И
Ф
В
Э
IHEP

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 99–57
ОТФ

М.Л. Некрасов

ЭФФЕКТЫ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ СОКРАЩЕНИЯ В ПРОЦЕССАХ РОЖДЕНИЯ W- И Z-БОЗОНОВ В ПОДХОДЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Направлено в *The European Physical Journal C*

Протвино 1999

УДК 539.1.01 М–24

Аннотация

Некрасов М.Л. Эффекты конечной ширины и калибровочные сокращения в процессах рождения W- и Z-бозонов в подходе модифицированной теории возмущений: Препринт ИФВЭ 99–57. – Протвино, 1999. – 24 с., библиогр.: 26.

Процессы рождения нестабильных состояний W- и Z-бозонов рассматриваются в недавно предложенной модифицированной теории возмущений (МТВ), основанной на разложении вероятностей, а не амплитуд. В таком подходе неинтегрируемые сингулярности в фазовом пространстве, присущие обычной ТВ, проявляются как сингулярности по константе связи (компенсируемые далее распадными факторами нестабильных состояний). В настоящей работе проводится систематическое исследование свойств МТВ, и полученные результаты сравниваются с результатами обычного подхода, основанного на вычислении амплитуды с дайсоновским суммированием. Найдено решение проблемы редуцирования одного петлевого порядка ТВ в резонансной области, приводящего в обычном подходе к парадоксальным результатам. На основе полученного решения дано доказательство калибровочных сокращений в любом порядке разложения МТВ. Показано, что полученные в МТВ результаты могут быть воспроизведены в пределах заданной точности в обычном подходе при условии добавления к вероятности некоторого аномального члена. Найдено простое обобщение fermion-loop схемы, позволяющее осуществить полное описание процессов парного рождения W в приближении NLO.

Abstract

Nekrasov M.L. Finite width Effects and Gauge Cancellations in W- and Z-Bozon Pproduction in Framework of Modified Perturbation Theory: IHEP Preprint 99–57. – Protvino, 1999. – p. 24, refs.: 26.

The processes of unstable W- and Z-boson production are considered in a recently proposed modified perturbation theory (PT), based on expansion directly of probabilities, instead of amplitudes. In such approach the nonintegrable singularities in a phase space, which are intrinsic in a usual PT, appear as a singularity on a coupling constant (compensated then by the decay factors of unstable states). In the present work the systematic research of the modified PT is carried out and the obtained results are compared to ones of the usual approach based on calculation of amplitude with Dyson resummation. The solution of the problem of reducing one loop-order in a resonance region, causing to paradoxical results in the usual approach, is discovered. On the basis of this solution the proof of gauge cancellations in any order of the modified PT is given. It is shown, that the results obtained in the modified PT may be reproduced within the limits of given accuracy in the usual approach provided that an anomalous term is added to the probability. A simple generalization of the fermion-loop scheme is determined which allows one to fulfil the complete description of W-pair production in NLO approximation.

Введение

Во многих теоретико-полевых приложениях стандартной модели, связанных с настоящими и будущими коллайдерными экспериментами, необходим учет эффектов нестабильности W- и Z-бозонов (а также хиггсовского бозона, топ-кварка и т.д.) [1]. Обычный способ учета нестабильности в теории поля состоит в дайсоновском суммировании собственной энергии в знаменателе пропагатора [2]. Такая процедура позволяет избавиться от неинтегрируемой особенности в фазовом пространстве, связанной с вкладами "вылетающей" нестабильной частицы. Однако она приводит также к выходу за рамки вычислений в фиксированном порядке теории возмущений (ТВ). В калибровочной теории это может привести [3, 4] к потере калибровочной инвариантности и нарушению тождеств Уорда (ТУ). Последнее обстоятельство, вследствие выхода из-под контроля высокоэнергетического поведения теории, может привести к возникновению больших ошибок в описании конкретных процессов.

При описании одиночного рождения Z-бозона (LEP1) в пределах точности следующего за главным приближения (NLO) проблему калибровочных сокращений удалось решить *ad hoc*. Ключевым пунктом явилось применение схемы вычислений, в которой в знаменателе пропагатора собираются только калибровочно-инвариантные вклады в собственную энергию (в данном случае 1-петлевые фермионные и некоторые 2-петлевые), а калибровочно-зависимые вклады разлагаются по правилам обычной ТВ. В результате применения такой схемы амплитуду удалось представить [5] в виде произведения калибровочно-независимых факторов — двух вершинных и одного резонансного. Однако этот результат не является универсальным. Во всяком случае, в настоящее время не ясно, сохранится ли указанное свойство амплитуды в следующем порядке точности, определяемом 2-петлевыми поправками в вершинных факторах (NNLO).

В случае парного рождения нестабильных частиц (LEP2) амплитуду не удается представить в полностью калибровочно-инвариантном виде[1]. Тем не менее надежды продвинуться обычно связываются с достаточно общей идеей определения некоторого мини-

[1]Следует отметить, что помимо обсуждаемого здесь подхода, основанного на дайсоновском суммировании, существует альтернативная схема, называемая полюсной [6]. Калибровочная инвариантность в этой схеме заложена изначально. Однако, к сожалению, в ней не разработан алгоритм вычисления поправочных членов. Во всяком случае на сегодняшний день [7] вычисления в этой схеме не вышли за рамки приближения двойного полюса. Область применимости такого приближения весьма ограничена и точность недостаточно высока.

