $\theta = 0$. Тогда, если частица является равновесной, пикап периодически пересекается ею в моменты времени $t_n^0 = (\theta + 2n\pi)/\omega_0$.

Если же частица не является равновесной, то имеет место задержка τ_0 относительно момента времени $t = 0$. Такая частица пересекает пикап в моменты времени, равные

$$t_n = t_n^0 + \tau = t_n^0 + \tau_0 + \dot{\tau}t_n^0 = \tau_0 + t_n^0(1 + \dot{\tau}).$$

Сигнал с пикап-электрода представляет собой в рассматриваемом случае серию периодических импульсов, возникающих при каждом прохождении частицы через пикап, причём период обращения частицы T зависит от импульса частицы p : $T = T_0(1 + \dot{\tau}) = T_0(1 + \eta(\Delta p/p_0))$, а математическое выражение сигнала — периодическую функцию, составленную из δ -функций,

$$j(t, \theta) = e \sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \tau - (\theta + 2\pi n)/\omega_0\right). \quad (58)$$

Формально последнее выражение можно считать периодической функцией времени с периодом $T_0 = 2\pi/\omega_0$, если ввести обозначение $x = t - \tau - \theta/\omega_0$. Разлагая функцию $j(x)$ в ряд Фурье, имеем

$$\begin{aligned} j(x) &= \sum_k C_k e^{ik\omega_0 x}; \\ C_k &= \frac{e\omega_0}{2\pi} \int \delta\left(x - \frac{2\pi}{\omega_0}n\right) e^{-ik\omega_0 x} dx = \frac{e\omega_0}{2\pi}; \\ j(t, \theta) &= \frac{e\omega_0}{2\pi} \sum_n e^{in\omega_0(t-\tau-\theta/\omega_0)} = \frac{e\omega_0}{2\pi} \sum_n e^{in[\omega_0(t-\tau)-\theta]}. \end{aligned} \quad (59)$$

От последнего выражения легко перейти к спектру Фурье:

$$\begin{aligned} j(\Omega, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j(t, \theta) e^{-i\Omega t} dt = \\ &= \frac{e\omega_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[\Omega - n\omega_0(1 - \dot{\tau})] e^{-in(\omega_0\tau_0 + \theta)}. \end{aligned} \quad (60)$$

Следовательно, анализатор спектра зафиксирует для всех гармоник частоты обращения $\omega = \omega_0(1 - \dot{\tau})$ набор бесконечно узких спектральных линий на частотах $\Omega = \Omega_n = n\omega_0(1 - \dot{\tau})$, причём спектральная мощность амплитуды одинакова для всех гармоник.

В отличие от тестовой частицы в реальном пучке обычно имеется некоторый разброс по импульсам p , а, следовательно, и по $\dot{\tau}$, так что, на самом деле, спектральные линии, фиксируемые анализатором спектра при циркуляции в ускорителе пучка частиц, имеют конечную ширину, пропорциональную номеру гармоники n . На рис. 23 представлен шумовой спектр циркулирующего пучка протонов для случая, когда частицы равномерно распределены по импульсам в пределах $|p - p_0| \leq \Delta p = (p_0/|\eta|)\dot{\tau}_m$, где $\dot{\tau}_m$ — максимальное значение $\dot{\tau}$. При некотором достаточно большом значении $n = n_0$ соседние спектральные полосы начинают перекрывать друг друга. Так как при этом справедливо равенство $n_0\omega_0(1 + \dot{\tau}_m) = (n_0 + 1)\omega_0(1 - \dot{\tau}_m)$, то отсюда получается $2n_0 + 1 = (|\eta|\Delta p/p_0)^{-1}$. Такие спектральные полосы называют некогерентными, а частицы на этих частотах (при $n > n_0$) ведут себя как независимые, так что связь между ними отсутствует.

В ускорительной физике электромагнитный шум пучка, анализируемый с помощью анализатора спектра, часто называют Шоттки-сканом. Такие продольные Шоттки-сканы позволяют измерять распределение частиц по импульсам в пучке.

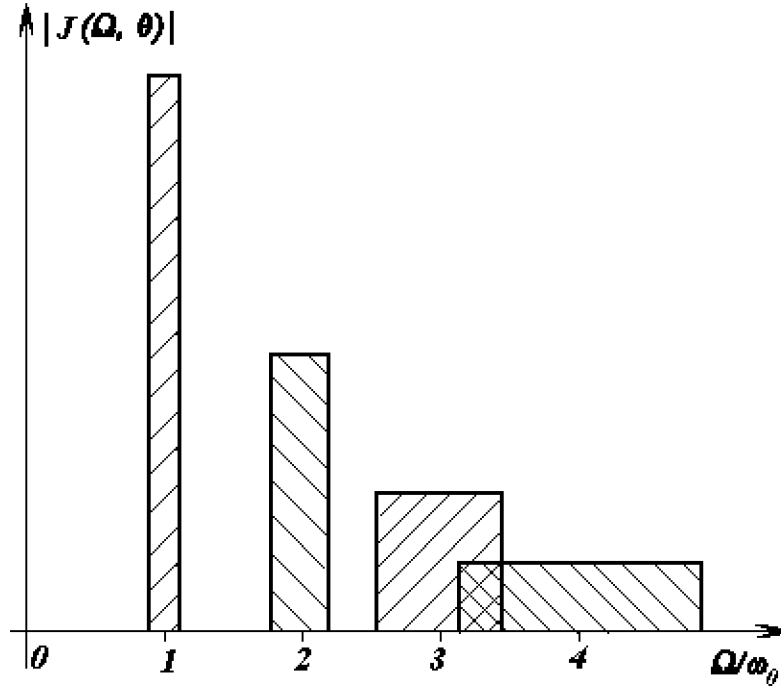


Рис. 23. Шумовой спектр циркулирующего пучка протонов.

2.3.2. Функция распределения

Выше было получено выражение для сигнала от одной частицы, вращающейся в ускорителе. Чтобы получить сигнал от полного тока пучка, просуммируем подобные сигналы от всех частиц, для чего зададимся распределением частиц в пучке $\psi(\tau, \dot{\tau}, t)$, описывающем плотность частиц в двумерном фазовом пространстве $(\tau, \dot{\tau})$. Полный ток пучка можно представить в виде

$$J(t, \theta) = N \int_0^{T_0} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{\tau} \psi(\tau, \dot{\tau}, t) j(t, \theta), \quad (61)$$

где N — число частиц в ускорителе; при этом функция распределения $\psi(\tau, \dot{\tau}, t)$ нормирована на единицу, так что

$$\int_0^{T_0} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{\tau} \psi(\tau, \dot{\tau}, t) = 1.$$

Коротко обсудим некоторые основные замечания и определения, касающиеся распределений частиц в пучке. Распределение называется стационарным, если плотность частиц не изменяется с течением времени в любой точке фазового пространства. Количество частиц, покидающих данную точку фазового пространства в единицу времени, должно быть равно при стационарном распределении количеству частиц, прибывающих в неё за тот же промежуток времени. Выше мы видели, что исходные фазовые траектории частиц — прямые линии, поэтому стационарная функция распределения может зависеть лишь от координаты $\dot{\tau}$.

В самом деле, плотность частиц при стационарном распределении не зависит от координаты τ , так как в противном случае такая зависимость деформировалась бы с течением

времени из-за относительного продольного движения частиц в пучке, и стационарность распределения оказалась бы невозможной. Следовательно, стационарное распределение частиц в невозмущённом однородном пучке протонов описывается выражением вида $g_0(\dot{\tau})$. Положим $\psi(\tau, \dot{\tau}, t) = g_0(\dot{\tau})$ и выполним интегрирование в (61) с учётом соотношения (59) для $j(t, \theta)$. Видно, что результирующий сигнал пучка не меняется с течением времени и даётся выражением $J(t, \theta) = I$, где I — средний ток пучка. В частотном представлении существует единственная спектральная линия на нулевой частоте — $J(\Omega, \theta) = I\delta(\Omega)$.

Интересно отметить следующий характерный результат, получающийся при переходе от индивидуальных частиц к пучку, — богатый частотный спектр индивидуальных частиц при таком переходе полностью исчезает. Подобный постоянный ток может лишь создавать поперечное электромагнитное поле, так что правая часть в уравнении (55) равна нулю и сила, могущая вызвать продольную нестабильность, отсутствует.

Отсюда можно было бы сделать вывод, что однородный пучок протонов устойчив всегда. Однако на практике идеально однородный пучок не существует, так как реальный пучок состоит из большого числа точечных зарядов. В среднем плотность частиц в пучке может быть описана гладкой стационарной функцией распределения, но в нём всегда присутствует статистический шум, что, как отмечалось, подтверждается наличием Шоттки-сканов. Для получения результирующего сигнала от пучка мы проинтегрировали сигналы от индивидуальных частиц с учётом функции распределения с помощью выражения (61) вместо суммирования по частицам, что привело к сглаживанию плотности частиц в пучке и, как следствие, к пренебрежению этим шумом.

Кроме статистического шума к возмущениям стационарного распределения частиц приводят также предыдущие манипуляции с пучком в ускорителе, такие как рассогласование пучка при инжекции, оставшаяся от линейного ускорителя ВЧ-структура и др. Поэтому имеются физические причины для представления функции распределения в виде суммы стационарного распределения и малого возмущения, периодического по τ с периодом T_0 .

В качестве возмущения будем рассматривать гармонику частоты обращения с номером n , так что возмущение представляет собой предварительную группировку пучка на частоте $n\omega_0$, и его можно записать в виде $g_n(\dot{\tau})e^{in\omega_0\tau}$. Для анализа устойчивости следует также предположить, что возмущение распределения не является чисто гармоническим, а имеет небольшой, вообще говоря, комплексный частотный сдвиг ω_{nc} и, следовательно, его необходимо умножить на коэффициент $e^{i\omega_{nc}t}$. С учётом сделанных замечаний, исходная функция распределения может быть записана в виде

$$\psi(\tau, \dot{\tau}, t) = g_0(\dot{\tau}) + g_n(\dot{\tau})e^{i(n\omega_0\tau + \omega_{nc}t)}, \quad (62)$$

причём функции $g_0(\dot{\tau})$ и $g_n(\dot{\tau})$ имеют следующие нормировки:

$$\int g_0(\dot{\tau}) d\dot{\tau} = \frac{1}{T_0},$$

$$\int_{\tau, \dot{\tau}} g_n(\dot{\tau})e^{i(n\omega_0\tau + \omega_{nc}t)} d\tau d\dot{\tau} = 0,$$

так как возмущение лишь перераспределяет частицы, не изменяя их полного числа N .

Устойчивость пучка определяется знаком мнимой части введённой выше добавки к частоте возмущения ω_{nc} . Если $Im \omega_{nc} < 0$, то возмущение экспоненциально нарастает с течением времени, и пучок группируется в сгустки на частоте $\sim n\omega_0$. Постоянная роста

возмущения τ_{inst} равна $1/\tau_{inst} = -Im \omega_{nc}$. Если же $Im \omega_{nc} > 0$, то возмущение затухает и со временем рассасывается.

Сигнал, возбуждаемый распределением (62), равен

$$J(t, \theta) = I + J_n(t, \theta),$$

где

$$J_n(t, \theta) = N \int_{\tau, \dot{\tau}} g_n(\dot{\tau}) e^{i(n\omega_0\tau + \omega_{nc}t)} \frac{e\omega_0}{2\pi} e^{in[\omega_0(t-\tau) - \theta]} d\tau d\dot{\tau} = IT_0 e^{i[(n\omega_0 + \omega_{nc})t - n\theta]} \int_{\dot{\tau}} g_n(\dot{\tau}) d\dot{\tau},$$

и, соответственно, фурье-спектр:

$$J(\Omega_c, \theta) = I\delta(\Omega_c) + J_n(\Omega_c, \theta),$$

где

$$J_n(\Omega_c, \theta) = IT_0 e^{-in\theta} \delta[\Omega_c - (n\omega_0 + \omega_{nc})] \int_{\dot{\tau}} g_n(\dot{\tau}) d\dot{\tau}.$$

Таким образом, спектр пучка при наличии возмущения состоит из двух линий — на нулевой частоте и на частоте $\Omega_c = n\omega_0 + \omega_{nc}$. Вторая линия соответствует частоте когерентных колебаний пучка в том смысле, что мы определённым образом упорядочили частицы пучка, чтобы получить эту линию, изначально считая движение частиц когерентным. Предполагается, что сигнал или ток пучка является комплексной величиной. Мы будем ассоциировать его с понятием комплексного импеданса, широко используемым в классической электротехнике. Для нахождения комплексной добавки ω_{nc} к частоте возмущения $n\omega_0$ и решения таким образом вопроса о продольной устойчивости однородного пучка протонов, в качестве очередного этапа необходимо связать электромагнитное поле пучка с его током через продольный импеданс связи $Z(\omega)$.

2.3.3. Продольный импеданс связи

Мы пока не можем приступить к количественному исследованию деталей развития неустойчивости однородного пучка протонов, так как наши математические возможности чрезвычайно ограничены. Даже в простейшем случае пучка, экранированного гладкой вакуумной камерой ускорителя, аналитическое выражение для собственного электромагнитного поля пучка имеет достаточно сложный вид. Получить же полные аналитические решения уравнений Максвелла для реальной машины (с учётом всех изменений геометрии и электромагнитных свойств вакуумной камеры вдоль орбиты пучка) определённно невозможно. Поэтому для придания общности теории неустойчивости пучка введём понятие продольного импеданса связи $Z(\omega)$.

В качестве примера рассмотрим цилиндрическую гладкую вакуумную камеру. Продольное электрическое поле пучка, экранированного такой камерой, было получено в предыдущем разделе (см. формулу (42)). Перейдя в систему СИ ($\times 1/4\pi\epsilon_0$, где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная), а также учитывая, что $J = \beta c\rho$, $J \sim e^{-in\theta}$, $s = \theta R_0$, преобразуем выражение (42) к виду

$$E_s = -\frac{1}{2\pi R_0} \left[\frac{nZ_0 g}{2i\beta\gamma^2} \right] J(t, \theta), \quad (63)$$

где Z_0 — так называемое сопротивление свободного пространства ($Z_0 = 120\pi$ Ом).

Последнее выражение идентично закону Ома, а размерность величины в квадратных скобках даётся в омах. Последняя величина, по определению, называется продольным импедансом связи $Z(\omega)$, так что с учётом этого можно записать

$$E_s(t, \theta) = -\frac{1}{2\pi R_0} Z(\omega) J(t, \theta). \quad (64)$$

В рассматриваемом здесь частном случае продольный импеданс связи равен

$$Z(\omega) = \frac{Z_0 g}{2i\beta\gamma^2} \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (65)$$

На данной стадии рассмотрения можно сделать некоторое обобщение относительно определения продольного импеданса связи. Так как на частицы одновременно действуют электрическое и магнитное поля,

$$\ddot{r} = \frac{\eta}{p_0} \dot{p} = \frac{\eta e}{p_0} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_s(t, \theta),$$

мы также включим в определение импеданса вклад от магнитного поля:

$$[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_s(t, \theta) = -\frac{1}{2\pi R_0} Z(\omega) J(t, \theta). \quad (66)$$

В качестве дальнейшего обобщения определение продольного импеданса связи распространяется на случай, когда возмущение не является чисто гармоническим, а сосредоточено в пределах некоторого частотного диапазона. При этом каждая гармоника тока пучка даёт свой вклад в силу и должна быть скомбинирована с соответствующим импедансом $Z(\omega)$:

$$[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_s(t, \theta) = -\frac{1}{2\pi R_0} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) J(\omega, \theta) e^{i\omega t} d\omega, \quad (67)$$

где используются следующие определения:

$$J(\omega, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J(t, \theta) e^{-i\omega t} dt; \quad J(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} J(\omega, \theta) e^{i\omega t} d\omega.$$

Применим соотношение (67) к точечному заряду e , обращающемуся с частотой ω_0 в ускорителе, для которого справедливы соотношения

$$J(t, \theta) = \sum_n e \delta\left(t - \frac{\theta + 2n\pi}{\omega_0}\right) = \frac{e\omega_0}{2\pi} \sum_n e^{in(\omega_0 t - \theta)};$$

$$J(\omega, \theta) = \frac{e\omega_0}{2\pi} \sum_n e^{-in\theta} \delta(\omega - n\omega_0).$$

Подставляя последнее выражение для $J(\omega, \theta)$ в формулу (67), получаем

$$-2\pi R_0 [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_s = \frac{e\omega_0}{2\pi} \sum_n Z(n\omega_0) e^{in(\omega_0 t - \theta)}. \quad (68)$$

Предположим теперь, что за лидирующим зарядом следует тестовый заряд, запаздывающий относительно лидирующего на время τ , для которого $\theta = \omega_0(t - \tau)$. Тогда (68) преобразуется к виду

$$-\frac{2\pi R_0}{e}[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_s(\tau) = G(\tau) = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_n Z(n\omega_0) e^{in\omega_0\tau}, \quad (69)$$

где $G(\tau)$ — напряжение, действующее на единицу заряда (В/К); функцию $G(\tau)$ обычно называют функцией Грина. В выражении (69) она разложена в ряд по всем гармоникам частоты обращения пучка.

Если импеданс $Z(\omega)$ представляет собой достаточно гладкую функцию или периметр орбиты достаточно велик, так что наведенные поля полностью затухают за один оборот пучка в ускорителе, ряд в (69) может быть заменён интегралом, так что

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Как отсюда видно, импеданс $Z(\omega)$ в таком случае получается как преобразование Фурье от функции Грина,

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Последнее соотношение используется при численных расчётах импеданса $Z(\omega)$. С этой целью вдоль структуры ускорителя продвигают короткий сгусток частиц, решая шаг за шагом уравнения Максвелла в точках предварительно разбитой сетки. Таким образом находится функция Грина, а затем численно вычисляется её преобразование Фурье.

В качестве примера рассмотрим продольные импедансы связи характерных элементов вакуумной камеры, с которыми взаимодействует пучок в ускорителе. Ускоритель включает в себя множество элементов, таких как сифоны, фланцы, изменения поперечного сечения вакуумной камеры, пикап-электроды, ускоряющие станции, септумы, кикеры и т.д.

В последние годы достигнут определённый прогресс в расчётах импедансов. Были разработаны программы для численных расчётов, а также экспериментальные методики для непосредственного измерения импедансов на ускорителях. Однако не всегда удаётся рассчитать или предугадать импеданс связи в СВЧ-диапазоне до постройки новой машины. Многие также известно в этой области из опыта эксплуатации существующих ускорителей. Большинство из них страдает от неустойчивостей пучка, несмотря на многочисленные попытки измерить и снизить импеданс связи.

Как уже говорилось, импеданс связи является комплексной функцией частоты ω . Следовательно, он имеет реальную и мнимую части. Импеданс гладкой идеально проводящей вакуумной камеры — пример чисто мнимого импеданса. Вообще, в широком смысле слова импеданс элементов кольца может быть как индуктивным, так и ёмкостным. Он также может быть сопротивлением, если имеют место потери энергии пучка. Наши уравнения написаны таким образом, что используется вся ось ω (положительные и отрицательные частоты). Ниже будет показано, что основной интерес представляет не собственно величина $Z(\omega)$, а отношение $Z(\omega)/\omega$ или $Z(\omega)/n$, где $n = \omega/\omega_0$. Поэтому обычно в качестве вертикальной координаты при изображении импеданса используются $Im Z(\omega)/\omega$ и $Re Z(\omega)/\omega$ с ω в качестве горизонтальной оси.

Коротко остановимся на характерных типах продольных импедансов связи, наиболее часто встречающихся на практике:

Резистивный стеночный импеданс, который имеет очень большую величину на очень низких частотах,

$$Z(\omega) = (1 + i) \frac{Z_0 \beta}{2b} \delta_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{1/2}; \quad \frac{Z(\omega)}{n} = (1 + i) \frac{Z_0 \beta}{2b} \delta_0 \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (70)$$

где b — радиус вакуумной камеры, которая в данном примере предполагается гладкой и цилиндрической; $\delta_0 = \sqrt{2/\mu_0 \omega_0 \sigma}$ ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная; σ — проводимость материала, из которого изготовлена вакуумная камера).

Высокочастотные резонансные элементы, например паразитные типы волн, возбуждаемые пучком в полостях ускоряющих резонаторов. Такие узкополосные резонансы, если они имеются в ускорителе, должны быть обнаружены и подавлены.