мального набора диаграмм Фейнмана, обеспечивающего одновременно и калибровочные сокращения и достаточную точность описания. В пределах NLO в таком качестве обычно привлекается fermion-loop схема [8, 9] и/или некоторое ее обобщение [10], определенное в подходе background-field формализма, справедливое также за пределами NLO. Однако в обеих схемах минимальный набор определить не удается, пока остается нерешенной проблема редуцирования одного петлевого порядка ТВ в резонансной области [11,12].

Поясним подробнее суть этого явления. Дело в том, что для достижения точности NLO в знаменателе нестабильного пропагатора не достаточно ограничиться суммированием только 1-петлевых вкладов в собственную энергию, поскольку в резонансной области, определяемой условием $p^2 - M^2 = O(g^2)$, знаменатель целиком является величиной порядка $O(g^2)$. Таким образом, в резонансной области 1-петлевые вклады в знаменателе фактически проявляются в лидирующем приближении, а не в поправочном. Следовательно, для достижения NLO точности в знаменателе нестабильного пропагатора необходим учет также 2-петлевых вкладов. Однако это едва ли оставляет шансы на сохранение ТУ без одновременного учета 2-петлевых вкладов в вершинных факторах, что на сегодняшний день неосуществимо [11,12].

На самом деле, указанный эффект приводит к совершенно парадоксальным последствиям. С наибольшей четкостью это можно увидеть в подходе background-field формализма. Исключительной его особенностью является сохранение ТУ при условии, что вместе с дайсоновским суммированием *всех* вкладов в собственную энергию вплоть до n-петлевых в вершинных функциях тоже учитываются *все* вклады вплоть до n-петлевых [10].

Предположим, что нам известна вычисленная таким образом амплитуда с учетом всех $(n+1)$-петлевых вкладов. Тогда в силу редуцирования одного петлевого порядка ТВ вблизи положения резонанса эта амплитуда определена с $O(g^{2n})$-точностью. Далее вспомним, что $(n+1)$-петлевые поправки в собственную энергию в знаменателе пропагатора являются обязательными для обеспечения указанной точности. Вместе с этим $(n+1)$-петлевые вклады в вершинных факторах являются лишними, поскольку они проявляются в следующем порядке разложения ТВ. Следовательно, они не могут скорректировать ТУ и обеспечить необходимые сокращения в амплитуде в пределах $O(g^{2n})$-точности. Тем не менее ТУ оказываются скорректированными [10]. С точки зрения обычных представлений, объяснения этому эффекту нет.

Решение парадокса можно дать в подходе модифицированной ТВ (МТВ) [13], в основе которой лежит идея разложения по степеням константы связи непосредственно вероятности, а не амплитуды (амплитуда до вычисления вероятности считается полной). Такой порядок действий позволяет проследить органическую связь между возникновением неинтегрируемой особенности типа $|p^2 - M^2|^{-2}$ в фазовом пространстве и редуцированием одного порядка ТВ в резонансной области. Для того чтобы это показать, напомним, что вероятность определяется как интеграл с некоторым весом по кинематическим переменным от перенормированной квадрированной амплитуды. Далее заметим, что до разложения под знаком интеграла интеграл является сходящимся, поскольку мнимая часть собственной энергии в знаменателе нестабильного пропагатора регуляризует кинематические сингулярности. Тот факт, что интеграл становится расходящимся после разложения ТВ под знаком интеграла (т.е. при $g^2 \to 0$), означает, что интеграл как функция константы связи содержит сингулярность по g^2. Таким образом, в МТВ кинематические сингулярности трансформируются в сингулярности по константе связи. По сути, это и есть указанный выше эффект редуцирования в резонансной области.

Следует подчеркнуть, что, исходя только из амплитуды в присутствии нестабильных состояний, нельзя дать математически корректную оценку остаточного члена разложения вероятности, поскольку в резонансной области разложение амплитуды содержит неопределенность типа 0/0. (В более радикальной форме это утверждение иногда формулируется как неприменимость обычной ТВ в присутствии фундаментальных нестабильных состояний.) Однако, исходя непосредственно из анализа вероятности такую оценку дать можно. Более того, *в пределах заданной точности* в вероятности можно воспроизвести вклады $(n+1)$-петлевых поправок в знаменателе пропагатора в виде отдельного *аддитивного* аномального члена. Вследствие аддитивности этого члена можно дать независимое доказательство калибровочных сокращений порождаемых им вкладов. Подчеркнем, что указанный результат не означает, что включение $(n+1)$-петлевых поправок в знаменателе пропагатора не влечет за собой нарушение ТУ для n-петлевых функций Грина. Он означает только то, что вклады, нарушающие ТУ, при вычислении вероятности оказываются за пределами интересующей нас точности.

В настоящей работе подробно раскрываются приведенные выше положения и на их основе дается доказательство калибровочных сокращений в любом конечном порядке разложения МТВ. Заметим, что этот результат предсказывался в пионерской работе [13], предложившей МТВ, и показавшей, что в результате применения асимптотической операции (АО) [14,15,16] вероятность можно представить в виде *полного* разложения по степеням константы связи, независимо от присутствия весовой функции в интеграле для вероятности. Однако рассуждения работы [13] в той части, которая касается проблемы калибровочных сокращений, не являются полными, поскольку при том, что они были построены на сравнении с результатами обычного подхода, в них была опущена проблема редуцирования одного петлевого порядка ТВ в резонансной области и не рассматривалась проблема оценки остаточного члена разложения амплитуды. Настоящая работа восполняет этот пробел.

Другим аспектом настоящей работы является систематическое исследование свойств МТВ, основанное на анализе АО-разложения квадрированного нестабильного пропагатора. В частности, показывается независимость развиваемого формализма от схемы ультрафиолетовых (УФ) перенормировок и выводится рекуррентное соотношение для инфракрасных (ИК) контрчленов, являющихся специфическими ингредиентами формализма АО. Важным результатом является обнаружение упомянутого выше аномального аддитивного члена, а также построение некоторого простого обобщения fermion-loop схемы, позволяющего описать процессы парного рождения W с обеспечением и калибровочных сокращений, и точности NLO.

Структура настоящей работы следующая. В следующем разделе осуществляется общая постановка задачи АО-разложения. В разделе 2 дается вывод основных формул МТВ (в основном содержание этого раздела следует работе [13]). В разделе 3 исследуются свойства АО-разложения нестабильного квадрированного пропагатора. В частности, выводится базовая формула (23), с помощью которой далее, в разделе 5 разрешается указанный выше парадокс, связанный с редуцированием одного петлевого порядка ТВ в резонансной области. В разделе 4 обсуждается вопрос о роли и способах учета мягких фотонов. Раздел 6 посвящен построению упомянутого выше обобщения fermion-loop схемы. В заключительном разделе проводится краткое обсуждение результатов.

1. Нестабильный пропагатор в АО, постановка задачи

Вопросы, затронутые в данном разделе, связаны исключительно со структурой знаменателя пропагатора нестабильной частицы (вне зависимости от ее типа). В этой связи, отбрасывая (временно) все факторы в числителе, запишем ее пропагатор в виде

$$\Delta(\alpha;\tau) = \frac{1}{M^2 - p^2 - \Sigma} \;\;=\;\; \frac{1}{\tau - \alpha h(\tau) - \mathrm{i}\,\alpha f(\tau)}\;, \tag{1}$$

где $\alpha = g^2/(4\pi)$; $\tau = M^2 - p^2$, M и p — масса и импульс нестабильного состояния (здесь и далее M^2 понимается без мнимой добавки $-\mathrm{i}\varepsilon$); Σ обозначает перенормированную собственную энергию[2]; $\alpha\, h$ и αf — ее реальная и мнимая части. Множитель α перед функциями h и f выделен для удобства. Для определенности будем считать, что пропагатор (1) определен в схеме MS перенормировки[3]. Свойство нестабильности по определению означает, что $f \neq 0$ в некоторой окрестности точки $\tau = 0$. По соображениям причинности в этой окрестности $f > 0$. Далее будем полагать, что размеры указанной окрестности составляют величину порядка $O(\alpha)$, и что она охватывает решение уравнения $\tau - \alpha\, h(\tau) = 0$. Функция $h(\tau)$, вообще говоря, может быть отличной от нуля при $\tau = 0$.

Вероятность процесса, описывающего рождение нестабильной частицы, определяется интегралом по некоторой области с весом $\varphi(\tau)$ от квадрированного пропагатора $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$:

$$P(\alpha) = \int d\tau\; \varphi(\tau)\; \mathcal{W}(\alpha;\tau), \tag{2}$$

$$\mathcal{W}(\alpha;\tau) \equiv |\Delta(\tau)|^2 = \frac{1}{[\tau - \alpha\, h(\tau)]^2 + \alpha^2 f^2(\tau)}. \tag{3}$$

Весовая функция $\varphi(\tau)$ соответствует прежде всего остальным частям диаграммы унитарности, описывающей вероятность рождения нестабильной частицы. В процессах с заряженными начальными и конечными состояниями она включает в себя эффекты излучения фотонов из начальных и конечных состояний (конволюция). Кроме этого, весовая функция включает в себя аппаратные (апертурные и др.) факторы экспериментальной установки.

Функция $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$ в формуле (3) в силу свойства $f \neq 0$ является конечной и, следовательно, интегрируемой в окрестности точки $\tau = 0$. Однако в пределе $\alpha = 0$ в $\mathcal{W}$ возникает неинтегрируемая особенность $1/\tau^2$. Обычно этот факт трактуется как указание на невозможность прямого применения ТВ и полного разложения по степеням константы связи [1–12]. Тем не менее, для вероятности $P(\alpha)$ разложение существует. Действительно, факт возникновения неинтегрируемой особенности с чисто математической точки зрения означает, что *результат* интегрирования $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$ с весом $\varphi(\tau)$ содержит сигулярность по α при $\alpha \to 0$. Однако, если эту сингулярность удастся выделить, и она окажется степенной, то далее разложение интеграла становится возможным — с тем лишь отличием,

[2] В случае векторных бозонов собственная энергия содержит две лоренц-ковариантные структуры, пропорциональные $g_{\mu\nu}$ и $p_\mu p_\nu$. В пропагаторе (1) учтены вклады только первой структуры. Вторая структура дает вклад в нефизический полюсной член, анализ которого будет проведен отдельно в разделе 5, см. формулы (27) и (28).

[3] Для нас неважно, в какой схеме определена масса M, поскольку развиваемый формализм не зависит от схемы перенормировки (см. далее). Важным является то обстоятельство, что вариация массы при переходе от одной схемы перенормировки к другой составляет величину порядка $O(\alpha)$.

что мы получим разложение Лорана, а не Тэйлора. (Отметим, что весовая функция $\varphi(\tau)$, в действительности, степенным образом зависит от параметра α. Следовательно, разложение интеграла в конечном счете все равно может принять форму разложения Тэйлора, как в обычной ТВ. Однако *a priori* это свойство не очевидно. Поэтому для анализа проблемы мы сначала рассматриваем $\varphi(\tau)$ как произвольную достаточно гладкую пробную функцию, вообще говоря отличную от нуля при $\tau = 0$, и *не зависящую от параметра* α.)