Широкополосный импеданс, учитывающий эффект от многочисленных вакуумных переходов. Его обычно аппроксимируют резонатором с добротностью $Q \simeq 1$ с собственной частотой, располагающейся вблизи частоты отсечки вакуумной камеры ($\omega_c = c/b$). Данная модель хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Резистивная часть импеданса спадает на высоких частотах, как показали наблюдения на электронных машинах. На низких частотах импеданс представляет собой индуктивность. Таким образом, рассматриваемый импеданс аппроксимируется выражением

$$Z(\omega) = \frac{R_s}{1 + iQ(\omega/\omega_c - \omega_c/\omega)}, \quad (71)$$

где R_s — шунтовой импеданс; $Q \simeq 1$ — добротность. Он представляет собой индуктивность при $\omega \ll \omega_c$

$$Z = iR_s(\omega/\omega_c); \quad Z/n = iR_s(\omega_0/\omega_c),$$

чистое сопротивление при резонансе ($\omega = \omega_c$)

$$Z = R_s; \quad Z/n = R_s(\omega_0/\omega_c),$$

и ёмкость на высоких частотах (при $\omega \gg \omega_c$)

$$Z = -iR_s(\omega_c/\omega); \quad Z/n = -iR_s(\omega_c \omega_0/\omega^2).$$

Для того, чтобы снизить величину широкополосного импеданса, необходимо при конструировании вакуумной камеры ускорителя, по-возможности, избегать или экранировать резкие изменения её поперечного сечения. Минимальная измеренная величина широкополосного импеданса связи $|Z/n|$ составляет порядка 1 Ом в максимуме; если же не принимается никаких специальных мер по его снижению, величина широкополосного импеданса может достигать 50 Ом.

Наконец, не надо забывать обычную компоненту объёмного заряда пучка, которая может быть достаточно большой при малой энергии пучка,

$$Z_{sc} = -i \frac{Z_0 g}{2\beta \gamma^2} \frac{\omega}{\omega_0}, \quad Z_{sc}/n = -i \frac{Z_0 g}{2\beta \gamma^2}. \quad (72)$$

Суммарный импеданс, видимый пучком, представляет собой сумму всех компонент, обсуждавшихся выше. Качественная картина продольного импеданса связи в зависимости

от частоты ω представлена на рис. 24, где реальные части $Re Z/n$ даны сплошными линиями, а мнимые $Im Z/n$ — пунктиром.

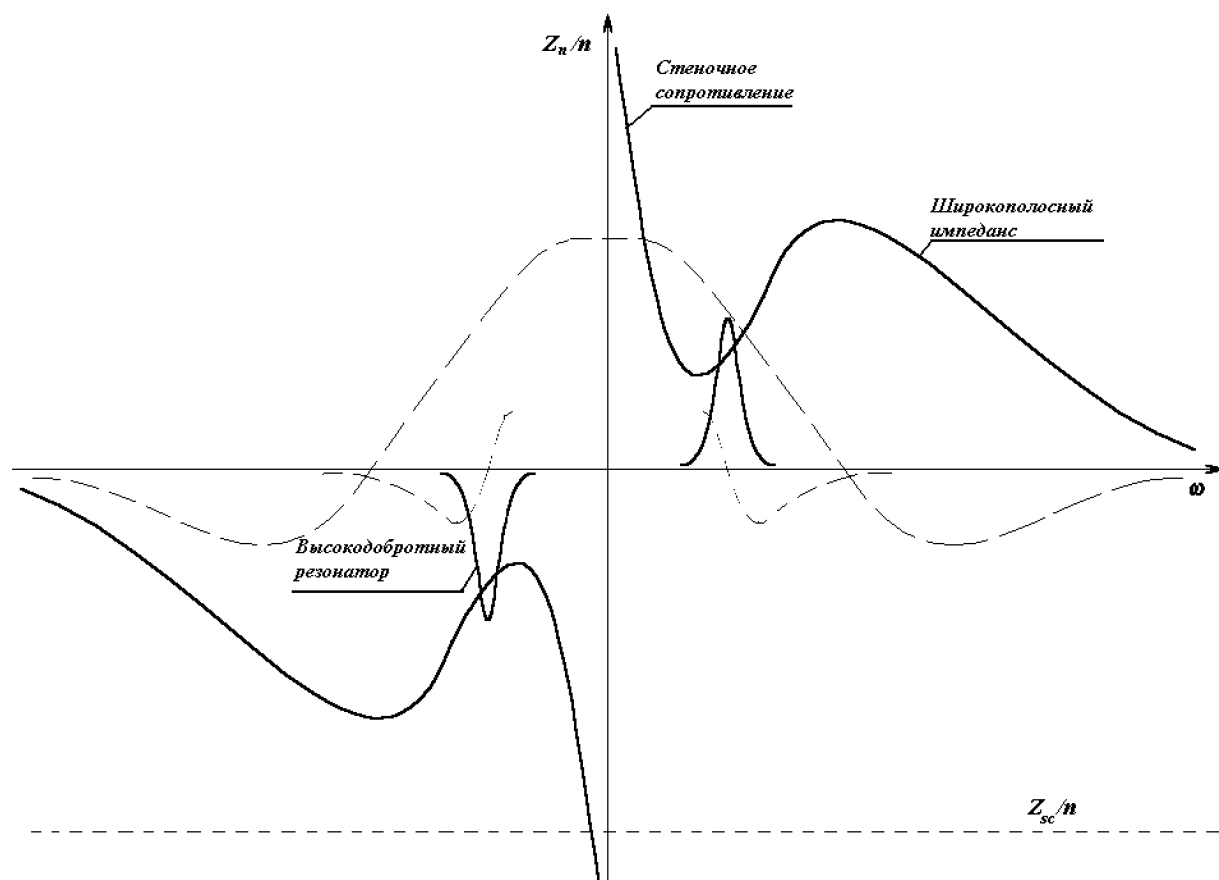


Рис. 24. Зависимость продольного импеданса связи от частоты в протонном синхротроне.

2.3.4. Уравнение Власова и дисперсионное уравнение

Используемая в настоящем разделе пара переменных $(\tau, \dot{\tau})$ является канонически сопряжённой, поэтому в силу теоремы Лиувилля плотность частиц на фазовой плоскости вблизи любой конкретной частицы остаётся неизменной с течением времени, что математически описывается уравнением $d\psi/dt = 0$, которое можно расписать более подробно:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \dot{\tau} + \frac{\partial \psi}{\partial \ddot{\tau}} \ddot{\tau} = 0. \quad (73)$$

Последнее уравнение с учётом уравнения движения (57), которым заменяется $\ddot{\tau}$ в (73), называется уравнением Власова. Подставляя в (73) выражение для ψ , введённое выше с помощью формулы (62), и учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= i\omega_{nc} g_n(\dot{\tau}) e^{i(n\omega_0\tau + \omega_{nc}t)}; \\ \dot{\tau} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} &= in\omega_0 \dot{\tau} g_n(\dot{\tau}) e^{i(n\omega_0\tau + \omega_{nc}t)}; \\ \ddot{\tau} \frac{\partial \psi}{\partial \ddot{\tau}} &= \ddot{\tau} g'_0(\dot{\tau}) + \text{члены второго порядка малости,} \end{aligned}$$

а также отбрасывая члены второго порядка малости, имеем

$$(i\omega_{nc} + in\omega_0\dot{\tau})g_n(\dot{\tau})e^{i(n\omega_0\tau + \omega_{nc}t)} = -\ddot{\tau}g'_0(\dot{\tau}), \quad (74)$$

где выражение для $\ddot{\tau}$ с учётом определения импеданса (66) и формулы для $J_n(t, \theta = \omega t)$ преобразуется к виду

$$\ddot{\tau} = -\frac{\eta I Z(\omega)}{(m_0 c^2/e)\gamma\beta^2} e^{i(n\omega_0\tau + \omega_{nc}t)} \int_{\dot{\tau}} g_n(\dot{\tau}) d\dot{\tau}. \quad (75)$$

На первый взгляд, уравнение (74) очень сложное, так как в него явно входит функция g_n , содержащая детали начального возмущения. Однако после интегрирования обеих его частей по $\dot{\tau}$ оно существенно упрощается. В результате получается дисперсионное уравнение относительно искомой частоты ω_{nc} :

$$1 = \frac{-\eta I}{(m_0 c^2/e)\gamma\beta^2} i \frac{Z(\omega)}{n\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'_0(\dot{\tau})}{(\omega_{nc}/n\omega_0) + \dot{\tau}} d\dot{\tau}. \quad (76)$$

Оно не зависит от g_n . Другими словами, на инкремент неустойчивости не влияет форма начального возмущения исходной плотности частиц в пучке. Фактически, искомая добавка к частоте ω_{nc} появляется в уравнении дважды — под интегралом и в аргументе импеданса $Z(n\omega_0 + \omega_{nc})$. Однако по предположению выполняется условие $|\omega_{nc}| \ll n\omega_0$, поэтому обычно величина импеданса берётся на частоте $n\omega_0$: $Z(\Omega_c) = Z(n\omega_0) = Z_n$. Обозначая далее

$$\Lambda = \frac{\eta I}{2\pi(m_0 c^2/e)\gamma\beta^2},$$

преобразуем дисперсионное уравнение к виду

$$1 = -\frac{2\pi}{\omega_0} \Lambda i \frac{Z_n}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'_0(\dot{\tau})}{(\omega_{nc}/n\omega_0) + \dot{\tau}} d\dot{\tau}. \quad (77)$$

2.3.5. Инкремент неустойчивости монохроматического пучка протонов

Рассмотрим сначала решение дисперсионного уравнения (77) в простейшем случае, когда разброс частиц по импульсам в пучке отсутствует, так что исходное распределение g_0 даётся выражением $g_0(\dot{\tau}) = \delta(\dot{\tau})/T_0$. Подставляя данное распределение в (77) и выполняя интегрирование по частям, сразу же получим решение дисперсионного уравнения в виде

$$\left(\frac{\omega_{nc}}{n\omega_0}\right)^2 = -\frac{\Lambda}{\eta} i \eta \frac{Z_n}{n}, \quad \text{где } \Lambda/\eta > 0. \quad (78)$$

Проанализируем теперь получившееся решение для нескольких характерных частных случаев.

1. Z_n/n — чисто активное сопротивление. При любом знаке n один из корней уравнения (78) имеет отрицательную мнимую часть — $Im \omega_{nc} < 0$. Пучок неустойчив всегда.

2. Продольное кулоновское расталкивание частиц в пучке, экранированном идеально проводящей гладкой вакуумной камерой ускорителя — выражение $iZ_n/n = Z_0 g/2\beta\gamma^2$ является действительной положительной величиной. Поэтому при энергии пучка ниже критической ($\gamma < \gamma_{tr}$, $\eta < 0$) пучок устойчив, а за критической энергией ($\gamma > \gamma_{tr}$, $\eta > 0$) имеет место так называемая неустойчивость отрицательной массы.

3. Z_n/n — чистая индуктивность (например, воздействие на пучок на низких частотах обсуждавшегося выше широкополосного импеданса, обусловленного неоднородностями вакуумной камеры ускорителя). Результат, обратный полученному в пункте 2; в частности, пучок устойчив при $\gamma > \gamma_{tr}$.

Следует отметить, что математический инструмент, использованный для решения задачи (уравнение Власова, дисперсионное соотношение, комплексная плоскость для частот и импедансов), очень эффективен. Однако за математикой теряется физический смысл процесса. Мы начали с предварительно сгруппированного пучка, когда вдоль его орбиты укладывается n длин волн. Взаимодействие этой предварительной группировки с продольным импедансом связи создаёт продольную силу с частотой, близкой к $n\omega_0$, которая, в свою очередь, подобно ВЧ-резонатору, воздействует на частицы. Полученное для ω_{nc} выражение (78) совпадает с выражением для синхротронной частоты Ω_0 , даваемым формулой (1.155), если в последней заменить $qV \sin \phi_s$ на $inZ_n(\omega)I$.

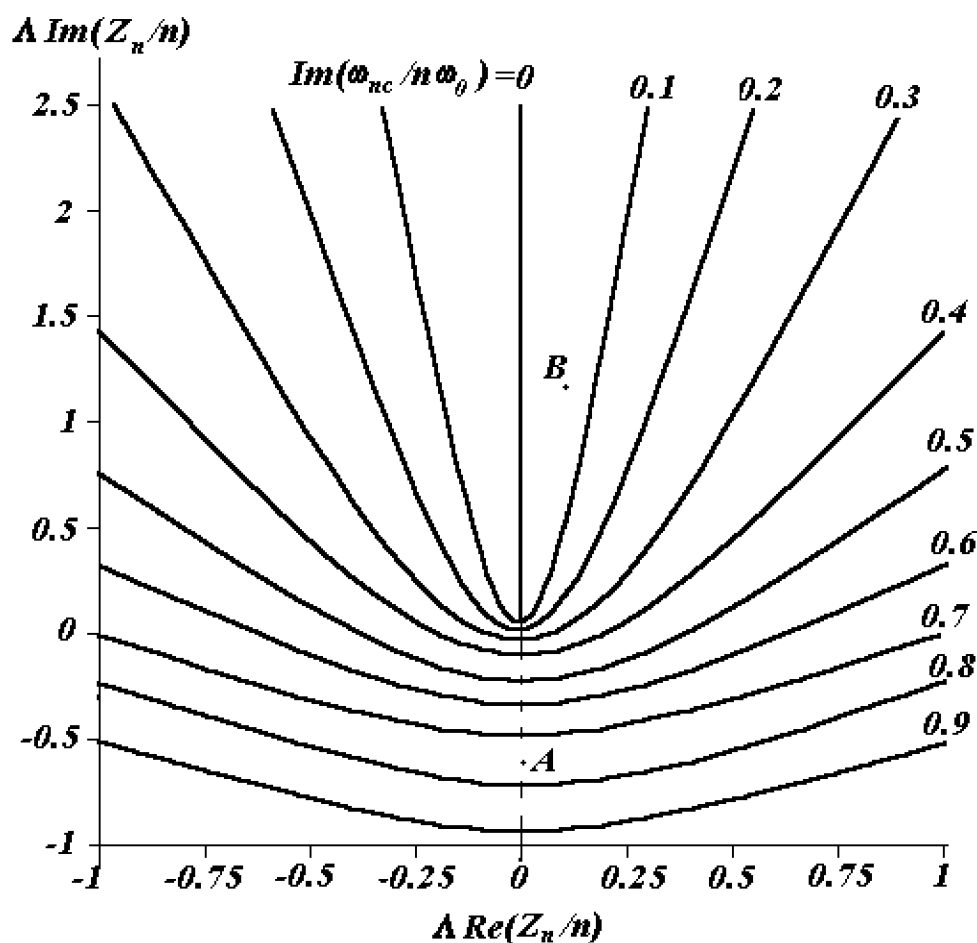


Рис. 25. Инкременты продольной неустойчивости монохроматического пучка на плоскости импедансов.

Результат решения дисперсионного уравнения (линии постоянных инкрементов) обычно представляют на комплексной плоскости импедансов (см. рис. 25). За исключением части вертикальной оси $u = \text{Im} \omega_{nc}/n\omega_0 > 0$, соответствующей продольному кулоновскому расталкиванию частиц в пучке, экранированном идеально проводящей гладкой камерой, при $\gamma < \gamma_{tr}$ или воздействию на пучок широкополосного индуктивного импеданса при $\gamma > \gamma_{tr}$, все точки данной диаграммы соответствуют неустойчивому движению частиц в пучке. Нанеся на диаграмму рис. 25 точку, координаты которой соответствуют реальной и мнимой частям импеданса Z_n/n , нетрудно получить, интерполируя кривые $\text{Im} \omega_{nc} = \text{const}$, значение инкремента неустойчивости пучка, развивающейся при взаимодействии пучка с данным импедансом. Таким образом, можно рассчитать скорость роста возмущения в пучке при заданной величине продольного импеданса, что является существенной частью необходимой информации. Однако с помощью этой диаграммы невозможно получить детали процесса развития неустойчивости.

Рассмотрим кратко, как развивается неустойчивость на фазовой плоскости $(\tau, \dot{\tau})$. Пусть импеданс чисто мнимый (точка А на рис. 25), тогда ВЧ-поле, создаваемое частицами, имеет частоту, точно равную $n\omega_0$, так как у ω_{nc} отсутствует реальная часть согласно формуле (78). При этом максимальная плотность заряда располагается в центре сепаратрисы, а постоянная времени развития неустойчивости равна периоду синхротронных колебаний частиц в этих сепаратрисах (см. рис. 26а).

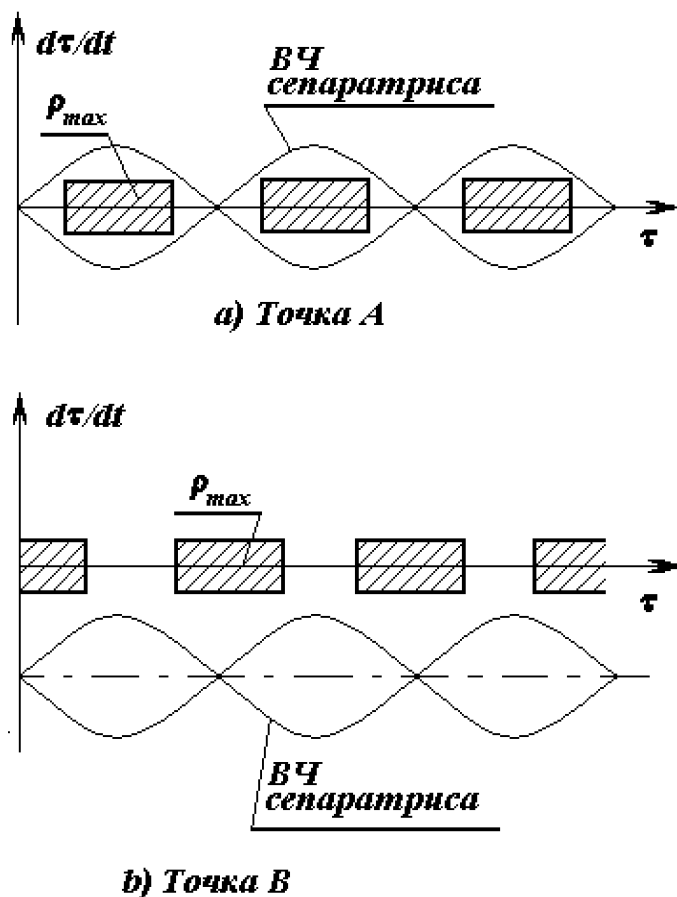


Рис. 26. Развитие продольной неустойчивости пучка на фазовой плоскости.

В точке B диаграммы рис. 25 импеданс имеет как реальную, так и мнимую части. ВЧ-сепаратрисы соответствуют частоте $\Omega_c = n\omega_0 + Re \omega_{nc}$. Монохроматичный вначале пучок начинает извиваться вдали от центра сепаратрис (см. рис. 26б). Реальная часть Z_n даёт непосредственный вклад в инкремент неустойчивости:

$$\left(\frac{\omega_{nc}}{n\omega_0}\right)^2 = -i\Lambda \frac{Z_n}{n}; \quad Re \frac{Z_n}{n} \sim \frac{Im \omega_{nc}}{n^2}.$$

Отсюда нетрудно сделать следующий вывод: сопротивление стенки камеры намного менее опасно для пучка по сравнению с сопротивлением широкополосного импеданса вблизи частоты отсечки вакуумной камеры. В общем случае продольная неустойчивость носит микроволновый характер, в результате чего пучок разбивается на сотни и тысячи минигустков вдоль орбиты ускорителя.

2.3.6. Решение дисперсионного уравнения при наличии разброса частиц по импульсам в пучке

Разброс частиц по импульсам в пучке является для неустойчивости стабилизирующим фактором. С ним связано понятие порога неустойчивости, конкретная величина которого зависит, вообще говоря, от вида исходной функции распределения $g_0(\dot{\tau})$. В качестве примера рассмотрим параболическое распределение частиц по импульсам в пучке, для которого

$$g_0(\dot{\tau}) = \frac{3\omega_0}{8\pi\dot{\tau}_L} \left(1 - \frac{\dot{\tau}^2}{\dot{\tau}_L^2}\right), \quad \text{где } |\dot{\tau}| \leq \dot{\tau}_L. \quad (79)$$

В конечной формуле для порога неустойчивости обычно используется не полуширина распределения частиц по основанию $\dot{\tau}_L$, а полная ширина на полувывоте распределения $\dot{\tau}_0$. В случае распределения (79) связь между указанными параметрами следующая: $\dot{\tau}_0 = \sqrt{2}\dot{\tau}_L = |\eta|(\Delta p/p)_0$, где величины с индексом 0 обозначают полную ширину распределения на полувывоте. С учётом сказанного, можно представить дисперсионное уравнение (77) в виде

$$1 = \Lambda_c i \frac{Z_n}{n} S, \quad (80)$$

где

$$\Lambda_c = \frac{3I}{2\pi\eta(m_0c^2/e)\gamma\beta^2(\Delta p/p)_0^2}; \quad S = \int_{-1}^1 \frac{y dy}{y + (\omega_{nc}/n\omega_0\dot{\tau}_L)}.$$

Уравнение (80) решается путём построения диаграммы, подобной представленной на рис. 25 в предыдущем разделе. С этой целью уравнение (80), имеющее комплексные коэффициенты, заменяется парой уравнений с действительными коэффициентами

$$\Lambda_c Re \left(\frac{Z_n}{n}\right) = Im(S^{-1}); \quad \Lambda_c Im \left(\frac{Z_n}{n}\right) = -Re(S^{-1}). \quad (81)$$

Далее, при фиксированном значении инкремента неустойчивости $Im \omega_{nc}$ изменяется реальная часть искомой частоты ω_{nc} , и каждый раз вычисляются соотношения (81). В результате такого расчёта на комплексной плоскости Z_n/n строятся линии постоянных инкрементов $u = const$, где

$$u = Im \left(\frac{\omega_{nc}}{n\omega_0\dot{\tau}_L}\right) = Im \left(\frac{\sqrt{2}\omega_{nc}}{n\omega_0|\eta|(\Delta p/p)_0}\right),$$

представленные на рис. 27. Порог неустойчивости даётся кривой $u = 0$, состоящей из замкнутой кривой, охватывающей начало координат, и из части положительной горизонтальной полуоси. Пороговая кривая существенным образом зависит от краёв распределения. Резкие края распределения уменьшают площадь, охватываемую пороговой кривой. Небольшое скругление краёв распределения делает пороговую кривую более гладкой. Если хвосты длинные (например, гауссово распределение), то пороговый контур вытягивается в направлении положительной горизонтальной полуоси.

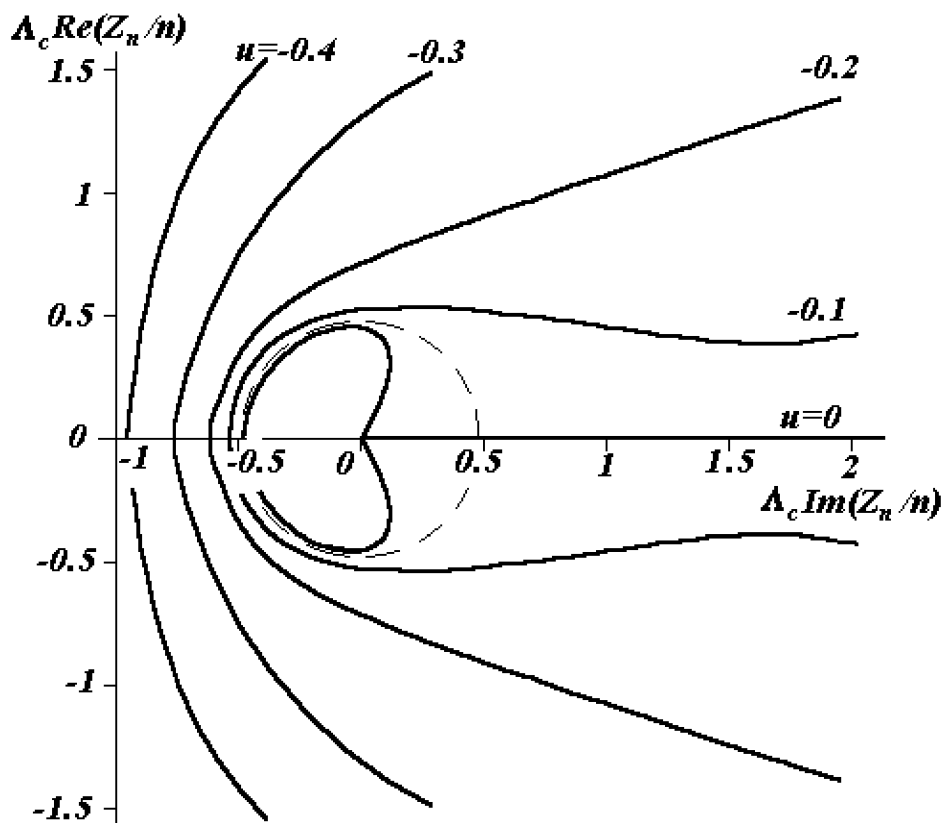


Рис. 27. Характеристики продольной неустойчивости с учётом разброса частиц по импульсам в пучке.

Для аналитических оценок порога неустойчивости однородного пучка протонов обычно используется круговой контур — $\Delta_c |Z_n/n| < 0.5$, или в явном виде

$$\left| \frac{Z_n}{n} \right| \leq \frac{m_0 c^2}{e} \frac{\gamma \beta^2 |\eta|}{I} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_0^2. \quad (82)$$

Последнее выражение широко используется при расчёте допустимой величины продольного импедаса связи в кольцевых ускорителях протонов.

2.4. ПОПЕРЕЧНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОРОДНОГО ПУЧКА ПРОТОНОВ

В предыдущем разделе было показано, что когерентные колебания частиц в продольном направлении возникают за счёт продольной модуляции линейной плотности заряда, которая создаёт электромагнитное поле вдоль оси пучка. Если вернуться к примеру пучка, экранированного круглой идеально проводящей вакуумной камерой, то это собственное продольное поле ассоциируется с обратным током или током изображения I_w , текущим в противоположном направлении по отношению к направлению движения пучка и равномерно распределённым по внутренней стенке камеры.

В случае поперечных колебаний (для определённости будем рассматривать x направление) возмущение состоит в небольшом поперечном смещении пучка. Из-за фокусировки внешним магнитным полем такой пучок колеблется как целое, двигаясь вдоль орбиты ускорителя. Полный ток I_w , текущий в стенке камеры, имеет ту же самую величину, что и в рассмотренном выше примере, но его распределение в поперечном сечении стенки камеры больше не является равномерным.

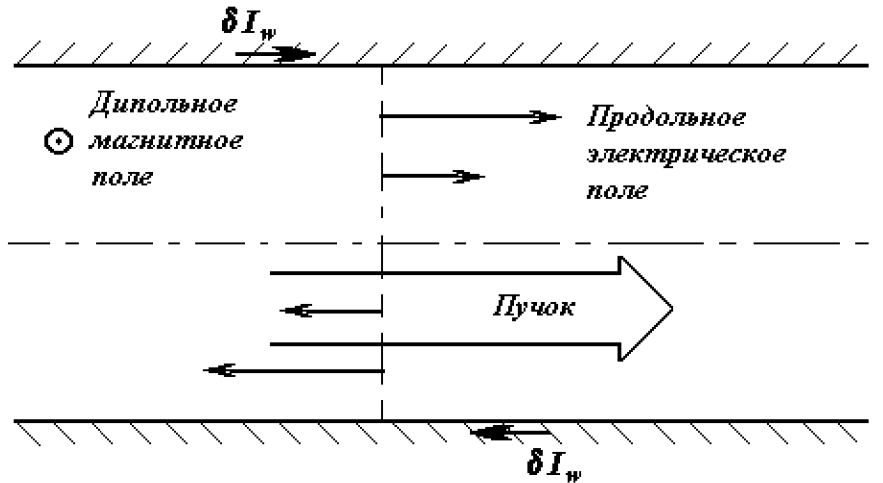


Рис. 28. Электромагнитное поле, возбуждаемое пучком при его смещении относительно центра вакуумной камеры.

В отличие от предыдущего случая, вдоль стенки камеры в противоположных направлениях протекают разностные токи, равные $\pm \delta I_w$. Подобные токи требуют существования в пределах апертуры вакуумной камеры продольного электрического поля, величина которого изменяется в зависимости от координаты x по линейному закону. При этом также возникает дипольное магнитное поле, которое может как раскачать пучок, так и стабилизировать его. Сказанное иллюстрируется рис. 28, где показаны разностные токи, текущие вдоль камеры, а также электрическое и магнитное поля, возбуждаемые пучком протонов при его смещении относительно центра камеры.

2.4.1. Поперечное движение одной частицы

Невозмущённое поперечное движение частицы в горизонтальном направлении описывается уравнением

$$\ddot{x} + \dot{\phi}^2 x = 0, \quad (83)$$

где $\dot{\phi} = Q\omega$ — набег фазы бетатронных колебаний в единицу времени, ω — частота обращения частицы. В гладком приближении зависимость поперечного положения частицы от времени даётся выражением

$$x(t) = \hat{x} \cos \phi(t) = \hat{x} \cos \left(\int_0^t \dot{\phi} dt + \phi_0 \right).$$

При анализе устойчивости поперечного движения частиц в пучке удобно использовать вместо (x, \dot{x}) другую пару канонических переменных (ϕ, \hat{x}) : $\dot{\phi} = d\phi/dt$, $\hat{x} = \sqrt{x^2 + (\dot{x}/\dot{\phi})^2}$, причём амплитуда колебаний \hat{x} является инвариантом для невозмущённого движения частицы. Далее учтём, что частота обращения ω и бетатронная частота Q зависят, вообще говоря, как от импульса частицы p , так и от амплитуды бетатронных колебаний. Считая поэтому $\omega = \omega(p)$ и $Q = Q(p, \hat{x})$, разложим их в ряд по степеням $\Delta p/p_0$ относительно равновесных значений $\omega = \omega_0$ и $Q = Q_0$:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \left. \frac{\partial \omega}{\partial p} \right|_0 \Delta p + \dots = \omega_0 \left(1 - \eta \frac{\Delta p}{p_0} + \dots \right), \\ Q &= Q_0 + \left. \frac{\partial Q}{\partial p} \right|_0 \Delta p + \dots = Q_0 + \xi \frac{\Delta p}{p_0} + \dots \end{aligned}$$

Учитывая также, что невозмущённое продольное движение описывается выражением: $\tau = \tau_0 + \dot{\tau}t$, где $\dot{\tau} = \eta \Delta p/p_0$, имеем

$$\dot{\phi} = Q_0 \omega_0 (1 - \dot{\tau}) + \omega_\xi \dot{\tau} + \Delta \dot{\phi}(\hat{x}). \quad (84)$$

В (84) $\omega_\xi = \omega_0 \xi / \eta$, а через $\Delta \dot{\phi}(\hat{x})$ обозначена зависимость бетатронной частоты от амплитуды поперечных колебаний частицы. Интегрируя последнюю формулу, получаем зависимость фазы бетатронных колебаний от времени t

$$\phi(t) = \phi_0 + Q_0 \omega_0 (t - \tau) + \omega_\xi \tau + \Delta \dot{\phi}(\hat{x})t. \quad (85)$$

Теперь мы можем перейти к рассмотрению возмущённого движения частицы, учтя поперечную силу, создаваемую электромагнитным полем пучка. В переменных (x, \dot{x}) возмущённое уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + \dot{\phi}^2 x = \frac{e}{m_0 \gamma} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_\perp (t, \theta = \omega_0(t - \tau)). \quad (86)$$

Чтобы перейти к координатам (ϕ, \hat{x}) , преобразуем $\dot{\hat{x}}$ к виду

$$\dot{\hat{x}} = \frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[x^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\dot{\phi}} \right)^2 \right]^{1/2} = -\frac{\sin \phi}{\dot{\phi}} (\ddot{x} + \dot{\phi}^2 x), \quad (87)$$

откуда получается дифференциальное уравнение относительно амплитуды бетатронных колебаний частицы

$$\dot{\hat{x}} = -\frac{\sin \phi}{\dot{\phi}} \frac{e}{m_0 \gamma} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_\perp (t, \theta = \omega_0(t - \tau)). \quad (88)$$

Для наблюдения за поперечными колебаниями пучка в ускорителе используются разрезные пикап-электроды, на которых наводятся электрические сигналы при смещении

центра масс пучка относительно электрических центров пикапов. Данные сигналы представляют собой произведения продольной плотности заряда на поперечное смещение пучка.

Пусть на азимуте θ ускорителя располагается разрезной пикап-электрод, фиксирующий поперечный сигнал $j_{\perp}(t, \theta)$ от частицы, движущейся со смещением относительно центра пикапа, равный по определению

$$j_{\perp}(t, \theta) = x(t)j(t, \theta) = \hat{x} \cos \phi j(t, \theta). \quad (89)$$

Сигнал $j_{\perp}(t, \theta)$ представляет собой последовательность импульсов, амплитуда которых изменяется в соответствии с изменением поперечного смещения частицы в моменты её пролёта через пикап-электрод $x(t)$. Используя соотношение (59) для продольного сигнала $j(t, \theta)$ и уравнение (85) для фазы бетатронных колебаний ϕ , получаем

$$j_{\perp}(t, \theta) = \frac{e\omega_0 \hat{x}}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(\omega_0 \tau_0 + \theta)} [e^{i(\omega_n^+ t + \phi_0)} + e^{i(\omega_n^- t - \phi_0)}], \quad (90)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_n^+ &= (n + Q)\omega = (n + Q_0)\omega_0 - [(n + Q_0)\omega_0 - \omega_{\xi}] \dot{\tau} + \Delta \dot{\phi}(\hat{x}), \\ \omega_n^- &= (n - Q)\omega = (n - Q_0)\omega_0 - [(n - Q_0)\omega_0 + \omega_{\xi}] \dot{\tau} - \Delta \dot{\phi}(\hat{x}). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом случае спектр состоит из бесконечно острых линий на частотах ω_n^+ и ω_n^- .

2.4.2. Поперечный сигнал от пучка частиц

Введём функцию распределения частиц в пучке с помощью выражения

$$F(\phi, \hat{x}, \tau, \dot{\tau}, t) = g_0(\dot{\tau}) f_0(\hat{x}) + g_n(\dot{\tau}) f_n(\phi, \hat{x}) e^{i(n\omega_0 \tau + \omega_{nc} t)}, \quad (91)$$

где первый член, равный $F_0 = g_0(\dot{\tau}) f_0(\hat{x})$, представляет собой стационарную часть распределения, которая не даёт вклада в поперечный сигнал пучка. Функции g_0 и f_0 нормированы следующим образом:

$$\int_{\dot{\tau}} g_0(\dot{\tau}) d\dot{\tau} = \frac{\omega_0}{2\pi}; \quad \int_{\hat{x}} f_0(\hat{x}) \hat{x} d\hat{x} = \frac{1}{2\pi}.$$

Второй член в формуле (91) является возмущением функции распределения. Он содержит поперечное смещение пучка, которое предполагается имеющим вид волны, n периодов которой укладывается вдоль периметра машины. Предполагается также, что данное возмущение не движется синхронно с пучком, а имеет когерентный частотный сдвиг $\Delta\omega_{nc}$. Как и в предыдущем разделе, когерентная частота ω_{nc} считается комплексной, причём её мнимая часть определяет устойчивость распределения, а величина её реальной части близка к $Q_0\omega_0$.

Зная функцию распределения частиц F и поперечный сигнал от одной частицы, можно рассчитать поперечный сигнал от пучка $J_{\perp}(t, \theta)$, выполнив интегрирование

$$J_{\perp}(t, \theta) = N \int F(\phi, \hat{x}, \tau, \dot{\tau}, t) j_{\perp}(t, \theta) d\phi \hat{x} d\hat{x} d\tau d\dot{\tau} =$$

$$\frac{Ne\omega_0}{2\pi} \int g_n(\dot{\tau}) f_n(\phi, \hat{x}) e^{in\omega_0\tau + i\omega_{nc}t} \hat{x}^2 \cos \phi e^{in[\omega_0(t-\tau) - \theta]} d\phi d\hat{x} d\tau d\dot{\tau} = \frac{2\pi IS}{\omega_0} e^{i[(n\omega_0 + \omega_{nc})t - n\theta]}, \quad (92)$$

где через S обозначено следующее выражение:

$$S = \int g_n(\dot{\tau}) f_n(\phi, \hat{x}) \hat{x}^2 \cos \phi d\phi d\hat{x} d\dot{\tau}, \quad (93)$$

в то время как спектр данного сигнала $J_{\perp}(\Omega, \theta)$ представляет собой единственную спектральную линию,

$$J_{\perp}(\Omega, \theta) = \frac{2\pi IS}{\omega_0} e^{-in\theta} \delta\left(\Omega - (n\omega_0 + \omega_{nc})\right). \quad (94)$$

2.4.3. Поперечный импеданс связи

Поперечный импеданс связи Z_{\perp} определяется аналогично введённому в предыдущем разделе продольному импедансу $Z(\omega)$. Импеданс Z_{\perp} связывает поперечное электромагнитное поле, возбуждаемое пучком, с поперечным сигналом от пучка на данной частоте

$$[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_{\perp}(t, \theta) = \frac{i\beta}{2\pi R_0} Z_{\perp} J_{\perp}(t, \theta), \quad (95)$$

причём поперечный сигнал J_{\perp} измеряется в А·м, а импеданс Z_{\perp} — в Ом/м. Если спектр поперечного сигнала рассредоточен в некотором частотном диапазоне, определение импеданса обобщается на этот случай с помощью формулы, аналогичной формуле (67) для продольного импеданса связи

$$[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_{\perp}(t, \theta) = \frac{i\beta}{2\pi R_0} \int_{-\infty}^{\infty} Z_{\perp}(\omega) J_{\perp}(\omega, \theta) e^{i\omega t} d\omega. \quad (96)$$

В общем случае невозможно получить из уравнений Максвелла аналитическое выражение для поперечного импеданса связи в силу тех же соображений, которые были высказаны при рассмотрении продольного импеданса. Однако в наиболее простом случае, когда круглый пучок радиуса a движется в бесконечной металлической трубе радиуса b удаётся относительно легко рассчитать поперечное электромагнитное поле, возникающее при смещении его центра тяжести относительно центра трубы, а следовательно, и величину Z_{\perp} .

Так как реальная часть поперечного импеданса связи гладкой камеры на низких частотах достигает большой величины, то она является одной из основных причин возникновения поперечной неустойчивости пучка. Остановимся поэтому более подробно на расчёте поперечного импеданса для случая цилиндрической гладкой вакуумной камеры ускорителя.

На рис. 29 изображён цилиндрический пучок, совершающий малые поперечные колебания внутри гладкой цилиндрической вакуумной камеры. При смещении центра пучка в радиальном направлении на величину x_0 возникает возмущение исходной плотности заряда пучка, которое можно представить как поверхностный заряд σ , распределённый на границе пучка $r = a$ в соответствии с выражением $\sigma = \rho_0 x_0 \cos \phi \delta(r - a)$, где ρ_0 —

исходная объёмная плотность заряда пучка. Так как на практике основной интерес представляют электромагнитные волны, длины которых велики по сравнению с поперечным размером вакуумной камеры ($\omega/c \ll 1/b$, $\partial^2/\partial s^2 \ll \partial^2/\partial x^2 \sim 1/b^2$), то потенциал Φ может быть вычислен путём решения уравнения Пуассона:

$$\Delta_2 \Phi = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} = -\frac{\rho_0 x_0}{\epsilon_0} \cos \phi \delta(r - a). \quad (97)$$

Рассмотрим сначала идеально проводящую вакуумную камеру ускорителя. При этом потенциал Φ удовлетворяет нулевому условию на стенке камеры $\Phi(b) = 0$. Кроме этого, должна быть обеспечена непрерывность потенциала на границе пучка $\Phi_1(a) = \Phi_2(a)$, где Φ_1 и Φ_2 — соответственно решения уравнения (97) внутри и вне пучка; производная же от потенциала по r , как нетрудно показать, из-за поверхностного заряда σ испытывает при $r = a$ скачок: $\partial\Phi_1(a)/\partial r - \partial\Phi_2(a)/\partial r = (\rho_0 x_0/\epsilon_0) \cos \phi$.

Решения уравнения Пуассона (97) ищем в виде $\Phi_1 = Cr \cos \phi$ внутри пучка и $\Phi_2 = C_1 r \cos \phi + (C_2/r) \cos \phi$ — вне пучка. Постоянные C , C_1 и C_2 определяются из приведенных выше граничных условий, приводящих к системе из трёх алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 b^2 + C_2 &= 0; \\ C - C_1 + \frac{C_2}{a^2} &= \frac{\rho_0 x_0}{\epsilon_0}; \\ (C - C_1) a^2 - C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Определяя отсюда постоянную C , получаем для потенциала Φ_1 решение в виде

$$\Phi_1 = \frac{\rho_0 x_0 x}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right). \quad (98)$$

Учитывая далее, что $E_x = -\partial\Phi_1/\partial x$, получаем для электрического поля внутри пучка следующую формулу

$$E_x = -\frac{\rho_0 x_0}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right). \quad (99)$$

Аналогичным образом рассчитывается магнитное поле B_z , возникающее при радиальном смещении пучка относительно центра вакуумной камеры ускорителя на величину x_0 . При этом отличие уравнения Пуассона для продольной компоненты A векторного потенциала от уравнения (97) состоит лишь в умножении правой части последнего на коэффициент, равный $\beta c \mu_0 \epsilon_0 = \beta/c$, а граничные условия для потенциалов A и Φ совпадают. Так как $B_z = \partial A/\partial x = (\beta/c) \partial \Phi/\partial x = -(\beta/c) E_x$, можно записать поперечное

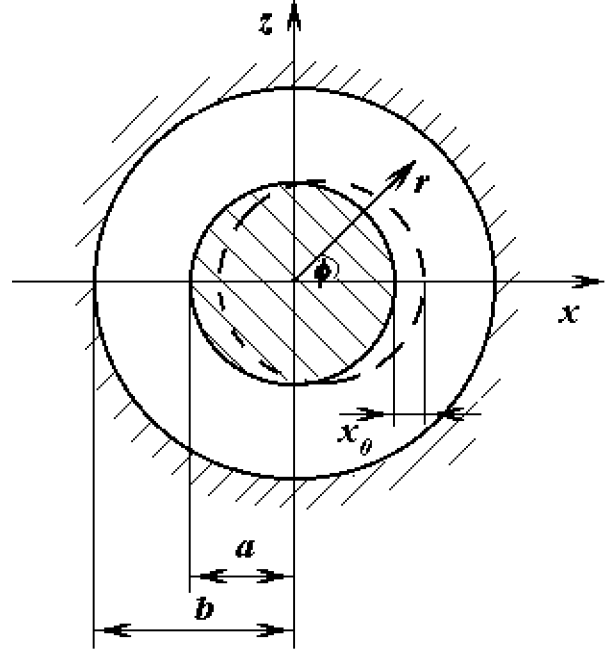


Рис. 29. К вычислению поперечного импеданса гладкой вакуумной камеры.