Для выяснения вида указанной выше сингулярности по α поступим следующим образом. Воспользуемся тем свойством, что сингулярность возникает в результате интегрирования по области малых τ, и удержим в функциях $h(\tau)$ и $f(\tau)$ только главные члены их асимптотического разложения при $\tau \to 0$. Другими словами, аппроксимируем функции $h(\tau)$ и $f(\tau)$ их значениями в нуле $h_0 = h(0)$ и $f_0 = f(0)$. В результате, с точностью до погрешности, не существенной для главного вклада при $\alpha \to 0$ (погрешность далее будет определена), получим следующую аппроксимацию для $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$:

$$\mathcal{W}(\alpha;\tau) \cong \frac{1}{[\tau - \alpha\, h_0]^2 + \alpha^2 f_0^2}. \tag{4}$$

Отсюда видно в силу однородности по τ и α, что интегрирование $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$ по τ с весом $\varphi(\tau)$ приводит к сингулярности вида $1/\alpha$.

Действительно, разобьем область интегрирования в формуле (2) на $|\tau| < const \times \alpha$ и $|\tau| > const \times \alpha$ с достаточно большим $const$. Интеграл по второй области даст конечный вклад. Интеграл по первой области приводит к указанной сингулярности по α. Это легко показать, осуществив замену переменной интегрирования $\tau \to \alpha\,\tau$ и воспользовавшись свойством $\varphi(0) \neq 0$. Более того, мы можем утверждать, что коэффициент при $1/\alpha$ пропорционален f_0^{-1} и не зависит от h_0. Действительно, f_0 можно включить в нормировку α, а величина h_0 не дает вклад в главный член разложения, поскольку при $h_0 = 0$ в $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$ не возникает сингулярности по τ. По аналогичным соображениям весовая функция $\varphi(\tau)$ в главный член разложения интеграла дает вклад в виде тривиального фактора $\varphi(0)$.

Итак, несмотря на то, что разложение $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$ по параметру α под знаком интеграла является некорректной операцией, разложение *результата* интегрирования имеет смысл, причем некоторые свойства такого разложения можно определить до фактического вычисления интеграла. Для систематических вычислений такого рода существует система специально разработанных приемов, получившая название метода асимптотической операции, АО [14–16]. Ключевым пунктом в АО является переход к расширительному толкованию подынтегрального выражения как произведения ядра обобщенной функции на пробную функцию [17,18]. Таким образом, речь фактически идет о трактовке интеграла как непрерывного линейного функционала от функции $\varphi(\tau)$. В тех случаях, когда интеграл хорошо определен (интеграл *до разложения* подынтегральной функции), указанное обобщение не приводит ни к каким модификациям. Однако после формального разложения под знаком интеграла, если отдельные его члены оказываются неинтегрируемыми в обычном смысле функциями, новое толкование позволяет придать им смысл как интегрируемым *обобщенным* функциям.

Таким образом, проблема разложения под знаком интеграла, в принципе, решается при помощи метода обобщенных функций. Далее следует побеспокоиться об асимптотических свойствах разложения. Для этого в АО используется свойство неоднозначности операции доопределения неинтегрируемых функций. Вообще, как хорошо известно из опыта УФ перенормировок, всякое устранение расходимостей может сопровождаться возникновением неоднозначностей. При доопределении интеграла методом обобщенных функций неоднозначности описываются путем добавления к обобщенной функции так называемых контрчленов, пропорциональных дельта функциям и/или их производным, сосредоточенным строго в точке положения неинтегрируемой особенности[4]. В задаче асимптотического разложения значения коэффициентов при контрчленах полностью фиксируются требованием воссоздания того (правильного) результата, который должен быть получен при разложении исходного интеграла. (Напомним, что до разложения подынтегральной функции интеграл был хорошо определен, и в нем не было неоднозначностей.) Фиксирование неоднозначностей осуществляется в каждом порядке разложения, причем практический рецепт *не* опирается на предварительное знание результата разложения. Возникающие контрчлены содержат полную информацию о сингулярных по параметру разложения членах (выше мы убедились в их существовании). Одновременно контрчлены могут содержать также некоторые несингулярные по параметру α вклады, корректирующие асимптотическое поведения разложения.

В рассмотренном выше примере контрчлен, описывающий главный член асимптотического разложения $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$, имеет вид $c/(\alpha f_0) \times \delta(\tau)$, где c — некоторый числовой коэффициент. В данном конкретном случае значение коэффициента c, как и вообще появление указанного контрчлена, следует из формулы $\lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha/(\tau^2+\alpha^2) = \pi\delta(\tau)$, хорошо известной из теории обобщенных функций. С учетом этой формулы разложение $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$ с точностью до $O(1)$-поправок определено однозначно, и сводится к одной только дельта-функции. С точностью до $O(\alpha)$ разложение оказывается нетривиальным. В самом общем случае его можно записать в виде

$$\mathcal{W}(\alpha;\tau) = \pi/(\alpha f_0)\,\delta(\tau) + \left[\,1/\tau^2\right] + c_0\,\delta(\tau) + c_1(-)\,\delta'(\tau) + O(\alpha). \tag{5}$$

Под $[1/\tau^2]$ понимается обобщенная функция $1/\tau^2$, определенная в какой-либо прескрипции (квадратные скобки означают наличие прескрипции; далее мы их опускаем), стоящие после нее члены с дельта-функцией и ее производной описывают контрчлены, необходимые для коррекции ее вкладов. Наиболее употребительной прескрипцией (но не обязательной) является прескрипция главного значения.