электромагнитное поле, возникающее при смещении пучка относительно центра идеально проводящей вакуумной камеры в виде

$$[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_{\perp}(t, \theta) = \frac{i\beta}{2\pi R_0} \left[\frac{iR_0 Z_0}{\beta^2 \gamma^2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \right] J_{\perp}(t, \theta). \quad (100)$$

Отметим, что при переходе от формулы (99) к (100) использовались соотношения $\rho_0 = I/(\beta c \pi a^2)$ и $J_{\perp} = I x_0$. Сравнивая формулу (100) с определением поперечного импеданса связи (96), можно видеть, что импедансом Z_{\perp} является выражение, заключённое в квадратные скобки. В рассматриваемом здесь случае идеально проводящей вакуумной камеры и учёте только длинноволновых возмущений, импеданс Z_{\perp} чисто мнимый и не зависит от частоты.

В реальной вакуумной камере ускорителя электромагнитное поле, возбуждаемое пучком протонов, проникает в стенку на глубину скин-слоя δ . Уравнение для продольной компоненты векторного потенциала A на границе при $r = b$ можно получить, воспользовавшись условием Леонтовича, связывающим продольную компоненту электрического поля E_s с касательной компонентой напряжённости магнитного поля,

$$E_s(b) = (1 + i) \frac{\mu \omega \delta}{2c} Z_0 H_{\phi}(b), \quad (101)$$

где μ — относительная магнитная проницаемость стенки камеры, полагаемая в дальнейшем равной единице. Учитывая связь вихревого электрического поля E_s и потенциала A , $E_s = -\partial A / \partial t$, а также выражение для касательной компоненты магнитного поля $B_{\phi} = \mu_0 H_{\phi} = -\partial A / \partial r$, получаем вместо (101) уравнение для потенциала A на стенке камеры (при $r = b$):

$$A + \frac{(1 - i)\delta}{2} \frac{\partial A}{\partial r} = 0. \quad (102)$$

Так как величина коэффициента перед производной в формуле (102) существенно меньше радиуса вакуумной камеры b , то формально последнее выражение можно представить как разложение в ряд потенциала A в граничном условии $A(b + (1 - i)\delta/2) = 0$. Следовательно, для того чтобы найти поправку к импедансу Z_{\perp} , связанную с конечной проводимостью стенки камеры, достаточно в формуле для B_z заменить b на $b + (1 - i)\delta/2$, а затем соответствующий член формулы разложить в ряд по малому параметру $\sim \delta/b$. В результате поперечный импеданс камеры с учётом конечной проводимости стенки камеры примет вид

$$Z_{\perp} = -iR_0 Z_0 \left[\frac{1}{\beta^2 \gamma^2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) - (1 - i) \frac{\delta}{b^3} \right]. \quad (103)$$

Необходимо отметить, что реальная часть импеданса Z_{\perp} , даваемая формулой (103), справедлива в случае, когда глубина скин-слоя δ меньше толщины стенки камеры l . Если же глубина скин-слоя превышает толщину стенки ($\delta > l$), то в формуле для $Re Z_{\perp}$ необходимо заменить δ на $l\omega_l/\omega$, где ω_l — частота, при которой $\delta = l$. Таким образом, на высоких частотах $Re Z_{\perp} \sim 1/\sqrt{\omega}$, а на низких (при $\delta > l$) — $Re Z_{\perp} \sim 1/\omega$.

В случае гладкой вакуумной камеры существует связь между реальными частями поперечного и продольного импедансов связи. Это нетрудно показать, воспользовавшись условием Леонтовича (101) и определением продольного импеданса связи $Z = U/I$, где $U = 2\pi R_0 E_s$, $I = 2\pi b H_{\phi}$. В результате имеем

$$Re Z = \frac{2\pi R_0}{2\pi b} \frac{Re E_s}{H_{\phi}} = \frac{R_0}{b} \zeta,$$

где $\zeta = \rho/\delta$ для толстой стенки и $\zeta = \rho/l$ — в случае тонкой стенки (здесь ρ — удельное сопротивление материала стенки камеры в Ом·м). Сравнивая получившееся выражение для $Re Z$ с $Re Z_{\perp}$ (см. формулу (103)), находим

$$Re Z_{\perp} = \frac{2c}{b^2\omega} Re Z(\omega). \quad (104)$$

Строго говоря, формула (104) применима лишь в случае гладкой вакуумной камеры ускорителя. Однако, как показывают результаты измерений на ускорителях, область применимости данной формулы оказывается существенно более широкой.

Рассматривая вакуумную камеру ускорителя, мы считали её гладкой и не учитывали ни изменений её поперечного сечения, ни других неоднородностей. Для их учёта так же, как в случае продольного импеданса связи, вводят обычно широкополосный резонатор с добротностью $Q \sim 1$. Нет никаких оснований считать, что параметры этих резонаторов связаны друг с другом. Однако измерения, проведенные на низких частотах, показывают, что для них оказывается справедливой формула (104), полученная для гладкой вакуумной камеры ускорителя.

Выше отмечалось, что величина продольного широкополосного импеданса ограничена пределами: $0,2 \text{ Ом} \leq |Z_n/n| \leq 50 \text{ Ом}$, следовательно значения поперечного широкополосного импеданса лежат в диапазоне МОм/м. Из формулы (104) видно также, что большие машины с узкой вакуумной камерой подвержены поперечным неустойчивостям. С другой стороны, в больших машинах легче получить малую величину $|Z_n/n|$. С широкополосным импедансом связаны: а) положительная индуктивность на низких частотах, конкурирующая с отрицательной индуктивностью из-за кулоновского расталкивания частиц в пучке; б) резистивный вклад вблизи частоты отсечки вакуумной камеры; в) ёмкость на высоких частотах.

В поперечный импеданс связи дают также вклад высокодобротные резонаторы, основными источниками которых являются ускоряющая система и устройства, используемые для диагностики пучка. Необходимо только отметить существенную разницу между высокодобротными резонаторами, дающими отклик на продольные и на поперечные электромагнитные возмущения пучка. Так как продольное движение частиц происходит медленно по сравнению с частотой обращения пучка, требуется много оборотов для одного синхротронного колебания, и в большинстве случаев может быть игнорирован тот факт, что некоторые из источников полей (например, ВЧ-резонаторы) локализованы. В случае поперечных колебаний такая аппроксимация не годится, так как за один оборот частица совершает Q колебаний, и нельзя пренебрегать амплитудной модуляцией функций Флойке. Мы, однако, продолжим рассмотрение гладкой машины с однородной фокусировкой, введя понятие эффективного поперечного импеданса связи:

$$Z_{\perp \text{ eff}} = \frac{Q_0}{R_0} (\beta_{x,z} Z_{\perp})_{\text{local}}. \quad (105)$$

Например, узкие поперечные моды ВЧ-резонаторов меньше влияют, если резонаторы располагаются в прямолинейном промежутке с малыми значениями $\beta_{x,z}$.

2.4.4. Дисперсионное уравнение

В силу теоремы Лиувилля полная производная от функции распределения частиц в четырёхмерном фазовом пространстве $F(\phi, \hat{x}, \tau, \hat{t}, t)$ равна нулю, что можно записать в

виде

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial F}{\partial \hat{x}} \dot{\hat{x}} + \frac{\partial F}{\partial \tau} \dot{\tau} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\tau}} \ddot{\tau} = 0. \quad (106)$$

Используя дифференциальное уравнение (88) для амплитуды колебаний \hat{x} , представление распределения F в виде суммы исходного стационарного распределения и малой возмущающей добавки с помощью формулы (91), а также определение поперечного импеданса связи Z_{\perp} (95), можно получить для слагаемых, входящих в уравнение (106), следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= i\omega_{nc} g_n(\dot{\tau}) f_n(\phi, \hat{x}) e^{i[(n\omega_0 + \omega_{nc})t - n\theta]}, \\ \frac{\partial F}{\partial \phi} \dot{\phi} &= \dot{\phi} g_n(\dot{\tau}) \frac{\partial f_n(\phi, \hat{x})}{\partial \phi} e^{i[(n\omega_0 + \omega_{nc})t - n\theta]}, \\ \frac{\partial F}{\partial \hat{x}} \dot{\hat{x}} &= g_0(\dot{\tau}) \frac{df_0(\hat{x})}{d\hat{x}} \frac{\sin \phi}{\dot{\phi}} \frac{ISiZ_{\perp}(n)}{cm_0\gamma/e} e^{i[(n\omega_0 + \omega_{nc})t - n\theta]} + \text{члены второго порядка малости}, \\ \frac{\partial F}{\partial \tau} \dot{\tau} &= in\omega_0 \dot{\tau} g_n(\dot{\tau}) f_n(\phi, \hat{x}) e^{i[(n\omega_0 + \omega_{nc})t - n\theta]}, \end{aligned}$$

$\ddot{\tau} = 0$ — продольное электрическое поле отсутствует.

Выражение для S определено ранее формулой (93). Подставляя приведенные здесь соотношения в уравнение (106) и пренебрегая членами второго порядка малости, получаем линейное дифференциальное уравнение относительно возмущения $f_n(\phi, \hat{x})$,

$$i(n\omega_0 \dot{\tau} + \omega_{nc}) g_n f_n + \dot{\phi} g_n \frac{\partial f_n}{\partial \phi} = -g_0 \frac{df_0}{d\hat{x}} \frac{\sin \phi}{\dot{\phi}} \frac{ISiZ_{\perp}(n)}{cm_0\gamma/e}, \quad (107)$$

которое является промежуточным. Для того чтобы удовлетворить ему, произведение $f_n g_n$ должно иметь вид

$$g_n(\dot{\tau}) f_n(\phi, \hat{x}) = h(\hat{x}, \dot{\tau}) \left[\cos \phi - i \frac{\sin \phi}{\dot{\phi}} (n\omega_0 \dot{\tau} + \omega_{nc}) \right],$$

что можно, например, проверить непосредственной подстановкой последнего выражения в уравнение (107), которое при этом упрощается и принимает следующий вид:

$$h(\hat{x}, \dot{\tau}) = -\frac{cISiZ_{\perp}(n)}{\gamma(m_0c^2/e)} \frac{g_0(\dot{\tau}) f_0'(\hat{x})}{(n\omega_0 \dot{\tau} + \omega_{nc})^2 - \dot{\phi}^2}. \quad (108)$$

Учитывая определение S ,

$$S = \int g_n f_n \hat{x}^2 \cos \phi d\phi d\hat{x} d\tau = \pi \int h(\hat{x}, \dot{\tau}) \hat{x}^2 d\hat{x} d\dot{\tau},$$

умножим обе стороны уравнения (107) на $\pi \hat{x}^2$, а затем проинтегрируем их по \hat{x} и $\dot{\tau}$. В результате получим окончательный вид дисперсионного уравнения:

$$1 = -\frac{\pi Ic}{\gamma(m_0c^2/e)} iZ_{\perp}(n) \int \frac{g_0(\dot{\tau}) f_0'(\hat{x}) \hat{x}^2}{(n\omega_0 \dot{\tau} + \omega_{nc})^2 - \dot{\phi}^2} d\dot{\tau} d\hat{x}. \quad (109)$$

2.4.5. Анализ дисперсионного уравнения в отсутствие разброса бетатронных частот в пучке

Рассмотрим моноэнергетический пучок протонов, в котором частота бетатронных колебаний частиц не зависит от их амплитуды. Математически эти условия можно записать в виде соотношений $g_0(\dot{\tau}) = (\omega_0/2\pi)\delta(\dot{\tau})$ и $\dot{\phi} = Q_0\omega_0$. С учётом этих условий, а также очевидного соотношения

$$\int f'_0(\hat{x})\hat{x}^2 d\hat{x} = -2 \int f_0(\hat{x})\hat{x} d\hat{x} = -1/\pi$$

дисперсионное уравнение (296) сводится к квадратному уравнению

$$\omega_{nc}^2 - Q_0^2\omega_0^2 = \frac{c\omega_0 I}{2\pi(m_0c^2/e)\gamma} iZ_{\perp}(n). \quad (110)$$

Видно, что уравнение (110) имеет два решения (верхние и нижние боковые частоты) — ω_{nc}^{\pm} , реальные и мнимые части которых равны, с учётом малости правой части этого уравнения по сравнению с $Q_0\omega_0$,

$$Re \omega_{nc}^{\pm} = \pm \left(Q_0\omega_0 - \frac{cI}{4\pi Q_0(m_0c^2/e)\gamma} Im Z_{\perp}((n \pm Q_0)\omega_0) \right); \quad (111)$$

$$Im \omega_{nc}^{\pm} = \pm \frac{cI}{4\pi Q_0(m_0c^2/e)\gamma} Re Z_{\perp}((n \pm Q_0)\omega_0). \quad (112)$$

Отметим, что, строго говоря, когерентный частотный сдвиг должен быть включён в частоту сигнала при расчёте импеданса $Z_{\perp}(n)$. Однако величина этой поправки чрезвычайно мала, и мы ею пренебрегаем подобно тому, как это было сделано при вычислении продольного импеданса в предыдущем разделе.

Как видно из формулы (112) для инкремента неустойчивости, поперечное движение пучка, в котором отсутствует разброс бетатронных частот, неустойчиво всегда, если импеданс Z_{\perp} имеет резистивную часть. Напротив, если поперечный импеданс связи чисто мнимый (например, поперечное кулоновское расталкивание частиц в пучке, либо чистая индуктивность или ёмкость), то пучок стабилен. Таким образом, в поперечном движении частиц отсутствует аналог неустойчивости отрицательной массы, упоминавшейся в предыдущем разделе.

Импеданс $Z_{\perp}(\omega)$ обладает следующими свойствами: $Re Z_{\perp}(\omega) = -Re Z_{\perp}(-\omega)$, $Im Z_{\perp}(\omega) = Im Z_{\perp}(-\omega)$. Так как в нашем случае неустойчивость пучка возникает при $Im \omega_{nc} < 0$, то, согласно (112), для частот $\omega = (n + Q_0)\omega_0$ неустойчивыми оказываются гармоники возмущений с номерами $n < -Q_0$, а для $\omega = (n - Q_0)\omega_0$ — гармоники с номерами $n > Q_0$, что иллюстрируется рис. 30, где схематически изображена реальная часть поперечного импеданса гладкой вакуумной камеры ускорителя. Из рис. 30 видно, что поперечная неустойчивость однородного пучка наиболее опасна на низких частотах из-за большой величины резистивного импеданса, превышающей сопротивление широкополосного резонатора, обусловленного неоднородностью камеры. В частности, чрезвычайно важным оказывается выбор значения частоты бетатронных колебаний Q_0 . Если, например, значение бетатронной частоты выбрать близким к целому числу, но превышающим его, то инкремент неустойчивости уменьшается в несколько раз по сравнению со случаем, когда частота Q_0 на ту же самую величину меньше данного целого числа.

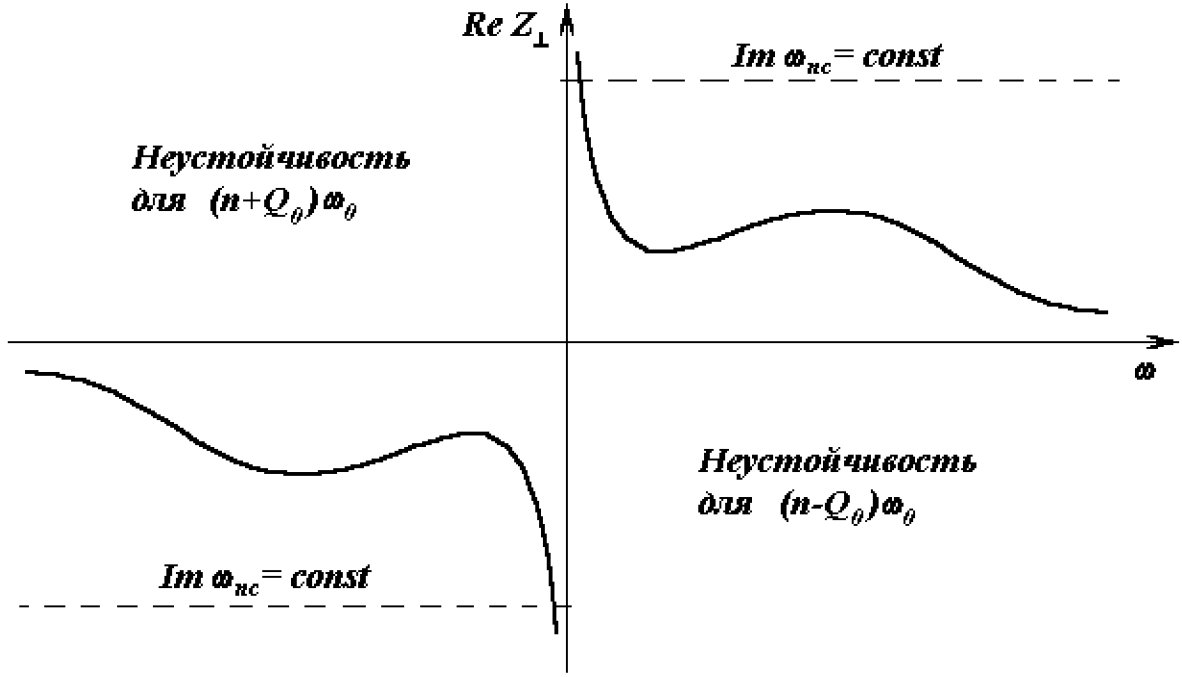


Рис. 30. Реальная часть поперечного импеданса гладкой вакуумной камеры.

Следует также отметить, что из-за отмечавшихся выше свойств поперечного импеданса связи два набора когерентных частот $\omega = (n \pm Q_0)\omega_0$ (с положительными и отрицательными n) приводят к одним и тем же результатам, в чём нетрудно убедиться из формул (111) и (112). Поэтому в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением одного набора когерентных частот $\omega = (n - Q_0)\omega_0$, для которого неустойчивость пучка имеет место для волн с положительными номерами $n > Q_0$. Эти волны называют медленными, так как их фазовая скорость меньше скорости пучка.

2.4.6. Условие устойчивости пучка при наличии импульсного разброса

Одновременный учёт разбросов бетатронных частот, обусловленных разбросом частиц по импульсам в пучке и нелинейностью поперечного движения, сталкивается с определёнными математическими трудностями, поэтому эффект от каждого из этих разбросов будем анализировать по отдельности. Рассмотрим сначала пучок с импульсным разбросом, пренебрегая пока зависимостью бетатронной частоты от амплитуды колебаний, считая $\Delta\dot{\phi}(\hat{x}) = 0$. Представим знаменатель подынтегрального выражения дисперсионного уравнения (109), с учётом формулы (84) для $\dot{\phi}$, в виде произведения двух сомножителей:

$$[n\omega_0\dot{\tau} + \omega_{nc} - Q_0\omega_0(1 - \dot{\tau}) - \omega_\xi\dot{\tau}][n\omega_0\dot{\tau} + \omega_{nc} + Q_0\omega_0(1 - \dot{\tau}) + \omega_\xi\dot{\tau}].$$

Полагая затем $\omega_{nc} = -Q_0\omega_0 + \Delta\omega_{nc}$, нетрудно видеть, что первый сомножитель примерно равен $-2Q_0\omega_0$. Следовательно, если в качестве распределения $g_0(\dot{\tau})$ снова использовать параболическую зависимость (79), то дисперсионный интеграл можно преобразовать к виду

$$S_{\perp} = \int_{-1}^1 \frac{1-u^2}{u-u_0} du, \quad (113)$$

где $u = \dot{\tau}/\dot{\tau}_L$, $u_0 = \Delta\omega_{nc}/\Delta\omega_n$ — отношение когерентного сдвига бетатронной частоты $\Delta\omega_{nc}$ к некогерентному разбросу частот в пучке $\Delta\omega_n = [(n - Q_0)\omega_0 + \omega_{\xi}]\dot{\tau}_L$. Вводя обозначения

$$\Lambda = \frac{3\sqrt{2}cI}{16\pi Q_0(m_0c^2/e)\gamma[(n - Q_0)\omega_0 + \omega_{\xi}]|\eta|(\Delta p/p)_0};$$

$$Z_{\perp} = Z_{\perp}[(n - Q_0)\omega_0],$$

где $(\Delta p/p)_0$ — полный разброс частиц по импульсам в пучке на полувысоте распределения, запишем дисперсионное соотношение (109) в виде, удобном для построения диаграммы на комплексной плоскости импедансов:

$$\Lambda \operatorname{Re} Z_{\perp} = \operatorname{Im} S_{\perp}^{-1}; \quad \Lambda \operatorname{Im} Z_{\perp} = -\operatorname{Re} S_{\perp}^{-1}. \quad (114)$$

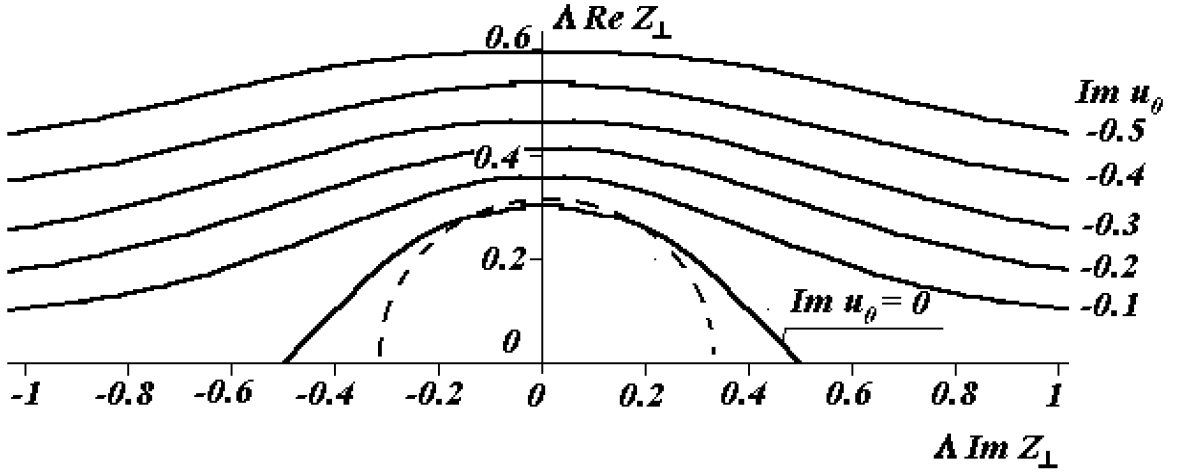


Рис. 31. Характеристики поперечной неустойчивости однородного пучка при наличии импульсного разброса.

Фиксируя мнимую часть параметра u_0 , пропорциональную инкременту неустойчивости, и изменяя $\operatorname{Re} u_0$, в результате вычисления дисперсионного интеграла (113) можно построить диаграмму, подобную той, что показана на рис. 31. Область устойчивых поперечных колебаний пучка ограничена кривой $\operatorname{Im} \omega_{nc} = 0$, дающей порог неустойчивости. Если параметр Λ достаточно мал, так что точка, изображающая на диаграмме комплексное число ΛZ_{\perp} , попадает внутрь области стабильности, то мнимая часть когерентного сдвига бетатронной частоты оказывается положительной, и колебания затухают. При оценках пороговой величины импеданса $|Z_{\perp}|_{th}$ можно аппроксимировать пороговую кривую полуокружностью $|\Lambda Z_{\perp}| < 1/3$, или в явном виде:

$$|Z_{\perp}|_{th} \simeq 4 \frac{m_0c^2}{e} |(n - Q_0)\eta + \xi| \frac{Q_0}{R_0I} \frac{(\Delta p)_0}{m_0c}, \quad (115)$$

где $(\Delta p)_0$ — полная ширина пучка по импульсам на полувысоте распределения.

Отметим, что в критерии устойчивости (115) отсутствует явная зависимость от энергии пучка (неявно пороговая величина поперечного импеданса связи зависит от энергии пучка через параметр η). Видно также, что порог неустойчивости может быть чрезвычайно низким при $n \simeq Q_0 - \xi/\eta$. Так как соотношение (115) было получено в предположении $n > 0$, то данное условие может выполняться лишь при разных знаках η и ξ .

Таким образом, знак хроматичности ξ должен совпадать со знаком параметра η (положительным за критической энергией и отрицательным при $\gamma < \gamma_{tr}$). Отметим также, что поперечная неустойчивость однородного пучка протонов развивается, как правило, в относительно низкочастотном диапазоне частот ($n \simeq Q_0$), что обусловлено большой величиной резистивного импеданса вакуумной камеры при $\omega \rightarrow 0$. По этой причине удобно подавлять подобную неустойчивость с помощью системы отрицательной обратной связи, которую сравнительно легко реализовать в области низких частот.

2.4.7. Устойчивость пучка при бетатронной частоте, зависящей от амплитуды колебаний

Рассмотрим теперь, как зависит порог неустойчивости от разброса частот бетатронных колебаний, обусловленного нелинейностью внешнего фокусирующего магнитного поля ускорителя, считая пучок монохроматическим,

$$g_0(\dot{\tau}) = \frac{\omega_0}{2\pi} \delta(\dot{\tau}),$$

а распределение частиц по амплитудам бетатронных колебаний — параболическим,

$$f_0(\hat{x}) = \frac{2}{\pi \hat{x}_L^2} \left[1 - \left(\frac{\hat{x}}{\hat{x}_L} \right)^2 \right], \quad 0 \leq \hat{x} \leq \hat{x}_L,$$

где \hat{x}_L — максимальное значение амплитуды бетатронных колебаний. Обозначая далее через ΔQ_L максимум разброса бетатронных частот в пучке: $\Delta Q_L = (\partial Q / \partial \hat{x}^2) \hat{x}_L^2$, а также полагая $\omega_{nc} = -Q_0 \omega_0 + \Delta Q_{nc} \omega_0$, можно переписать дисперсионное уравнение (109) в виде

$$1 = -\frac{Ic}{2\pi Q_0 \omega_0 (m_0 c^2 / e) \gamma \Delta Q_L} i Z_{\perp} \left((n - Q_0) \omega_0 \right) \int_0^1 \frac{u du}{u - \frac{\Delta Q_{nc}}{\Delta Q_L}}. \quad (116)$$

И, наконец, обозначив

$$\Lambda = -\frac{Ic}{2\pi Q_0 \omega_0 (m_0 c^2 / e) \gamma \Delta Q_L}, \quad S_{\perp} = \int_0^1 \frac{u du}{u - \frac{\Delta Q_{nc}}{\Delta Q_L}},$$

построим диаграмму стабильности однородного пучка протонов при частоте Q , зависящей от амплитуды бетатронных колебаний, показанную на рис. 32. По осям координат диаграммы отложены величины $\Lambda \operatorname{Re} Z_{\perp} = \operatorname{Im} S_{\perp}^{-1}$ и $\Lambda \operatorname{Im} Z_{\perp} = -\operatorname{Re} S_{\perp}^{-1}$.

Как и в случае продольной неустойчивости однородного пучка, в дисперсионное уравнение (116) входит производная от функции распределения $f_0'(\hat{x})$, поэтому рассматриваемое здесь параболическое распределение, имеющее разрыв производной на краю, неустойчиво. В случае же гладкого распределения в качестве приближённого критерия устойчивости можно пользоваться условием $|\Lambda Z_{\perp}| < 0.5$, что соответствует области стабильности, ограниченной на рис. 32 пунктирной полуокружностью. Данный критерий

можно записать в виде условия, которому должен удовлетворять разброс бетатронных частот для обеспечения поперечной устойчивости пучка:

$$|\Delta Q_L| \geq \frac{IcZ_{\perp}}{\pi Q_0 \omega_0 (m_0 c^2 / e) \gamma}. \quad (117)$$

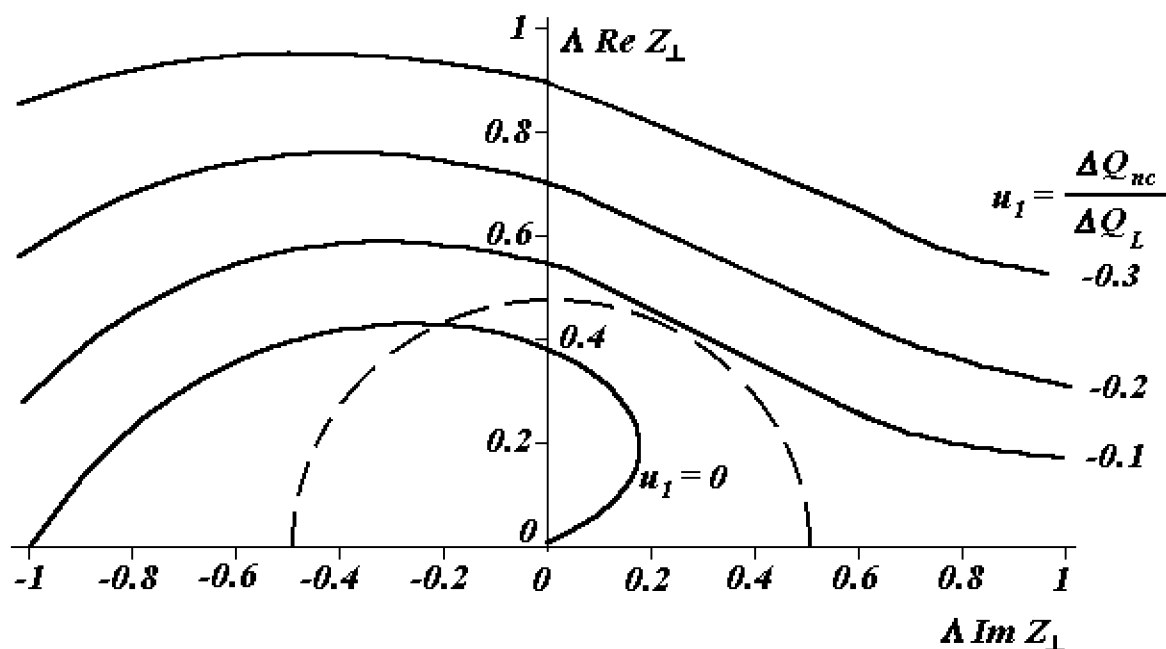


Рис. 32. Характеристики поперечной неустойчивости пучка при бетатронной частоте, зависящей от амплитуды колебаний.

В заключение коротко коснёмся пределов применимости теории, анализировавшейся в последних двух разделах. Если только известен реальный импеданс ускорителя, она позволяет сравнительно легко рассчитать инкремент неустойчивости, знак которого показывает, устойчив или неустойчив пучок. Данная теория, являющаяся частным случаем теории возмущений, базируется на линеаризованном уравнении Власова. Она не позволяет проследить в деталях за процессом развития неустойчивости и не даёт ответа на практически важный вопрос, в какой степени будет испорчен эмиттанс пучка в связи с неустойчивостью. Для того, чтобы исследовать нелинейную стадию процесса, используется численное моделирование движения частиц в интенсивном пучке протонов, для чего вначале с помощью уравнений Максвелла создаётся алгоритм для вычисления собственного электромагнитного поля пучка частиц, а затем шаг за шагом решаются уравнения движения для набора "макрочастиц", изображающих пучок на фазовой плоскости.

2.5. ПРОДОЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СГРУППИРОВАННОГО ПУЧКА ПРОТОНОВ

2.5.1. Продольный сигнал от одной частицы

В последних разделах первой части настоящего курса анализировалось продольное движение частиц в сгруппированном пучке протонов в случае малой интенсивности, когда можно пренебречь продольным электрическим полем, создаваемым пучком в окружающем его оборудовании ускорителя, по сравнению с внешним ускоряющим полем. Ниже мы ограничимся рассмотрением линейных синхротронных колебаний частиц. Продольное движение частиц в отсутствие возмущений описывается в таком случае выражением (1.154), которое в переменных $(\tau, \dot{\tau})$, введённых выше, имеет вид

$$\ddot{\tau} + \Omega_0^2 \tau = 0, \quad (118)$$

где Ω_0 — частота малых фазовых колебаний, даваемая формулой (1.155). Фазовая траектория, описывающая невозмущённое фазовое движение, представляет собой эллипс

$$\tau^2 + \frac{\dot{\tau}^2}{\Omega_0^2} = \hat{\tau}^2 = \frac{\eta^2 (\Delta p)^2}{\Omega_0^2 p_s^2}, \quad (119)$$

где $\Delta p = p - p_s$ — отклонение импульса частицы, движущейся по данной фазовой траектории, от синхронного значения. Эллипс превращается в окружность, если нормализовать одну из координат и использовать переменные $(\tau, \dot{\tau}/\Omega_0)$. Ниже широко используется также другая пара канонически сопряжённых координат — $(\psi, \hat{\tau})$, где $\psi = \Omega_0 t$ — фаза синхротронных колебаний.

В случае, когда продольное электрическое поле, создаваемое в ускорителе пучком протонов, имеет достаточно большую величину, так что им уже нельзя пренебрегать в сравнении с внешним ВЧ-полем, в правую часть уравнения (118) добавляется сила, обусловленная собственным электромагнитным полем пучка

$$\ddot{\tau} + \Omega_0^2 \tau = \frac{e\eta}{p_s} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_s(t, \theta). \quad (120)$$

Предположим теперь, что в ускорителе обращается тестовая частица, взаимодействующая с внешним продольным электрическим полем (в отсутствие собственного продольного электрического поля пучка), и на азимуте θ располагается идеальный пикап-электрод с бесконечно широкой полосой пропускания, фиксирующий токовый сигнал $j(t, \theta)$. Данный сигнал представляет собой почти периодическую последовательность импульсов, создаваемых на пикапе при каждом прохождении через него тестовой частицы,

$$j(t, \theta) = e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \tau - \frac{\theta}{\omega_0} - \frac{2k\pi}{\omega_0}\right). \quad (121)$$

С учётом следующих соотношений:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - 2k\pi/\omega_0) = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega_0 u}, \quad u = t - \tau - \theta/\omega_0, \quad (122)$$

$$\tau = \hat{\tau} \cos \psi, \quad (123)$$

$$e^{-ik\omega_0\hat{\tau}\cos\psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{-m} J_m(k\omega_0\hat{\tau}) e^{im\psi}, \quad (124)$$

где J_m — функция Бесселя порядка m , выражение (121) для $j(t, \theta)$ может быть записано в эквивалентной форме:

$$j(t, \theta) = \frac{e\omega_0}{2\pi} \sum_{k,m=-\infty}^{k,m=\infty} i^{-m} J_m(k\omega_0\hat{\tau}) e^{i(k\omega_0 t - k\theta + m\psi)}. \quad (125)$$

Соответственно, с помощью преобразования Фурье отсюда получается выражение для спектра сигнала,

$$j(\omega, \theta) = \frac{e\omega_0}{2\pi} \sum_{k,m=-\infty}^{k,m=\infty} i^{-m} J_m(k\omega_0\hat{\tau}) e^{-ik\theta} \delta(\omega - \omega_{km}), \quad (126)$$

причём линии спектра располагаются на частотах $\omega_{km} = k\omega_0 + m\Omega_0$.

Таким образом, около каждой гармоники частоты обращения пучка располагается бесконечный набор синхротронных спутников, причём спектральная плотность спутника с номером m пропорциональна $J_m(k\omega_0\hat{\tau})$. Так как аргумент функции Бесселя пропорционален $\hat{\tau}$, то ширина спектра оказывается обратно пропорциональной $\hat{\tau}$. По этой же причине частицы сгустка с большими амплитудами синхротронных колебаний дают основной вклад в низкочастотную часть спектра, и наоборот, частицы с малыми амплитудами — в его высокочастотную часть. В пределе $\hat{\tau} \rightarrow 0$ синхротронные спутники исчезают. Синхронная частица пересекает точку наблюдения периодически, а её спектром являются линии, располагающиеся на гармониках частоты обращения,

$$j(\omega, \theta) = \frac{e\omega_0}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_0(k\omega\hat{\tau}) e^{-ik\theta} \delta(\omega - k\omega_0). \quad (127)$$

2.5.2. Продольный сигнал от сгустка частиц

Чтобы найти продольный сигнал от сгустка частиц, введём функцию $F(\psi, \hat{\tau}, t)$, описывающую распределение частиц в фазовом пространстве в произвольный момент времени. Продольный сигнал $J(t, \theta)$, получаемый с пикап-электрода от сгустка частиц, можно рассчитать, если просуммировать с учётом данного распределения сигналы от индивидуальных частиц. В результате получим следующее выражение:

$$J(t, \theta) = N_B \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\infty} F(\psi, \hat{\tau}, t) j(t, \theta) \hat{\tau} d\hat{\tau}, \quad (128)$$

где N_B — число частиц в сгустке, так что функция распределения F предполагается нормированной на единицу.

Рассмотрим сначала стационарное распределение, которое, естественно, зависит только от амплитуды синхротронных колебаний $\hat{\tau}$: $F(\psi, \hat{\tau}, t) = g(\hat{\tau})$. Проинтегрировав в таком случае выражение (128) с учётом соотношения (125) для сигнала $j(t, \theta)$, а затем воспользовавшись преобразованием Фурье, получим для спектра сгустка $J(\omega, \theta)$ следующее выражение:

$$J(\omega, \theta) = 2\pi I \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_{k,0} e^{-ik\theta} \delta(\omega - k\omega_0), \quad (129)$$

где I_B — средний ток сгустка, равный

$$I_B = \frac{eN_B\omega_0}{2\pi}, \quad (130)$$

а $\rho_{k,0}$ — спектральная амплитуда на частоте $k\omega_0$,

$$\rho_{k,0} = \int_0^\infty J_0(k\omega_0\hat{\tau})g(\hat{\tau})\hat{\tau} d\hat{\tau}. \quad (131)$$

Из формулы (129) видно, что в спектре сгустка частиц, находящегося в стационарном состоянии, отсутствуют синхротронные сателлиты, так что синхротронные колебания отдельных частиц никак не проявляются. Последнее обстоятельство совершенно аналогично обсуждавшемуся выше процессу сглаживания неоднородностей в пучке из-за принятия в качестве модели стационарного распределения частиц гладкой функции, описывающей плотность частиц в сгустке в среднем. В однородном пучке протонов также исчезло движение индивидуальных частиц с введением понятия стационарного распределения, как уже было показано в предыдущих разделах, поэтому нет необходимости ещё раз останавливаться на данном вопросе.

При рассмотрении когерентного движения сгустка частиц необходимо добавить к стационарной функции $g(\hat{\tau})$ малую возмущающую добавку $f(\psi, \hat{\tau}, t)$, создающую некоторое электромагнитное поле на гармониках синхротронной частоты. Данное возмущение плотности частиц фактически описывает разность между распределениями — действительно существующим в пучке и искусственно введённым стационарным, так как стационарный пучок, в принципе, не существует.

Рассмотрим простейшее возмущение плотности частиц на фазовой плоскости, являющееся m -ой гармоникой синхротронной частоты:

$$f(\psi, \hat{\tau}, t) = g_m(\hat{\tau})e^{-im\psi}e^{i\omega_c t}, \quad (132)$$

где $\omega_c = m\Omega + \Delta\omega_c$ — частота возмущения (здесь предполагается, что синхротронная частота Ω включает в себя некогерентный сдвиг, создаваемый стационарным распределением $g(\hat{\tau})$).

Как и выше, при рассмотрении продольной неустойчивости однородного пучка протонов, реальная часть комплексной добавки $\Delta\omega_c$ даёт когерентный сдвиг частоты неустойчивости, а знак её мнимой части показывает, будет ли пучок устойчив или нет. Согласно принятой терминологии, номера m соответствуют определённым модам мультипольности когерентных колебаний сгруппированного пучка (так, случай $m = 1$ соответствует дипольной моде, когда сгусток колеблется как целое; при $m = 2$ у сгустка колеблются размеры с частотой, близкой к удвоенной частоте синхротронных колебаний, причём данная мода называется квадрупольной; моды с более высокими номерами называются секстипольными, октупольными и т.д.).