Вообще, для полного определения обобщенной функции $1/\tau^2$ можно поступить следующим образом [18]. Сделаем сначала в какой-либо окрестности точки $\tau=0$ два вычитания в основной функции $\varphi(\tau)$, заменив ее выражением $\varphi(\tau)-\varphi(0)-\tau\varphi'(0)$. В результате этой операции неинтегрируемая особенность $1/\tau^2$ будет, очевидно, скомпенсирована. (По существуб это и есть одна из возможных прескрипций.) Далее, для того чтобы описать возникающий при такой подстановке произвол, добавим к $1/\tau^2$ два контрчлена: один пропорциональный дельта-функции, другой — ее первой производной (оба контрчлена соответствуют сделанным вычитаниям). Коэффициенты при контрчленах определим исходя из требования сохранения асимптотических свойств разложения в порядке $O(1\,)$. Их значения зависят от конкретного вида функций h и f и от выбора прескрипции в $1/\tau^2$, однако сумма целиком от прескрипции не зависит.

Указанную процедуру можно продолжить. Следующим членом формального разложения $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$ по α является $2\alpha h(\tau)\times 1/\tau^3$. Для полного определения обобщенной функции

[4]Подчеркнем, что пункт о введении контрчленов является общим местом в теории обобщенных функций (см. например, [18]). Фактически эта идея была использована Н.Н.Боголюбовым [19,20] для обоснования R-операции в квантовой теории поля. Термин "контрчлены" в данном контексте (АО) введен [14,15] с тем, чтобы подчеркнуть аналогию с теорией УФ перенормировок.

$1/\tau^3$ необходимо введение трех контрчленов, содержащих дельта-функцию, ее первую и вторую производные. Коэффициенты при них могут быть определены при наложении требования сохранения асимптотических свойств разложения и т.д. Описание практического рецепта определения коэффициентов дано в следующем разделе.

2. Вычисление контрчленов в АО разложении $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$

Продемонстрируем технику вычисления контрчленов на примере разложения $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$ с точностью до $O(\alpha^2)$-поправок. Поскольку, как мы убедились, главный член АО разложения $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$ имеет поведение $O(\alpha^{-1})$, указанная точность достаточна для построения "следующего-следующего-за-главным приближения" (NNLO). Общая структура разложения, как было указано выше, такова:

$$\mathcal{W}(\alpha;\tau) \;=\; \frac{1}{\tau^2} + \frac{2h(\tau)}{\tau^3}\alpha + E(\tau) + O(\alpha^2). \tag{6}$$

Здесь первые два члена представляют собой результат формального разложения $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$ как обычной функции, зависящей от параметра α. Полюса по τ в этих членах для определенности условимся понимать в смысле главного значения. Наиболее употребительными способами определения главного значения являются

$$VP\left(\frac{1}{\tau^n}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(\tau+\mathrm{i}0)^n} + \frac{1}{(\tau-\mathrm{i}0)^n}\right] = \frac{(-)^{n-1}}{(n-1)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\tau^n}\ln|\tau|\,. \tag{7}$$

(Оба способа эквивалентны, см., например, [18]. Во втором равенстве производные понимаются в смысле обобщенных функций, т.е. они должны быть "перекинуты" на пробную функцию без учета краевых членов.) Величина $E(\tau)$ в формуле (6) представляет собой сумму контрчленов, пропорциональных дельта-функции, ее первой и второй производных,

$$E(\tau) = \sum_{n=0}^{2}\frac{(-)^n c_n}{n!}\,\delta^{(n)}(\tau). \tag{8}$$

Далее в этом разделе мы будем полагать, что функции $h(\tau)$ и $f(\tau)$ вместе с их вторыми производными являются регулярными в некоторой окрестности точки $\tau = 0$[5]. Для простоты предположим сначала, что функции $h(\tau)$ и $f(\tau)$ содержат только однопетлевые вклады. Необходимые обобщения на случай многопетлевых вкладов будут даны ниже, в конце данного раздела.

Наша задача — так определить коэффициенты c_n, $n = 0,1,2$, чтобы для любой достаточно быстро убывающей на бесконечности и гладкой в окрестности нуля пробной функции $\varphi(\tau)$ имело место соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\tau\,\varphi(\tau)\left[\mathcal{W}(\alpha;\tau) - \frac{1}{\tau^2} - \frac{2h(\tau)}{\tau^3}\,\alpha - E(\tau)\right] = O(\alpha^2). \tag{9}$$

[5] Если нестабильное состояние взаимодействует с безмассовыми частицами (фотонами), то, строго говоря, это условие не выполняется. Однако при введении (малой) массы фотонов, применяемой обычно для решения проблемы ИК катастрофы, аналитичность восстанавливается внутри окрестности, определяемой размерами образовавшейся массовой щели. Для наших целей этого достаточно. (См. также обсуждение данного вопроса в разделе 4.)

Заметим сразу, что для решения этой задачи нам не нужно знать в третьем члене в квадратных скобках всю информацию о функции $h(\tau)$, а достаточно знать только первые три члена ее асимптотического разложения при малых τ,

$$h(\tau) = h_0 + \tau\, h_0' + (\tau^2/2)\, h_0'' + o(\tau^2). \tag{10}$$

Это следует из того факта, что остаточный член $o(\tau^2)$ компенсирует неинтегрируемую особенность $1/\tau^3$ в точке $\tau = 0$.