Подставив в соотношение (128) вместо F возмущение распределения f , даваемое формулой (132), и выполнив интегрирование, а затем перейдя от сигнала, создаваемого возмущением распределения на пикап-электроде, к его спектру $J(\omega, \theta)$ с помощью преобразования Фурье, получим

$$J(\omega, \theta) = 2\pi I_B \sum_k \rho_{k,m} e^{-ik\theta} \delta(\omega - (k\omega_0 + \omega_c)), \quad (133)$$

где $\rho_{k,m}$ — амплитуда спектра возмущения на частоте $\omega = k\omega_0 + \omega_c$, равная

$$\rho_{k,m} = i^{-m} \int_0^\infty J_m(k\omega_0\hat{\tau})g_m(\hat{\tau})\hat{\tau} d\hat{\tau}. \quad (134)$$

2.5.3. Дисперсионное уравнение

Моды мультипольных колебаний являются независимыми лишь при выполнении определённых условий. Сильная связь мультипольных мод может, например, иметь место в СВЧ-диапазоне при достаточно высокой интенсивности пучка (так называемая продольная микроволновая неустойчивость). Низшие мультипольные моды, представляющие наибольшую опасность из-за сравнительно низкой величины порога неустойчивости, развиваются, как правило, независимо, поэтому будем пока полагать, что возмущение функции распределения частиц в фазовом пространстве f описывается выражением (132). Оно удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных, являющемуся следствием теоремы Лиувилля и имеющему в переменных $\hat{\tau}, \psi$ следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(g'(\hat{\tau}) + \frac{\partial f}{\partial \hat{\tau}} \right) \frac{d\hat{\tau}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} = 0. \quad (135)$$

Пренебрегая в (135) производной $\partial f / \partial \hat{\tau}$, величина которой, по предположению, мала по сравнению с $|g'(\hat{\tau})|$, а также учитывая соотношение (132), имеем

$$ie^{i\omega_c t} (\omega_c - m\Omega) g_m(\hat{\tau}) e^{-im\psi} = -g'(\hat{\tau}) \frac{d\hat{\tau}}{dt}. \quad (136)$$

С помощью соотношения (119), определяющего амплитуду синхротронных колебаний $\hat{\tau}$, и уравнения движения (120) можно записать производную $d\hat{\tau}/dt$ в виде

$$\frac{d\hat{\tau}}{dt} = -\frac{e\eta \sin \psi}{\Omega p_s} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_s(t, \theta = \omega_0(t - \tau)). \quad (137)$$

После некоторых предварительных преобразований нетрудно получить из выражения (136) с учётом формулы (137) явный вид дисперсионного соотношения. С этой целью необходимо, во-первых, выразить электромагнитное поле пучка через продольный импеданс связи, воспользовавшись определением импеданса (68) и формулой для спектра пучка (133), в результате чего получается следующее соотношение:

$$[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_s(t, \theta = \omega_0(t - \tau)) = \frac{I_B e^{i\omega_c t}}{R_0} \sum_k Z_k e^{ik\omega_0\tau} \rho_{k,m}. \quad (138)$$

И, во-вторых, разложить в ряд произведение $\sin \psi \exp(ik\omega_0\tau)$:

$$\sin \psi e^{ik\omega_0\tau} = \sum_m i^m \frac{m}{k\omega_0\hat{\tau}} J_m(k\omega_0\hat{\tau}). \quad (139)$$

При получении выражения (139) были использованы формула (124) и известное соотношение для функций Бесселя:

$$J_{m+1}(x) + J_{m-1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x).$$

Если теперь подставить в (136) производную $d\hat{\tau}/dt$, даваемую формулой (137) с учётом соотношений (138) и (139), то можно получить следующее уравнение:

$$i\hat{\tau}(\omega_c - m\Omega)g_m(\hat{\tau})e^{-im\psi} = -\frac{2\pi I_B \Omega g'(\hat{\tau})}{\omega_0^2 q V \sin \varphi_s} \sum_k \frac{Z_k(\omega_c)}{k} \rho_{k,m} \sum_l i^l e^{-il\psi} J_l(k\omega_0 \hat{\tau}). \quad (140)$$

Умножив обе части полученного уравнения на $e^{im\psi}$, а затем проинтегрировав почленно по ψ в пределах от 0 до 2π , нетрудно видеть, что систематическое воздействие на возмущение плотности частиц в сгустке оказывает единственный член из правой части уравнения с номером $l = m$. При этом само уравнение (140) приводится к виду

$$i^{-m} g_m(\hat{\tau}) \hat{\tau} = \frac{2\pi m I_B \Omega}{\omega^2 q V \sin \varphi_s} \frac{g'(\hat{\tau})}{\omega_c - m\Omega} \sum_k \rho_{k,m} \frac{i Z_k(\omega_c)}{k} J_m(k\omega_0 \hat{\tau}). \quad (141)$$

И, наконец, умножив обе части уравнения (141) на $J_m(j\omega_0 \hat{\tau})$ и проинтегрировав их по $\hat{\tau}$, приходим к бесконечной системе уравнений относительно гармоник возмущения линейной плотности заряда:

$$\rho_{j,m} = \frac{2qm I_B \Omega}{\pi^2 B^2 V \sin \varphi_s} \sum_k \rho_{k,m} \frac{i Z_k}{k} \int_0^1 \frac{g'_0(x) J_m(\alpha_k \sqrt{x}) J_m(\alpha_j \sqrt{x})}{\omega_c - m\Omega} dx, \quad -\infty < j < \infty, \quad (142)$$

где B — коэффициент, учитывающий группировку частиц по фазе ($B = \tau_B \omega_{RF}/2\pi$, τ_B — длительность сгустка в секундах); $\alpha_k = \pi k B/q$. При переходе от (141) к (142) введена новая независимая переменная $x = (2\hat{\tau}/\tau_B)^2$ и изменена нормировка исходного распределения. Новая функция распределения $g_0(x)$ нормирована на единицу

$$\int_0^1 g_0(x) dx = 1.$$

Приравнивая к нулю определитель системы уравнений (142), получаем искомое дисперсионное уравнение, являющееся, вообще говоря, задачей на собственные значения. В результате решения такой задачи можно, в принципе, получить набор возможных частот ω_c и на основе анализа их мнимых частей сделать вывод об устойчивости или неустойчивости сгустка частиц при заданной зависимости от частоты продольного импеданса связи. Следует сразу отметить, что общее решение такой задачи (при произвольных зависимостях $g_0(x)$ и $Z_k(\omega)$) вряд ли представляется возможным. Однако при определённых предположениях относительно вида исходной функции распределения частиц в сгустке, а также частотной зависимости продольного импеданса связи дисперсионное соотношение может быть решено достаточно просто, причём данные случаи представляют, зачастую, большой практический интерес. Ниже анализируются некоторые из этих случаев.

В заключение настоящего раздела обобщим систему уравнений (142) на случай, когда в ускорителе имеется M одинаковых равноотстоящих сгустков ($M \leq q$). Для этого необходимо, во-первых, заменить ток сгустка I_B на $I = M I_B$. И, во-вторых, следует учесть тот факт, что при наличии в ускорителе нескольких сгустков возможно их связанное движение, когда каждый из них может воздействовать на соседние сгустки. Так, для M сгустков возможны M мод связанных колебаний; при этом фазы колебаний соседних сгустков сдвинуты на величину, равную $2\pi n/mM$, где n — номер моды связанных колебаний сгустков ($0 \leq n \leq M-1$), а высота спектральных линий продольного сигнала

возрастает в M раз. Сами линии располагаются на частотах $\omega_{ln} = (lM + n)\omega_0 + m\Omega$, где l — произвольное целое число, положительное или отрицательное, так что расстояние между двумя соседними линиями также увеличивается в M раз. В дальнейшем для определённости будем полагать $M = q$, что соответствует наиболее опасному случаю, когда все сепаратрисы ускорителя заполнены сгустками частиц.

2.5.4. Инкременты мультипольных неустойчивостей

Рассмотрим распределение $g_0 = const$ — случай постоянной фазовой плотности. Данное распределение является, безусловно, идеализацией, подобно модели моноэнергетического пучка, использованной ранее при обсуждении инкрементов продольной неустойчивости однородного пучка протонов. Как и там, здесь также отсутствует порог неустойчивости, а дисперсионное уравнение непосредственно переходит в формулу для частоты неустойчивости ω_c . Данный подход позволяет наиболее простым способом выявить характерные особенности неустойчивости сгруппированного пучка протонов, причём получающийся при этом результат оказывается близким к случаю, когда линейная плотность заряда в сгустках описывается параболой (одному из подробно исследованных в литературе). Упомянутая количественная близость получающихся результатов обусловлена близостью к $g_0 = const$ распределения частиц в фазовом пространстве в случае параболической линейной плотности заряда в сгустках. Однако получение решения дисперсионного уравнения в последнем случае (в отличие от распределения $g_0 = const$) сопряжено со значительными математическими трудностями.

При постоянной плотности частиц в фазовом пространстве возмущения исходного распределения концентрируются вблизи граничной фазовой траектории сгустка ($g_m(\hat{\tau}) \sim \delta(\hat{\tau} - \tau_B/2)$), что является следствием теоремы Лиувилля, а из формулы (134) получается в таком случае простая связь между гармониками возмущения линейной плотности заряда:

$$\rho_{k,m} = \frac{J_m(k\omega_0\tau_B/2)}{J_m(j\omega_0\tau_B/2)} \rho_{j,m}. \quad (143)$$

Подставляя соотношение (143) в систему уравнений (142) и учитывая, что $g'_0(x) = -\delta(x - 1)$, сразу приходим к решению дисперсионного уравнения в виде

$$\omega_c = m\Omega_0 - \frac{I\Omega_0}{2\pi BV \sin \varphi_s} \sum_{l=-\infty}^{\infty} i Z_{lq+n}(m\Omega_0) F_m(\alpha_{ln}), \quad (144)$$

где приняты следующие обозначения: F_m — формфактор, равный

$$F_m = \frac{4m}{\alpha_{ln}} J_m^2(\alpha_{ln}); \quad (145)$$

$\alpha_{ln} = \pi(l + n/q)B$; Ω_0 — частота синхротронных колебаний частицы, движущейся по граничной фазовой траектории.

Отделяя в (144) мнимую часть, получаем формулу для инкремента неустойчивости $Im \omega_c$

$$Im \omega_c = -\frac{I\Omega_0}{2\pi BV \sin \varphi_s} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_m(\alpha_{ln}) Re Z_{lq+n}(m\Omega_0). \quad (146)$$

Сгустки неустойчивы, если $Im \omega_c < 0$. Следовательно, ниже критической энергии ($\sin \varphi_s < 0$) неустойчивость, согласно (146) с учётом очевидных соотношений

$$Z_{-k}(\omega) = Z_k^*(-\omega), \quad F_m(\alpha_{l,-n}) = -F_m(\alpha_{l,-n}),$$

имеет место при выполнении неравенства

$$\sum_{l=1}^{\infty} F_m(\alpha_{l,-n}) Re Z_{lq-n}(-m\Omega_0) > \sum_{l=0}^{\infty} F_m(\alpha_{ln}) Re Z_{lq+n}(m\Omega_0). \quad (147)$$

Выше критической энергии знак неравенства изменяется на обратный.

Анализируя неравенство (147), нетрудно видеть, что при отсутствии связи между сгустками ($n = 0$), а также при $n = q/2$ неустойчивость можно подавить путём соответствующей настройки импеданса $Z_k(\omega)$, изменив знак неравенства. Иначе обстоит дело при $n \neq 0, q/2$. Если для некоторого значения n выполнен критерий устойчивости, то для моды с номером $q - n$ снова оказывается справедливым неравенство (147) и имеет место продольная неустойчивость.

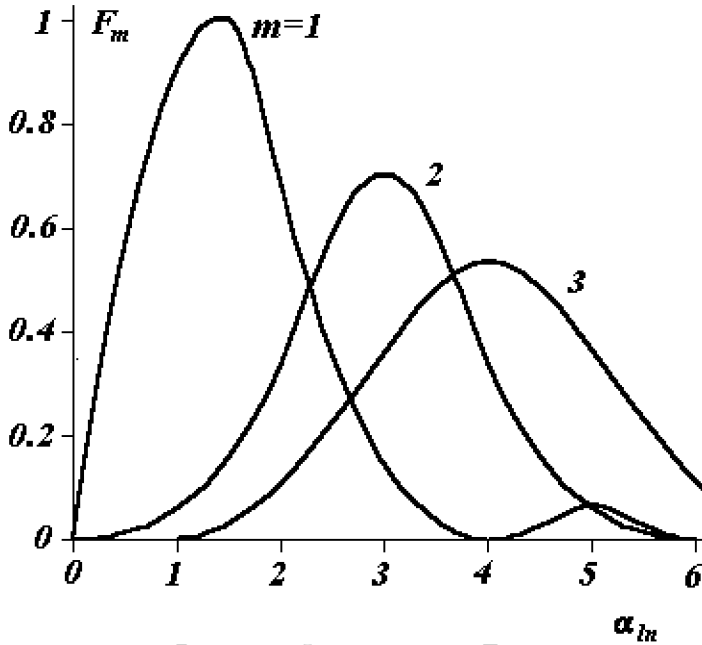


Рис. 33. Формфакторы F_m .

Формфакторы F_m характеризуют эффективность возбуждения заданной мультипольной моды неустойчивости в зависимости от длительности сгустков и частоты ω . Их значения для $m = 1 \div 3$ представлены на рис. 33 (по оси абсцисс отложен параметр α_{ln}). Видно, что мультипольная мода с номером m наиболее эффективно возбуждается возмущением с длиной волны, составляющей примерно $2/m$ от длины сгустка, причём наибольшая эффективность возбуждения дипольной моды имеет место в случае коротких сгустков ($B \rightarrow 0$).

В качестве простейшего примера применения формулы (147) рассмотрим пучок, состоящий из q одинаковых сгустков и взаимодействующий с резонаторами ускоряющих станций. В протонном синхротроне со средним уровнем энергии ускоренного пучка (типа ускорителя ИФВЭ) частота ускоряющего поля изменяется в достаточно широких пределах, поэтому добротность ускоряющих резонаторов относительно невелика ($Q \sim 10 \div 100$), и в полосу резонаторов могут попадать несколько гармоник частоты обращения пучка. Предположим, для определённости, что имеется две таких гармоники с номерами $q \pm 1$. Учтём также тот факт, что характерная длина волны поля, возбуждаемого пучком в резонаторах ускоряющих станций, на большей части ускорительного цикла существенно превышает продольный размер сгустков, поэтому эффективно возбуждается лишь низшая дипольная мода ($m = 1$).

Пусть все сгустки пучка колеблются в одной и той же фазе (случай $n = 0$). Тогда неравенство (147) примет следующий вид (считаем, для определённости, что $\gamma < \gamma_{tr}$):

$$\operatorname{Re} Z_q(-\Omega_0) > \operatorname{Re} Z_q(\Omega_0). \quad (148)$$

Сразу отметим, что в протонном синхротроне данная неустойчивость представляет чисто академический интерес. Дело в том, что синхротронная частота мала в сравнении с частотой обращения пучка в ускорителе, а, следовательно, и с шириной полосы пропускания резонаторов, так что инкремент неустойчивости имеет пренебрежимо малую величину. Напомним также, что данная неустойчивость устраняется настройкой резонаторов за счёт соответствующего сдвига их собственных частот. Более того, в протонном синхротроне она вообще не может проявляться. Это обусловлено работой автоматических систем, таких как система автоматической подстройки частоты по положению пучка в ускорителе и автоматические системы резонаторов. Первая из них автоматически подавляет дипольные колебания сгустков, если они происходят в одинаковой фазе. Вторые осуществляют автоматическую расстройку резонаторов в зависимости от величины q -ой гармоники тока пучка таким образом, что неравенство (148) никогда не реализуется.

Рассмотрим теперь связанные колебания сгустков частиц ($n \neq 0$). При $n = 1$ необходимо удержать в формуле (147) члены с $l = 1$. Учитывая, что кратность ускорения q обычно удовлетворяет условию $q \gg 1$, можно положить $F_m(\alpha_{1,\pm 1}) \simeq F_m(\alpha_{1,0})$ и сократить формфакторы. Таким образом, дипольные колебания устойчивы при $n = 1$, если выполняется следующее условие:

$$\operatorname{Re} Z_{q-1}(-\Omega_0) < \operatorname{Re} Z_{q+1}(\Omega_0). \quad (149)$$

Следует, однако, отметить, что даже при выполнении условия устойчивости (149) дипольная неустойчивость сгустков всё же развивается. Неустойчивой в данном случае оказывается мода связанных колебаний сгустков с номером $n = q - 1$. В этом легко убедиться, вернувшись к исходному соотношению (147). При $n = q - 1$ в левой части неравенства необходимо удержать член с номером $l = 2$, а в правой — с $l = 0$ (именно эти гармоники попадают в полосу резонаторов). Из сравнения получившегося результата с формулой (149) видно, что последнее неравенство как раз и является условием неустойчивости дипольных колебаний для моды связанных колебаний сгустков с номером $n = q - 1$.

2.5.5. Пороги неустойчивостей

Методика расчёта порогов продольных мультипольных неустойчивостей не отличается, в принципе, от использованной ранее при рассмотрении неустойчивостей однородного пучка протонов — это представление дисперсионных интегралов в виде диаграмм на комплексной плоскости импедансов. Проиллюстрируем подобный расчёт на примере пучка, взаимодействующего с узкополосным резонатором, полагая, что в полосу пропускания резонатора попадает единственная гармоника возмущения линейной плотности заряда пучка с номером $k = lq + n$. В таком случае система уравнений (142) имеет стандартный вид дисперсионного интеграла:

$$1 = \frac{2qmI\Omega}{\pi^2 B^2 V \sin \varphi_s} \frac{iZ_k}{k} \int_0^1 \frac{g'_0 J_m^2(\alpha_k)}{\omega_c - m\Omega} dx. \quad (150)$$

Рассматривая случай достаточно малых фазовых колебаний, можно ограничиться линейной зависимостью частоты Ω от энергии колебаний $\Omega \simeq \Omega_0 - \Delta\Omega x$ и преобразовать дисперсионный интеграл (150) к виду, удобному для численных расчётов

$$u + iv = (I/w)^{-1}, \quad (151)$$

использовав следующие соотношения:

$$I = \int_0^1 \frac{g'_0(x) J_m^2(\alpha_k \sqrt{x})}{mx + r + i\delta} dx, \quad w = - \int_0^1 g'_0(x) J_m^2(\alpha_k \sqrt{x}) dx,$$

$$u + iv = \frac{\omega_{c0} - m\Omega_0}{\Delta\omega}, \quad r + i\delta = \frac{\omega_c - m\Omega_0}{\Delta\Omega}, \quad (152)$$

где предполагается, что комплексная частота ω_{c0} вычисляется без учета разброса синхронных частот в сгустках, с помощью формулы (144), в которой необходимо удержать единственный член с заданным номером l , а в качестве F_m положить $F_m = -4mw/\alpha_k$, а через ω_c обозначена искомая комплексная частота возмущения с учётом разброса $\Delta\Omega$.

Устремляя δ к нулю, получаем выражения для реальной и мнимой частей дисперсионного интеграла I , с помощью которых легко построить пороговые диаграммы для продольных мультипольных неустойчивостей:

$$Re I = PV \int_0^1 \frac{g'_0(x) J_m^2(\alpha_k \sqrt{x})}{mx + r} dx,$$

$$Im I = \frac{\pi}{m} g'_0\left(-\frac{r}{m}\right) J_m^2\left(\alpha_m \sqrt{-\frac{r}{m}}\right), \quad (153)$$

где интеграл для $Re I$ понимается в смысле главного значения.

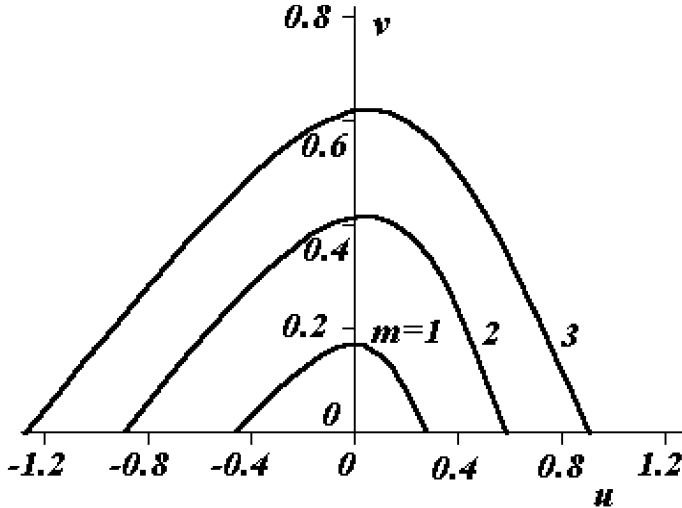


Рис. 34. Границы областей стабильности.

Для практических оценок допустимых импедансов пороговые диаграммы обычно аппроксимируются полуокружностями радиуса $\sqrt{m}/4$, откуда получается следующее условие:

$$\sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{m}/4. \quad (155)$$

На рис. 34 представлены пороговые диаграммы для трех низших мультипольных мод ($m = 1 \div 3$), рассчитанные с помощью формул (153). Распределение g_0 при расчётах полагалось составленным из двух кусков парабол, так что

$$g'_0 \sim \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq 0.5; \\ x - 1, & 0.5 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (154)$$

Диаграммы построены для случая максимумов формфакторов, когда неустойчивости представляют наибольшую опасность ($k/q \simeq m/2B$, $F_m \simeq 1/\sqrt{m}$).

Воспользовавшись определением выражения $u + iv$, приведенным выше, получим явный вид для пороговой величины продольного импеданса связи $|Z_k|_{th}$; она оказывается пропорциональной номеру мультипольной моды m :

$$|Z_k|_{th} = m \frac{\Delta\Omega \pi BV |\sin \varphi_s|}{\Omega_0 2qI}. \quad (156)$$

Отметим чрезвычайно сильную зависимость порогов неустойчивостей от продольной длительности сгустков — с учётом квадратичной зависимости $\Omega(B)$ и $m \sim kB$ величина допустимого продольного импеданса связи $|Z_k/k|_{don}$ пропорциональна B^4 .

В заключение раздела коснёмся расчёта инкрементов продольных мультипольных неустойчивостей вблизи пороговых кривых. С этой целью используют диаграммы, на которых в качестве осей координат берутся величины, пропорциональные реальной и мнимой частям импеданса Z_k , а также интенсивности пучка, а на самой диаграмме наносятся линии постоянных значений инкрементов ($\delta = const$), рассчитанные с помощью уравнения (151). Вдали от порога (при $|r + i\delta| \gg m$) инкремент неустойчивости даётся соотношением (146).