Подставим теперь (8) в формулу (9) и, следуя [14], представим пробную функцию $\varphi(\tau)$ в виде линейной комбинации трех базисных функций $\varphi_n(\tau)$, $n = 0, 1, 2$, обладающих свойством $\varphi_n^{(k)}(0) = \delta_n^k$. В результате получим

$$c_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, \varphi_n(\tau) \left[\mathcal{W}(\alpha; \tau) - \frac{1}{\tau^2} - \frac{2h(\tau)}{\tau^3}\, \alpha \right] + O(\alpha^2). \tag{11}$$

Из формулы (11) следует, что в пределах указанной точности коэффициенты c_n не зависят от выбора пробных функций $\varphi_n(\tau)$. Действительно, воспользовавшись другими пробными функциями $\widetilde{\varphi}_n(\tau)$, обладающими тем же свойством $\widetilde{\varphi}_n^{(k)}(0) = \delta_n^k$, получим вместо c_n другие коэффициенты $\tilde{c}_n$. Однако разница между ними составляет $O(\alpha^2)$, поскольку разность соответствующих интегральных представлений определяется весовой функцией $\widetilde{\varphi}_n(\tau) - \varphi_n(\tau)$, равной нулю при $\tau = 0$ вместе с первой и второй производными. Нетрудно убедиться, что интеграл в правой части формулы (11) с такой весовой функцией составляет величину $O(\alpha^2)$, что и требовалось показать. В силу указанного свойства без потери общности можно считать, что $\varphi_n(\tau)$ представляет собой "ступенчатую" функцию, равную τ^n при $|\tau| < \Lambda$, и обращающуюся в ноль за пределами этой области. В результате получим

$$c_n = \int\limits_{-\Lambda}^{+\Lambda} d\tau\, \tau^n \left[\mathcal{W}(\alpha; \tau) - \frac{1}{\tau^2} - \frac{2h(\tau)}{\tau^3} \alpha \right] + O(\alpha^2), \qquad n = 0, 1, 2. \tag{12}$$

Формула (12), в принципе, решает поставленную задачу. Однако она все еще слишком сложна для практического применения, поскольку через $\mathcal{W}(\alpha; \tau)$ она содержит зависимость от, вообще говоря, неизвестных функций $h(\tau)$ и $f(\tau)$. Кроме того, в ней содержится много лишней информации, поскольку интеграл в правой части дает вклады с превышением точности $O(\alpha^2)$. В частности, именно в этих вкладах проявляется зависимость от обрезания.

Обе указанные проблемы могут быть решены с помощью процедуры гомогенизации [16]. В данном контексте она сводится к следующим преобразованиям в подынтегральном выражении: сначала делаем подстановку $\tau \to \xi\tau$, $\alpha \to \xi\alpha$, затем результат разлагаем по степеням ξ и в конце полагаем $\xi = 1$. Каждый член полученного таким образом разложения подынтегрального выражения оказывается однородной функцией τ и α и, следовательно, дает строго определенный по порядку α вклад в интеграл, в котором на этом этапе можно снять обрезание. В частности, первый член разложения гомогенизации даст главный член $c_n^{(0)}$ разложения коэффициентов c_n по α, равный

$$c_n^{(0)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, \tau^n \left[\frac{1}{(\tau - \alpha h_0)^2 + \alpha^2 f_0^2} - \frac{1}{\tau^2} - \frac{2h_0}{\tau^3} \alpha \right], \qquad n = 0, 1, 2. \tag{13}$$

Следующий член разложения гомогенизации даст поправочный член $c_n^{(1)}$ и т.д. По подсчету степеней $c_n^{(0)} \sim \alpha^{n-1}$, $c_n^{(1)} \sim \alpha^n$ и т. д. В результате сложения необходимого числа $c_n^{(i)}$ получим коэффициент c_n с требуемой точностью. Подчеркнем, что интеграл в формуле (13) является сходящимся.

Аналогичное свойство сходимости интеграла на бесконечности имеет место также для других коэффициентов $c_n^{(i)}$ и, более того, является общим следствием применения процедуры гомогенизации [16]. Напомним также, что сингулярные члены $1/\tau^2$ и $1/\tau^3$ в формуле (13) определены в смысле главного значения (отметим, что изменение прескрипции приведет к изменению значений $c_n^{(i)}$, *но* с сохранением асимптотических свойств разложения (6)). Поэтому коэффициенты $c_n^{(i)}$ являются хорошо определенными во всех отношениях.

Выполнив соответствующие вычисления и сложив результаты разложения гомогенизации, получим следующий результат для коэффициентов c_n (впервые полученный в работе [13]):

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{\pi}{\alpha f_0} + \frac{\pi\,(h_0' f_0 - h_0 f_0')}{f_0^2} \\ &\quad + \frac{\pi\Big(h'^2_0 f_0^2 + h_0^2 f'^2_0 + h_0 h_0'' f_0^2 - 2h_0 h_0' f_0 f_0' - \frac{1}{2} h_0^2 f_0 f_0'' - \frac{1}{2} f_0^3 f_0''\Big)}{f_0^3}\,\alpha, \\ c_1 &= \frac{\pi h_0}{f_0} + \frac{\pi\,(2h_0 h'_0 f_0 - h_0^2 f'_0 - f_0^2 f'_0)}{f_0^2}\,\alpha\,, \qquad c_2 = \frac{\pi\,(h_0^2 - f_0^2)}{f_0}\,\alpha\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь, как и ранее, нижний индекс означает, что соответствующая величина определена при $\tau = 0$, а штрихи сверху обозначают число производных, например, $h_0' = \mathrm{d}h(\tau)/\mathrm{d}\tau|_{\tau=0}$ и т.д.

Приведенный результат можно записать в более компактном виде, если величины c_n в формуле (8) трактовать как функции τ. В этом случае вместо (14) получим

$$c_0 = \frac{\pi}{\alpha f}\,, \qquad c_1 = \frac{\pi h}{f}\,, \qquad c_2 = \frac{\pi\,(h^2 - f^2)}{f}\,\alpha\,, \tag{15}$$

где $c_{0,1,2}$, f и h понимаются как функции τ. Эквивалентность двух форм записи (14) и (15) следует из соотношений $f(\tau)\,\delta'(\tau) = f_0\,\delta'(\tau) - f_0'\,\delta(\tau)$ и $f(\tau)\,\delta''(\tau) = f_0\,\delta''(\tau) - 2f_0'\,\delta'(\tau) + f_0''\,\delta(\tau)$.

Полученные выше результаты легко обобщаются на случай, когда функции h и f содержат высшие петлевые вклады. Для того чтобы в этом случае получить полное АО-разложение $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$, следует просто завершить *обычное* разложение по α в формулах (14) или (15), в которых в качестве h и f следует взять полные функции с высшими петлевыми вкладами [13]. В справедливости этого утверждения можно убедиться, не прибегая ни к каким дополнительным вычислениям. Просто, считая h и f полными функциями, повторим все те же рассуждения, но в процессе гомогенизации модифицируем скейлинг, положив в n-петлевых вкладах $\alpha^n \to \xi\alpha^n$. В результате высшие петлевые вклады будут отождествлены с однопетлевыми, и формулы (14), (15) восстановятся автоматически.

3. Свойства АО-разложения $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$

Перейдем теперь к обсуждению свойств полученного АО-разложения. Прежде всего нас интересуют те свойства, которые оказываются полезными для обоснования калибровочных сокращений в МТВ в теории электрослабых взаимодействий. Отметим, что в силу нестандартности получающихся правил Фейнмана (см. формулы (6), (8) и (14)) решение данного вопроса *a priori* не очевидно. В этой связи мы будем придерживаться стратегии, основанной на сравнении результатов МТВ с результатами обычного подхода, основанного на вычислении амплитуды. В качестве инструмента мы будем использовать различные варианты неполного промежуточного разложения $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$, приводящего в конечном счете к тому же точному АО-разложению.

Начнем с того, что покажем независимость АО-разложения от того, было осуществлено в $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$ предварительное разложение по высшим петлевым вкладам, или нет. Другими словами, покажем, что результаты АО-разложения не изменятся, если стартовать вместо формулы (1) со следующей формулы для нестабильного пропагатора, описывающей неполное дайсоновское суммирование:

$$\Delta(\alpha;\tau) = \frac{1}{\tau - \alpha\,\Sigma_1 - \alpha^2\,\Sigma_2 - \alpha^3\,\Sigma_3 + \,\ldots} = \frac{1}{\tau - \alpha\,\Sigma_1} + \frac{\alpha^2\,\Sigma_2 + \alpha^3\,\Sigma_3}{\left(\tau - \alpha\,\Sigma_1\right)^2} + \,\ldots\,, \qquad (16)$$

где $\alpha^n\Sigma_n(\tau)$ обозначает n-петлевой вклад в собственную энергию $\Sigma(\alpha;\tau)$. Квадрируя (16), получаем незавершенное разложение $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$, каждый член которого при $\alpha\neq 0$ является интегрируемой в обычном смысле функцией τ:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(\alpha;\tau) = \mathcal{W}_1(\alpha;\tau) + \Big[&(\alpha^2\,\Sigma_2 + \alpha^3\,\Sigma_3)\;\mathcal{W}_{11}(\alpha;\tau) + \alpha^4\,(\Sigma_2)^2\,\mathcal{W}_{12}(\alpha;\tau) + h.c.\Big] \\ &+ \alpha^4\,|\Sigma_2|^2\;\mathcal{W}_1^2(\alpha;\tau) + O(\alpha^2)\,.\end{aligned} \qquad (17)$$

Здесь мы ввели новые (обобщенные) функции: $\mathcal{W}_{11}(\alpha;\tau) = \mathcal{W}_1(\alpha;\tau)\,\Delta_1(\alpha;\tau)$, $\mathcal{W}_{12}(\alpha;\tau) = \mathcal{W}_1(\alpha;\tau)\,\Delta_1^2(\alpha;\tau)$ и $\mathcal{W}_1^2(\alpha;\tau) = \mathcal{W}_1(\alpha;\tau)\,\mathcal{W}_1(\alpha;\tau)$, где $\mathcal{W}_1(\alpha;\tau)$ и $\Delta_1(\alpha;\tau)$ определены как $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$ и $\Delta(\alpha;\tau)$, в знаменателях которых удерживаются только однопетлевые вклады. Каждый член в (17) может быть окончательно разложен в смысле АО.

С помощью рассуждений, подобных проделанным в разделе 1, нетрудно показать, что в $\mathcal{W}_{11}$ главный член АО-разложения имеет поведение $1/\alpha^2$. Следовательно, первый член в квадратных скобках в (17) после интегрирования с весовой функцией $\varphi(\tau)$ даст вклад порядка $O(1)$. Лидирующие члены разложения $\mathcal{W}_{12}$ и $\mathcal{W}_1^2$ имеют поведение $1/\alpha^3$. Следовательно, второй член в квадратных скобках и последний член в формуле (17) дают вклады $O(\alpha)$. Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что отброшенные в (17) члены дают вклады $O(\alpha^2)$. Таким образом, с учетом $\mathcal{W}_1 = O(\alpha^{-1})$, формула (17) описывает разложение $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$ вплоть до NNLO.