2.5.6. Неустойчивость сгустка при наличии связи между мультипольными модами

Теория продольных мультипольных неустойчивостей, изложенная выше, хорошо согласуется с имеющимися экспериментальными данными в случае достаточно низкой интенсивности сгустков частиц и не очень высоких номеров m . Однако при объяснении других типов неустойчивостей она сталкивается с трудностями. Так, например, практически во всех кольцевых ускорителях протонов наблюдалась микроволновая неустойчивость, сопровождаемая сигналом в СВЧ-диапазоне. В ускорителе ИФВЭ она возникала в результате взаимодействия пучка с электромагнитной волной, замедленной гофрированной вакуумной камерой, на частоте 6 ГГц (в настоящее время гофрированная камера заменена на гладкую). Для микроволновой неустойчивости характерны большие величины инкрементов — размеры сгустков могут существенно возрастать за время порядка одного периода фазовых колебаний. Экспериментально было обнаружено, что порог микроволновой неустойчивости с хорошей точностью описывается так называемым локальным критерием — формулой (82), в которой средний ток пучка I заменяется на максимальное значение тока сгустка, пропорциональное I/B .

Теоретический анализ эффектов, подобных продольной микроволновой неустойчивости сгустков частиц, возможен лишь при учёте связи между мультипольными модами, для чего необходимо представить возмущение функции распределения f в виде ряда Фурье

$$f = e^{i\omega ct} \sum_m g_m(\hat{r}) e^{-im\psi}. \quad (157)$$

При этом, как следует из соотношения (128) с учётом формулы (157) (с последующим переходом к спектру сигнала), необходимо заменить в (133) и в последующих соотношениях, включая (141), амплитуду возмущения спектра $\rho_{k,m}$ на ρ_k , равную

$$\rho_k = \sum_m \rho_{k,m}. \quad (158)$$

Тогда при переходе от (141) к (142) получается следующая система уравнений относительно гармоник ρ_j :

$$\rho_j = -\frac{1}{r_L} \sum_k iZ_k M_{jk} \rho_k, \quad (159)$$

где через r_L обозначено выражение, имеющее размерность сопротивления

$$r_L = \frac{2\pi BV \sin \varphi_s}{I}; \quad (160)$$

iZ_k представляет собой диагональную матрицу, описывающую импеданс системы, взаимодействующей с пучком; матричный элемент M_{jk} даётся выражением

$$M_{jk} = -\frac{4}{\alpha_k} \sum_m m\Omega \int_0^1 \frac{g'_0 J_m(\alpha_j \sqrt{x}) J_m(\alpha_k \sqrt{x})}{\omega_c - m\Omega} dx. \quad (161)$$

Покажем на простейшем примере, как может возникать связь между двумя соседними мультипольными модами с номерами m и $m+1$, которая при достаточно высокой интенсивности пучка может приводить к продольной неустойчивости ранее устойчивого сгустка частиц. С этой целью рассмотрим сгусток, взаимодействующий с узкополосным резонатором, полоса пропускания которого мала по сравнению с частотой обращения ω_0 и, напротив, велика в сравнении с частотой фазовых колебаний Ω . Пренебрегая частотным сдвигом гармоник возмущения плотности заряда, связанным с когерентным фазовым движением сгустка, будем предполагать, что импеданс резонатора является чисто активным на гармониках частоты обращения с номерами $k = \pm k_0$ ($Z_{\pm k_0} = R_s$) и равен нулю при $|k| \neq k_0$. При этом система уравнений (159) упрощается и принимает вид системы из двух линейных уравнений относительно гармоник $\rho_{\pm k_0}$:

$$\rho_{\pm k_0} = -i \frac{R_s}{r_L} (M_{\pm k_0, -k_0} \rho_{-k_0} + M_{\pm k_0, k_0} \rho_{k_0}). \quad (162)$$

Для дальнейшего упрощения системы уравнений (162) воспользуемся очевидными соотношениями между элементами матрицы M : $M_{k_0, k_0} = -M_{-k_0, -k_0} = M_1 + M_2$, $M_{-k_0, k_0} = -M_{k_0, -k_0} = (-1)^m (M_1 - M_2)$, где

$$M_1 = \frac{F_m(\alpha_{k_0})}{(\omega_c/\Omega_0) - m}, \quad M_2 = \frac{F_{m+1}(\alpha_{k_0})}{(\omega_c/\Omega_0) - (m+1)},$$

а также между гармониками $\rho_{\pm k_0}$ и $\rho_{1,2} = \rho_{m,m+1}(k_0)$: $\rho_{k_0} = \rho_1 + \rho_2$, $\rho_{-k_0} = (-1)^m (\rho_1 - \rho_2)$. С учётом этих соотношений можно от системы уравнений (162) перейти к системе уравнений относительно гармоник $\rho_{1,2}$:

$$\rho_{1,2} = -\frac{2iR_s}{r_L} M_{1,2} \rho_{2,1}. \quad (163)$$

Нетривиальные решения системы уравнений (163) имеют место при выполнении следующего условия:

$$1 + \frac{4R_s^2}{r_L^2} M_1 M_2 = 0, \quad (164)$$

которое с учётом определений величин M_1 и M_2 сводится к квадратному уравнению относительно частоты ω_c ,

$$(\omega_c/\Omega_0)^2 - (2m+1)(\omega_c/\Omega_0) + m(m+1) + \frac{4R_s^2}{r_L^2} F_m F_{m+1} = 0, \quad (165)$$

так что решение для ω_c имеет вид

$$\omega_c = \Omega_0 \left(m + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4R_s^2}{r_L^2} F_m(\alpha_{k_0}) F_{m+1}(\alpha_{k_0})} \right). \quad (166)$$

Как следует из (166), в пределе очень низкой интенсивности сгустка ($r_L \rightarrow \infty$) получаются два действительных решения для частоты ω_c : $\omega_c = m\Omega_0$ и $\omega_c = (m+1)\Omega_0$, движение устойчиво, а мультипольные моды являются независимыми. С ростом тока I частоты мультипольных колебаний начинают сближаться. При $I = I_{th}$, где через I_{th} обозначено пороговое значение тока I , равное

$$I_{th} = \frac{\pi BV |\sin \varphi_s|}{2R_s \sqrt{F_m(\alpha_{k_0}) F_{m+1}(\alpha_{k_0})}}, \quad (167)$$

частоты мультипольных колебаний для обеих мод становятся одинаковыми и равными $(m+1/2)\Omega_0$. При дальнейшем росте тока I у частоты ω_c появляется мнимая часть (положительная для одной моды и отрицательная для другой) и рассматриваемые мультипольные колебания становятся неустойчивыми; реальная часть ω_c при $I > I_{th}$ остаётся неизменной, равной её значению при $I = I_{th}$.

Сказанное выше иллюстрирует рис. 35 в случае $m = 1$. При низкой интенсивности пучка имеются две независимые мультипольные моды — дипольная и квадрупольная. С ростом тока I разность между когерентными частотами мод уменьшается, и происходит всё большее смешивание дипольных и квадрупольных возмущений. При $I = I_{th}$ данные моды становятся идентичными с одинаковыми когерентными частотами $\omega_c = (3/2)\Omega_0$.

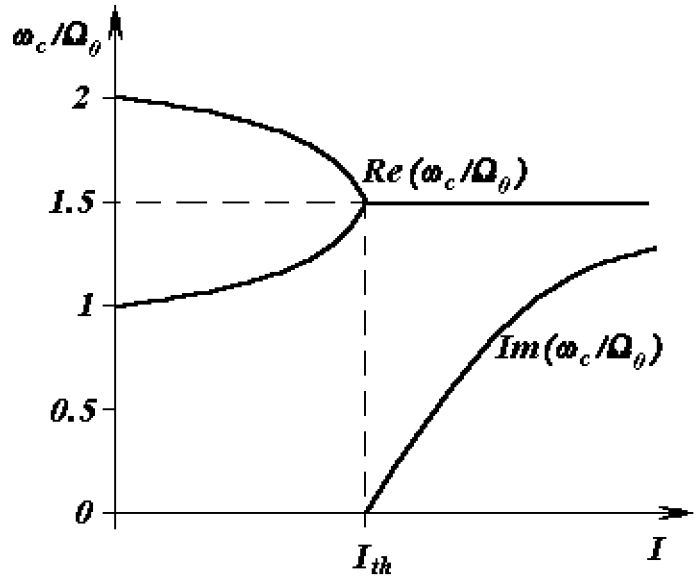


Рис. 35. Когерентная частота в зависимости от интенсивности при наличии связи дипольной и квадрупольной мод.

2.6. ПОПЕРЕЧНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СГРУППИРОВАННОГО ПУЧКА ПРОТОНОВ

2.6.1. Поперечный сигнал при наличии колебаний центра масс сгустка частиц

Измерение положения центра тяжести пучка относительно центра вакуумной камеры ускорителя осуществляется с помощью разрезных пикап-электродов, как уже отмечалось

в разделе 2.4. Сигнал, получаемый с помощью такого пикап-электрода, пропорционален произведению продольного сигнала пучка на величину его поперечного смещения. Если предположить, что на азимуте ускорителя с координатой θ располагается идеальный разрезной пикап-электрод, то сигнал j_{\perp} , получаемый от частицы, совершающей поперечные колебания относительно центра вакуумной камеры при включённом внешнем ускоряющем напряжении, даётся выражением

$$j_{\perp}(t, \theta) = e\hat{x} \cos \phi(t) \sum_k \delta\left(t - \tau - \frac{\theta}{\omega_0} - \frac{2k\pi}{\omega_0}\right), \quad (168)$$

которое после разложения периодической дельта-функции в ряд Фурье преобразуется к виду

$$j_{\perp}(t, \theta) = \frac{e\omega_0}{4\pi} \hat{x} (e^{i\phi(t)} + e^{-i\phi(t)}) \sum_k e^{ik(\omega_0(t-\tau)-\theta)}. \quad (169)$$

Используя разложение (124), а также выражение (85) для фазы бетатронных колебаний ϕ , в котором будем для простоты пренебрегать членом, связанным с зависимостью бетатронной частоты от амплитуды поперечных колебаний, получим вместо (169)

$$j_{\perp}(t, \theta) = \frac{e\omega_0}{4\pi} \hat{x} \sum_{k,m} i^{-m} J_m(((k+Q_0)\omega_0 - \omega_{\xi})\hat{\tau}) e^{i((k+Q_0)\omega_0 t + m\psi - k\theta)} + \text{к. с.}, \quad (170)$$

где $\psi = \Omega t + \psi_0$ (ψ_0 — начальное значение фазы синхротронных колебаний ψ в начальный момент времени $t = 0$).

Применяя к $j_{\perp}(t, \theta)$ преобразование Фурье, нетрудно перейти от (170) к спектру сигнала:

$$j_{\perp}(\omega, \theta) = \frac{e\omega_0}{4\pi} \hat{x} e^{i\phi_0} \sum_{k,m} i^{-m} J_m(((k+Q_0)\omega_0 - \omega_{\xi})\hat{\tau}) \delta(\omega - ((k+Q_0)\omega_0 + m\Omega)) e^{i(m\psi_0 - k\theta)} + \text{к. с.} \quad (171)$$

Видно, что спектр сигнала, получаемого от частицы, совершающей поперечные колебания относительно центра вакуумной камеры, линейчатый, а спектральные линии располагаются на частотах $(k+Q_0)\omega_0 + m\Omega$. Таким образом, вблизи каждой бетатронной линии, соответствующей частоте $(k+Q_0)\omega_0$, имеется бесконечный набор синхротронных сателлитов, амплитуды которых описываются функцией Бесселя $J_m(((k+Q_0)\omega_0 - \omega_{\xi})\hat{\tau})$. Важно отметить, что центр спектра соответствует частоте $\omega_{\xi} = \omega_0 \xi / \eta$. Так как естественное значение хроматичности ξ имеет отрицательный знак, то в отсутствие коррекции хроматичности, частота ω_{ξ} отрицательна выше критической энергии и положительна при $\gamma < \gamma_{tr}$.

Перейдём теперь к рассмотрению сгустка частиц. В отсутствие возмущений амплитуды продольных и поперечных колебаний частиц в сгустке постоянны. Поэтому стационарная часть распределения частиц в фазовом пространстве может быть представлена в виде произведения двух стационарных распределений $g_0(\hat{\tau})$ и $f_0(\hat{x})$, нормированных в соответствии с выражениями

$$\int g_0(\hat{\tau}) \hat{\tau} d\hat{\tau} = \frac{1}{2\pi}; \quad \int f_0(\hat{x}) \hat{x} d\hat{x} = \frac{1}{2\pi}.$$

В отсутствие возмущений центр тяжести сгустка располагается на оси вакуумной камеры, и поперечный сигнал от него J_{\perp} равен нулю:

$$J_{\perp}(t, \theta) = N \int j_{\perp}(t, \theta) g_0(\hat{\tau}) f_0(\hat{x}) \hat{\tau} \hat{x} d\hat{\tau} d\hat{x} d\phi_0 d\psi = 0. \quad (172)$$

На самом деле, как было показано в разделе 2.1, даже в стационарном состоянии сгусток частиц возбуждает квадрупольное магнитное поле. Данное поле не приводит к поперечной неустойчивости пучка, а, добавляясь к внешнему магнитному полю, лишь изменяет поперечную фокусировку частиц, сдвигая, таким образом, бетатронные частоты. Ниже предполагается, что средняя величина кулоновского сдвига включена в бетатронную частоту, которая в дальнейшем будет обозначаться через Q .

При смещении центра тяжести сгустка частиц относительно центра вакуумной камеры возникает возмущение исходного распределения частиц в фазовом пространстве $\Delta F(\phi, \hat{x}, \psi, \hat{\tau}, t)$ и, соответственно, поперечный сигнал от сгустка частиц J_{\perp} может быть вычислен с помощью выражения

$$J_{\perp}(t, \theta) = N_B \int j_{\perp}(t, \theta) \Delta F(\phi, \hat{x}, \psi, \hat{\tau}, t) d\hat{x} d\hat{\tau} d\phi_0 d\psi_0. \quad (173)$$

Предположим вначале, что в сгустке имеется единственная мода синхротронных колебаний с номером m . Данное предположение справедливо при достаточно низкой интенсивности, подобно случаю продольной неустойчивости сгруппированного пучка протонов, рассмотренному в предыдущей главе.

Математическое описание возмущения исходной функции распределения ΔF поддается виду поперечного сигнала от частицы, даваемого формулой (170). Чтобы поперечный сигнал от сгустка J_{\perp} был отличен от нуля, возмущение ΔF должно быть выбрано пропорциональным $\exp(-i\phi - im\psi)$. Поэтому можно описать возмущение функции распределения частиц ΔF выражением

$$\Delta F = h_m(\hat{\tau}, \hat{x}) e^{-i(\phi + m\psi)} e^{i\omega_c t}, \quad (174)$$

где, как это неоднократно делалось ранее, через ω_c обозначена комплексная частота неустойчивости, подлежащая определению; её реальная часть близка к $m\Omega$, а знак её мнимой части показывает, является ли сгусток частиц устойчивым или нет. Здесь введена также функция $h_m(\hat{\tau}, \hat{x})$, которая описывает амплитуду возмущения для частицы, движущейся вдоль фазовой траектории с продольной амплитудой $\hat{\tau}$ и в то же время совершающей поперечные колебания с амплитудой \hat{x} . При этом формула (173) для поперечного сигнала от сгустка частиц примет с учётом определения (174) следующий вид:

$$J_{\perp}(t, \theta) = \pi e \omega_0 N_B i^{-m} \sum_k \int J_m(((k+Q)\omega_0 - \omega_{\xi})\hat{\tau}) h_m(\hat{\tau}, \hat{x}) e^{-ik\theta} e^{i((k+Q)\omega_0 + \omega_c)t} \hat{\tau} \hat{x}^2 d\hat{\tau} d\hat{x}. \quad (175)$$

Применяя далее к выражению (175) преобразование Фурье, получаем спектр поперечного сигнала от сгустка частиц

$$J_{\perp}(\omega, \theta) = 2\pi^2 I_B \sum_k e^{-ik\theta} \rho_m(k) \delta(\omega - (\omega_c + (k+Q)\omega_0)), \quad (176)$$

где через $\rho_m(k)$ обозначена k -ая гармоника возмущения стационарного состояния сгустка при наличии поперечных когерентных колебаний частиц,

$$\rho_m(k) = i^{-m} \int h_m(\hat{\tau}, \hat{x}) J_m(((k+Q)\omega_0 - \omega_\xi)\hat{\tau}) \hat{\tau} \hat{x}^2 d\hat{\tau} d\hat{x}. \quad (177)$$

Таким образом, если частицы совершают когерентные поперечные колебания при одновременной модуляции их плотности в продольном фазовом пространстве, описываемой модой с номером m , то спектр сгустка является линейчатым, причём спектральные линии соответствуют частотам $\omega = (k+Q)\omega_0 + m\Omega$.

2.6.2. Дисперсионное уравнение

Будем, как обычно, исходить из уравнения Власова

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial F}{\partial \hat{x}} \dot{\hat{x}} + \frac{\partial F}{\partial \phi} \dot{\phi} = 0, \quad (178)$$

в котором функция распределения частиц в фазовом пространстве F полагается состоящей из двух частей — стационарного распределения и малой возмущающей добавки ΔF ,

$$F = g_0(\hat{\tau}) f_0(\hat{x}) + \Delta F(t, \hat{\tau}, \psi, \hat{x}, \phi). \quad (179)$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, преобразуем уравнение (178) к виду

$$i(\omega_c - m\Omega) h_m(\hat{\tau}, \hat{x}) e^{-i(\phi+m\psi)} e^{i\omega_c t} = -g_0(\hat{\tau}) \frac{df_0}{d\hat{x}} \dot{\hat{x}}. \quad (180)$$

Выражение для скорости возрастания амплитуды поперечных колебаний $\dot{\hat{x}}$ можно выразить через силу, действующую на частицу, воспользовавшись формулой (88). С учётом определения поперечного импеданса связи Z_\perp , даваемого соотношением (96), имеем

$$\dot{\hat{x}} = \frac{\sin \phi}{\dot{\phi}} \frac{i\beta e}{2\pi R_0 m_0 \gamma} \sum_k Z_\perp(k) \rho_m(k) e^{-ik\omega_0(t-\tau)} e^{i((k+Q)\omega_0 + \omega_c)t}. \quad (181)$$

Учитывая далее, что $\sin \phi = (\exp(\phi) - \exp(-\phi))/2i$, а также отбрасывая в (181) нерезонансный член, нетрудно, после разложения $\exp i((k+Q)\omega_0 - \omega_\xi)\hat{\tau}$ в ряд по функциям Бесселя с помощью соотношения (124) получить для $\dot{\hat{x}}$ следующее выражение:

$$\dot{\hat{x}} = -\frac{\pi e I_B}{2m_0 c \gamma Q} \sum_{l,k} Z_\perp(k) \rho_l(k) i^l J_l(((k+Q)\omega_0 - \omega_\xi)\hat{\tau}) e^{-i(\phi+l\psi)} e^{i\omega_c t}, \quad (182)$$

которое после отбрасывания нерезонансных членов в правой части уравнения (180) позволяет преобразовать уравнение (180) к виду

$$i(\omega_c - m\Omega) h_m(\hat{\tau}, \hat{x}) = \frac{\pi e I_B}{2m_0 c \gamma Q} \sum_k Z_\perp(k) \rho_m(k) i^m J_m(((k+Q)\omega_0 - \omega_\xi)\hat{\tau}) g_0(\hat{\tau}) f_0'(\hat{x}). \quad (183)$$

Умножим обе части последнего уравнения на \hat{x}^2 и затем проинтегрируем их по \hat{x} ; получившийся в правой части уравнения интеграл легко вычисляется:

$$\int_0^\infty f_0'(\hat{x}) \hat{x}^2 d\hat{x} = -2 \int_0^\infty f_0(\hat{x}) \hat{x} d\hat{x} = -\frac{1}{\pi}. \quad (184)$$

С учётом этого получим вместо (183) следующее уравнение:

$$i(\omega_c - m\Omega) \int_0^\infty h_m(\hat{\tau}, \hat{x}) \hat{x}^2 d\hat{x} = -\frac{eI_B}{2m_0c\gamma Q} \sum_k Z_\perp(k) \rho_m(k) i^m J_m(((k+Q)\omega_0 - \omega_\xi)\hat{\tau}) g_0(\hat{\tau}). \quad (185)$$

Здесь важно отметить, что функция $f_0(\hat{x})$, описывающая исходное распределение частиц в поперечном фазовом пространстве, исчезла из дисперсионного уравнения и осталась только стационарная продольная функция распределения $g_0(\hat{\tau})$. Это связано с тем, что решаемая нами задача касается в основном поведения центра масс сгустка частиц. Поэтому в среднем влиянием бетатронных колебаний индивидуальных частиц относительно центра масс сгустка можно пренебречь.

Подобное замечание справедливо также относительно возмущения $h_m(\hat{\tau}, \hat{x})$ — основной интерес представляют средние значения амплитуд бетатронных колебаний частиц \hat{x}_m , зависящих от амплитуды фазовых колебаний $\hat{\tau}$. Определяя зависимость $\hat{x}_m(\hat{\tau})$ соотношением

$$g_0(\hat{\tau}) \hat{x}_m(\hat{\tau}) = \int_0^\infty h_m(\hat{\tau}, \hat{x}) \hat{x}^2 d\hat{x}, \quad (186)$$

можно переписать уравнение когерентного движения сгустка частиц (185) в виде

$$i(\omega_c - m\Omega) \hat{x}_m(\hat{\tau}) = -\frac{eI_B}{2m_0c\gamma Q} \sum_k Z_\perp(k) \rho_m(k) i^m J_m(((k+Q)\omega_0 - \omega_\xi)\hat{\tau}). \quad (187)$$

При этом изменяется определение гармоники возмущения $\rho_m(k)$ — вместо формулы (177) необходимо использовать следующее выражение:

$$\rho_m(k) = i^{-m} \int_0^\infty J_m(((k+Q)\omega_0 - \omega_\xi)\hat{\tau}) g_0(\hat{\tau}) \hat{x}_m(\hat{\tau}) \hat{\tau} d\hat{\tau}. \quad (188)$$

Окончательный вид дисперсионного уравнения получается после умножения обеих частей уравнения (188) на множитель $i^{-m} J_m(((j+Q)\omega_0 - \omega_\xi)\hat{\tau}) g_0(\hat{\tau}) \hat{\tau} d\hat{\tau}$ и последующего интегрирования по $\hat{\tau}$:

$$\begin{aligned} i(\omega_c - m\Omega) \rho_m(j) = \\ -\frac{eI_B}{2m_0c\gamma Q} \sum_k Z_\perp(k) \rho_m(k) \int_0^\infty J_m(((k+Q)\omega_0 - \omega_\xi)\hat{\tau}) J_m(((j+Q)\omega_0 - \omega_\xi)\hat{\tau}) g_0(\hat{\tau}) \hat{\tau} d\hat{\tau}, \\ -\infty < j < \infty. \end{aligned} \quad (189)$$

Отметим, что данная бесконечная система дисперсионных уравнений является аналогом системы уравнений (142), полученной в предыдущем разделе для продольной неустойчивости сгруппированного пучка протонов. Отличие заключается в том, что под знаком интеграла в (189) находится функция распределения частиц в продольном фазовом пространстве $g_0(\hat{\tau})$, а не её производная, как это было в системе уравнений (142). Кроме этого, в случае поперечного движения неустойчивой может быть мода с номером $m = 0$, которая, кстати, является основной, так как имеет, как правило, наибольшую величину инкремента. Кроме этого, на величину инкремента поперечной неустойчивости существенное влияние оказывает хроматичность ускорителя, сдвигающая спектр сгустка по частоте на величину ω_ξ .

2.6.3. Инкременты неустойчивостей

При анализе инкрементов продольной неустойчивости сгруппированного пучка протонов исходное распределение частиц в фазовом пространстве $g_0(\hat{\tau})$ полагалось постоянным, что позволило легко решить систему дисперсионных уравнений (142). Выше отмечалось, что сравнение полученных таким образом результатов с имеющимися в литературе данными для параболической зависимости $g_0(\hat{\tau})$ показывает, что они практически совпадают, по крайней мере в наиболее интересном случае взаимодействия сгустков частиц с резонансными элементами ускорителя. Слабое влияние вида исходного распределения частиц в фазовом пространстве на величины инкрементов объясняется тем, что оно входит в дисперсионные уравнения под знаком интеграла, так что его воздействие на неустойчивость естественным образом усредняется.

Подобным способом может быть решена и система уравнений (189), если исходить из так называемой модели "пустотелого" сгустка, для которого $g_0 \sim \delta(2\hat{\tau}/\tau_B - 1)$. В таком случае с учётом формулы (188) решение системы дисперсионных уравнений (189) может быть представлено в виде

$$\omega_c = m\Omega + \frac{eI_B}{4\pi m_0 \gamma c Q} \sum_k iZ_{\perp}(\omega_k) \Phi_m(\omega_k - \omega_{\xi}), \quad (190)$$

где через Φ_m обозначена функция, описывающая спектр пучка и даваемая для рассматриваемого здесь распределения $g_0(\hat{\tau})$ выражением

$$\Phi_m(\omega) = J_m^2\left(\frac{\omega\tau_B}{2}\right). \quad (191)$$

На рис. 36а представлены спектры пучка для двух низших продольных мод $m = 0$ и $m = 1$, рассчитанные с помощью формулы (191) для случая "пустотелого" сгустка и равной нулю хроматичности ускорителя. При $\omega_{\xi} = 0$ спектры симметричны относительно начала координат, а при конечной величине хроматичности они сдвигаются по частоте на ω_{ξ} : $\Phi_m = \Phi_m(\omega - \omega_{\xi})$. Частотная ширина спектра Δf для низшей моды ($m = 0$) составляет примерно $1/\tau_B$. Спектры мод с номерами $m \geq 1$ имеют по два основных максимума, расположенных на частотах $f \simeq \pm(m+1)/2\tau_B$, причём ширина каждого из этих максимумов также равна примерно $1/\tau_B$. Следует отметить, что реальный пучок имеет линейчатый спектр, а кривая $F_m(\omega)$ является огибающей спектра. Если в ускорителе имеется единственный сгусток, то его спектральные линии располагаются на частотах $\omega_k = (k+Q)\omega_0$, где k — целые числа (положительные или отрицательные). Для n -ой моды связанных колебаний сгустков частиц спектральные линии соответствуют частотам $\omega_k = (n+kq+Q)\omega_0$ (при условии, что в ускорителе имеется q одинаковых сгустков, где q — кратность ускорения; $n = 0, 1, 2, \dots, q-1$).

Система дисперсионных уравнений (189) легко решается также при произвольной зависимости $g_0(\hat{\tau})$ в случае, когда пучок взаимодействует с узкополосным резонатором, в полосу пропускания которого попадает единственная гармоника с частотой $\omega = \omega_k$. Удерживая в правой части (189) член с данным номером k и полагая $j = k$, имеем

$$\omega_c = m\Omega + \frac{eI_B}{4\pi m_0 \gamma c Q} iZ_{\perp}(\omega_k) \Phi_m(\omega_k - \omega_{\xi}); \quad (192)$$

при этом спектральная огибающая $\Phi_m(\omega)$ даётся формулой

$$\Phi_m(\omega) = 2\pi \int_0^{\infty} J_m^2(\omega\hat{\tau}) g_0(\hat{\tau}) \hat{\tau} d\hat{\tau}. \quad (193)$$

На рис. 36б даны спектральные огибающие $\Phi_{0,1}(\omega)$, вычисленные с помощью формулы (193) для случая постоянной фазовой плотности — $g_0(\hat{\tau}) = \text{const}$ ($\hat{\tau} \leq \tau_B/2$). Видно, что при переходе к постоянной фазовой плотности огибающие спектров становятся более плавными, а сами спектры несколько уширяются. Однако качественный характер спектров в сравнении со случаем "пустотелого" сгустка изменяется незначительно — отличия в расположении и величинах их максимумов несущественны, как это следует из сравнения данных, представленных на рис. 36а и б.

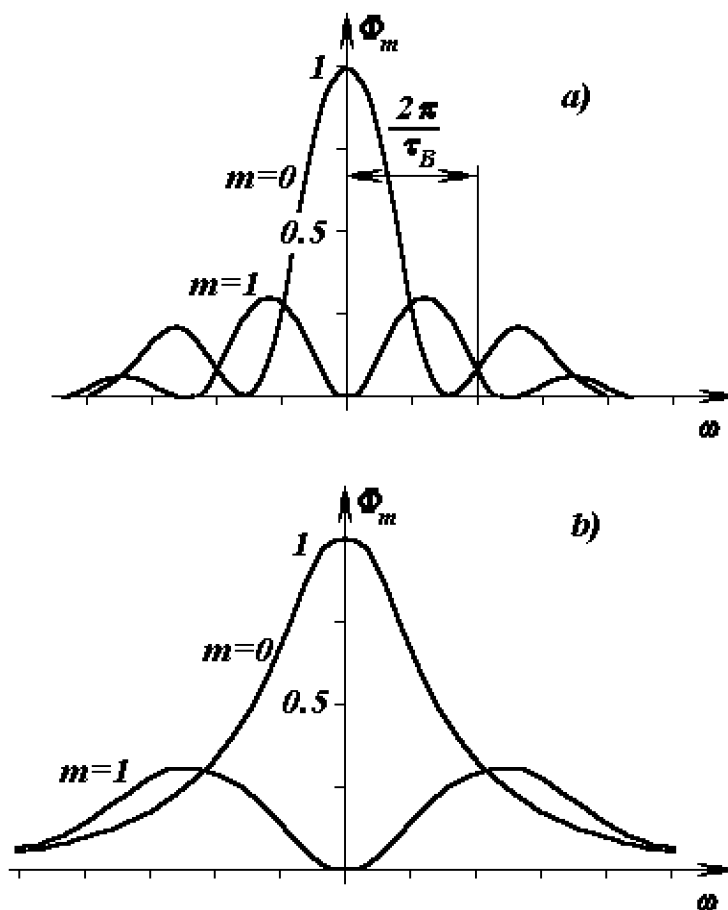


Рис. 36. Спектр пучка для мод $m = 0$ и $m = 1$ ($\omega_\xi = 0$).

Рассмотрим теперь противоположный предельный случай очень широкой полосы пропускания, когда величина $Re Z_k$ примерно постоянна в пределах спектра сгустка, представленный на рис. 37. Резистивная часть импеданса соответствует сопротивлению стенок гладкой вакуумной камеры ускорителя, а спектр сгустка, сдвинутый за счёт хроматичности на положительный фазовый угол χ , — нижней моде колебаний типа голова-хвост ($m = 0$). При вычислении $Im \omega_c$ с помощью формулы (190) можно в рассматриваемом случае вынести $Re Z_k$ за знак суммы, а оставшуюся сумму факторов $\Phi_0(\omega_k - \omega_\xi)$ нетрудно оценить, учитывая определение (191) и переходя в (190) от суммирования к интегрированию,

$$\sum_k \Phi_0(\omega_k - \omega_\xi) \simeq \frac{4}{\omega_0 \tau_B} \int_0^\infty J_0^2(x) dx \simeq \frac{2\pi}{\omega_0 \tau_B}.$$

В результате получим следующую формулу для $Im \omega_c$:

$$Im \omega_c \simeq \frac{e\beta}{\gamma m_0} \frac{1}{2Q\omega_0} \frac{Re Z_k(\omega_\xi) I}{2\pi R_0 B}, \quad (194)$$

которая фактически совпадает с критерием поперечной неустойчивости однородного пучка протонов, даваемого формулой (112), если в последней заменить ток пучка $I = qI_B$ на его локальное значение в центре сгустка, равное в грубом приближении I/B .

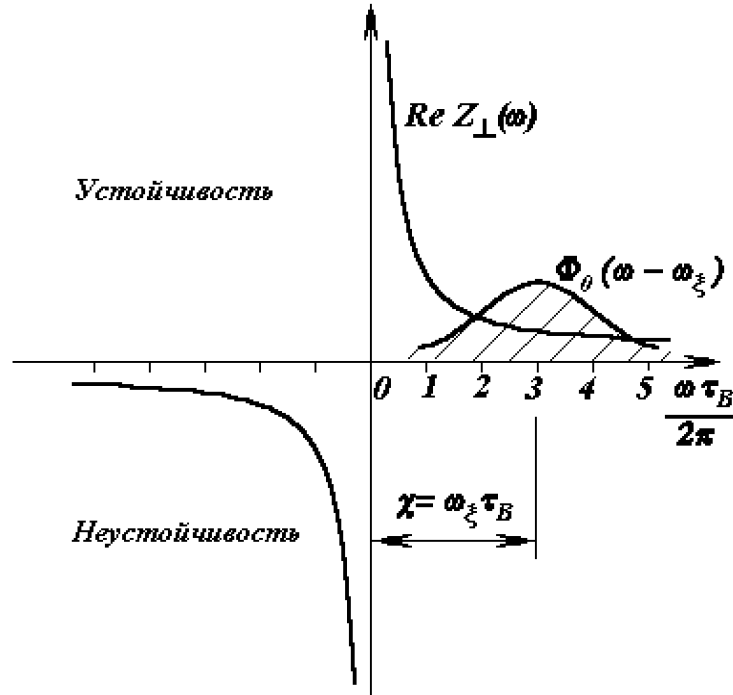


Рис. 37. Пример слабой зависимости $Re Z_k(\omega)$.

Менее очевидный случай показан на рис. 38, где представлен линейчатый спектр сгустка частиц для низшей продольной моды $m = 0$. Предполагается, что значение частоты бетатронных колебаний Q несколько меньше целого числа, а сдвиг спектра относительно начала координат из-за не равной нулю хроматичности ускорителя невелик. Подобно случаю узкополосного импеданса здесь основной вклад в неустойчивость даёт единственная гармоника с частотой $\omega_k = (k + Q)\omega_0$, ближайшая к началу координат ($\omega = 0$), так как данной частоте соответствует очень большая величина стеночного импеданса $Re Z_k(\omega)$. Если же значение бетатронной частоты выбрать близким к целому числу, но превышающим его, то будет обеспечена устойчивость дипольных колебаний сгустка частиц для рассматриваемой моды $m = 0$.

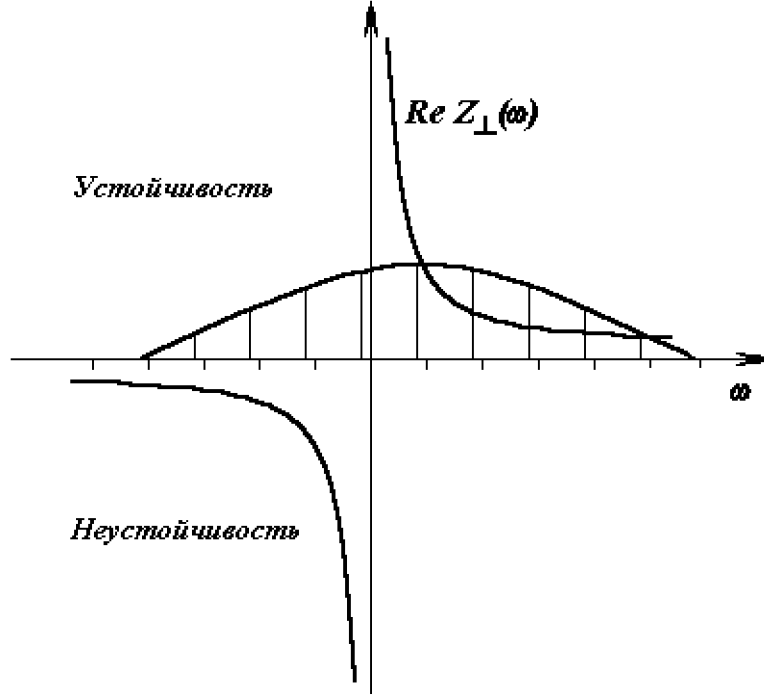


Рис. 38. Расположение спектральных линий при $Q + k \simeq 0$ для моды $m = 0$.

2.6.4. Поперечная неустойчивость сгустка частиц при большой интенсивности

По аналогии с продольной неустойчивостью сгустка частиц при достаточно большой интенсивности следует ожидать возникновения связи продольных мультипольных мод и в случае поперечной неустойчивости. Подобная связь действительно возникает при величинах когерентных сдвигов бетатронных частот, сравнимых с частотой фазовых колебаний Ω . С учётом связи мультипольных мод друг с другом, система дисперсионных уравнений может быть записана в виде, аналогичном системе уравнений (159), полученной при рассмотрении продольной неустойчивости сгустка

$$\rho(j) = \frac{1}{r_{\perp}} \sum_k i Z_{\perp}(k) M_{jk} \rho(k). \quad (195)$$

Здесь через r_{\perp} обозначена величина, имеющая размерность Ом/м:

$$r_{\perp} = \frac{4\pi m_0 c \gamma Q \Omega}{e I_B}, \quad (196)$$

а матричный элемент M_{jk} имеет вид

$$M_{jk} = \sum_m \frac{2\pi}{(\omega_c/\Omega) - m} \int_0^{\infty} J_m(\omega_k \hat{\tau}) J_m(\omega_j \hat{\tau}) g_0(\hat{\tau}) \hat{\tau} d\hat{\tau}, \quad (197)$$

где $\omega_k = (k + Q)\omega_0 - \omega_{\xi}$.

В качестве иллюстрации снова рассмотрим узкополосный резонатор, импеданс которого отличен от нуля лишь на частотах $\pm k_0 \omega_0$ и равен соответственно $\pm R_{\perp}$, а хроматичность

ускорителя будем, для простоты, считать равной нулю. Предположим, кроме этого, что значение бетатронной частоты Q близко к целому числу ($|\Delta Q| \ll 1$, где $|\Delta Q|$ — отличие бетатронной частоты от ближайшего целого числа). При этом бесконечная система дисперсионных уравнений (195) сводится к системе из двух линейных уравнений относительно гармоник $\rho(k_1)$ и $\rho(k_2)$, где $k_{1,2} \simeq \mp k_0 + Q$. Учитывая очевидные соотношения между элементами матрицы M : $M_{k_2, k_2} = M_1 + M_2 = M_{k_1, k_1}$, $M_{k_1, k_2} = (-1)^m (M_1 - M_2) = M_{k_2, k_1}$, где

$$M_1 = \frac{\Phi_m(k_0\omega_0)}{(\omega_c/\Omega) - m}; \quad M_2 = \frac{\Phi_{m+1}(k_0\omega_0)}{(\omega_c/\Omega) - (m+1)},$$

а также связь между гармониками $\rho(k)$ и $\rho_m(k) - \rho(k_2) = \rho_m(k_2) + \rho_{m+1}(k_2) = \rho_1 + \rho_2$, $\rho(k_1) = (-1)^m(\rho_1 - \rho_2)$, нетрудно перейти от системы уравнений относительно гармоник $\rho(k_{1,2})$ к системе уравнений относительно гармоник $\rho_{1,2}$, аналогичной системе (163), полученной в предыдущей главе для продольной неустойчивости сгустка частиц:

$$\rho_{1,2} = \frac{2iR_\perp}{r_\perp} M_{1,2} \rho_{2,1}, \quad (198)$$

решение которой может быть записано в виде, подобном (166):

$$\omega_c = \Omega \left(m + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4R_\perp^2}{r_\perp^2} \Phi_m(k_0\omega_0) \Phi_{m+1}(k_0\omega_0)} \right). \quad (199)$$

Из последней формулы, в частности, видно, что связь мультипольных мод имеет место при значении тока сгустка I_B , превышающем пороговое значение $(I_B)_{th}$, равное

$$(I_B)_{th} = \frac{\pi m_0 c Q \Omega}{e R_\perp \sqrt{\Phi_m(k_0\omega_0) \Phi_{m+1}(k_0\omega_0)}}. \quad (200)$$

Таким образом, развитие поперечной неустойчивости сгустка частиц с учётом связи мультипольных мод друг с другом совершенно аналогично связи мод, имеющей место при продольной неустойчивости, рассмотренной в конце предыдущей главы.

В заключение настоящего раздела отметим, что при наличии связи мультипольных мод продольная и поперечная неустойчивости обычно имеют существенно более высокие инкременты, по сравнению со случаем не связанных мультиполей. Подобные быстрые неустойчивости, наблюдавшиеся на многих ускорителях, удалось описать количественно лишь после разработки соответствующей теории, учитывающей связь мультипольных мод. В литературе имеется также описание неустойчивости с учётом связи мультипольных мод в случае, когда сгусток частиц взаимодействует с широкополосным резонатором, добротность которого полагается равной единице (выше отмечалось, что с помощью данной модели описывается импеданс, обусловленный изменениями поперечного сечения вакуумной камеры в зависимости от азимута ускорителя). Результаты расчётов зависят от длины сгустка и собственной частоты резонатора, однако оказывается, что минимум порогового значения тока сгустка описывается формулой (200), в которой необходимо только заменить ток $(I_B)_{th}$ на $(I_B)_{th}/B$.

При написании настоящей работы использовалась следующая литература:

- [1] Коломенский А.А., Лебедев А.Н. *Теория циклических ускорителей*. — М.: Физматгиз, 1962.
- [2] Ливингуд Дж. *Принципы работы циклических ускорителей*. — М.: Изд.-во иностран. литературы, 1963.
- [3] Лебедев А.Н., Шальнов А.В. *Основы теории и техники ускорителей заряженных частиц*. — М.: Энергоатомиздат, 1991.
- [4] Брук Г. *Циклические ускорители заряженных частиц. Введение в теорию*. — М.: Атомиздат, 1970.
- [5] *Theoretical Aspects of the Behaviour of Beams in Accelerators and Storage Rings*. — In: Proceed. of the First Intern. Accel. School, CERN 77-13, Geneva, 1977.
- [6] *General Accelerator Physics*. — In: Proceed. 1984 CERN Accel. School, CERN 85-19, Geneva, 1985.
- [7] *Advanced Accelerator Physics*. — In: Proceed. 1985 CERN Accel. School, CERN 87-03, Geneva, 1987.
- [8] *Fifth Advanced Accel. Physics Course*. — In: Proceed. 1993 CERN Accel. School, CERN 95-06, Geneva, 1995.

Рукопись поступила 24 августа 1999 г.

П.Т. Пашков.
Основы теории протонного синхротрона.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы \LaTeX .
Редактор Н.В.Ежела. Технический редактор Н.В.Орлова.

Подписано к печати 26.08.99. Формат $60 \times 84/8$. Офсетная печать.
Печ.л. 14,12. Уч.-изд.л. 11,3. Тираж 160. Заказ 155. Индекс 3649.
ЛР №020498 17.04.97.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