Следует особо отметить, что проведенное выше рассуждение справедливо в том случае, если функции $\Sigma_2(\tau)$, $\Sigma_3(\tau)$ и т.д. вместе с некоторым числом их производных сами являются регулярными функциями в окрестности $\tau = 0$. Если это не так, то их произведение с введенными выше функциями $\mathcal{W}_{1\,n}^{m}$ следует рассматривать как новые обобщенные функции, свойства которых надо исследовать отдельно. Указанная ситуация имеет место в том случае, когда нестабильное состояние способно испускать/поглощать безмассовые частицы (фотоны). Однако с введением для них регуляризующей массы проблема снимается, поскольку функции $\Sigma_n(\tau)$ становятся регулярными в некоторой окрестности точки $\tau = 0$. На самом деле, сингулярные по массе фотонов вклады в конечном счете сокращаются (см. следующий раздел). Поэтому для исследования качественных вопросов присутствие регуляризующей массы несущественно.

Перейдем теперь к полному (точному) АО-разложению функций $\mathcal{W}_{11}$, $\mathcal{W}_{12}$ и $\mathcal{W}_1^2$. Для краткости опустим вывод соответствующих формул, поскольку он аналогичен проведенному в предыдущем разделе. Отметим только вновь, что нижеприведенные формулы справедливы при условии, что h и f вместе с их вторыми производными являются регулярными функциями в некоторой окрестности точки $\tau = 0$. (В отсутствии безмассовых частиц или с введением для них регуляризующей массы это условие выполняется.) Заметим, что в соответствии с (17) разложение $\mathcal{W}_{11}$ требуется осуществить с точностью до $O(1\,)$, а $\mathcal{W}_{12}$ и $\mathcal{W}_1^2$ — с точностью до $O(\alpha^{-2})$. В дальнейшем, однако, нам понадобятся некоторые следующие члены их разложения. Поэтому сформулируем результаты заранее с некоторым превышением точности:

$$\mathcal{W}_{11}(\alpha;\tau) = \ E(\tau) + \frac{1}{\tau^3} + O(\alpha), \quad \mathcal{W}_{12}(\alpha;\tau) = \ E(\tau) + O(1), \quad \mathcal{W}_1^2(\alpha;\tau) = \ E(\tau) + O(1). \tag{18}$$

Во всех трех случаях контрчлен $E(\tau)$, по-прежнему, определен по формуле (8), но коэффициенты c_n в каждом случае свои. В компактной форме записи, в которой они определены как функции τ, получим

$$\mathcal{W}_{11}: \qquad c_0 = \frac{\mathrm{i}\pi}{2\,\alpha^2 f^2}\,, \qquad c_1 = \frac{\pi(\mathrm{i}h + f)}{2\,\alpha f^2}\,, \qquad c_2 = \frac{\pi(\mathrm{i}h^2 + \mathrm{i}f^2 + 2hf)}{2f^2}\,; \tag{19}$$

$$\mathcal{W}_{12}: \qquad c_0 = -\frac{\pi}{4\,\alpha^3 f^3}\,, \qquad c_1 = \frac{\pi(\mathrm{i}f - h)}{4\alpha^2 f^3}\,, \qquad c_2 = \frac{\pi(2\,\mathrm{i}hf + f^2 - h^2)}{4\,\alpha f^3}\,; \tag{20}$$

$$\mathcal{W}_1^2: \qquad c_0 = \frac{\pi}{2\,\alpha^3 f^3}\,, \qquad c_1 = \frac{\pi h}{2\,\alpha^2 f^3}\,, \qquad c_2 = \frac{\pi(h^2 + f^2)}{2\,\alpha f^3}\,. \tag{21}$$

Отметим, что сингулярные по α коэффициенты не зависят от прескрипции в определении полюсов по τ. Это следует из того факта, что в разложениях рассматриваемых функций неинтегрируемые члены (для которых требуется введение прескрипции) являются несингулярными по α.

На основании полученных результатов сформулируем следующие свойства, важные с точки зрения дальнейшего развития формализма.

Свойство 1

Неполное разложение (17) квадрированного пропагатора $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$, рассматриваемое вкупе с формулами (18)-(21), эквивалентно в пределах рассматриваемой точности полному АО разложению $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$.

В справедливости этого утверждения можно убедиться непосредственно, завершив в соответствующих формулах разложение по α и сравнив полученные результаты.

Свойство 2

Кроме формулы (17) для $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$ существуют другие эквивалентные формы неполного разложения, приводящие в пределах заданной точности к тому же результату. Единственным условием, которому должен удовлетворять каждый вариант, является требование сохранения в знаменателе всех не обращающихся в ноль при $\tau = 0$ вкладов в $\mathrm{Im}\Sigma_1(\tau)$.

Доказательство этого утверждения проведем в два этапа. Сначала покажем, что из знаменателя без потери точности можно вывести все вклады в собственную энергию, обращающиеся в ноль при $\tau = 0$. Затем покажем, что без потери точности из знаменателя можно вывести также всю вещественную часть $\Sigma_1(\tau)$.

Итак, положим $\Sigma_1(\tau) = \Sigma_{01}(\tau) + \widetilde{\Sigma}_1(\tau)$, где, по определению, $\widetilde{\Sigma}_1(0) = 0$. Поскольку в окрестности точки $\tau = 0$ функция $\widetilde{\Sigma}_1(\tau)$ является поправочной по отношению к $\Sigma_{01}(\tau)$, ее вклады можно вывести в числитель — наподобие тому, как это было проделано в формулах (16) и (17) для высших петлевых поправок. Формула (17) в результате такой модификации преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(\alpha;\tau) = \mathcal{W}_1(\alpha;\tau) + &\left[\begin{array}{l}\left(\alpha\,\widetilde{\Sigma}_1 + \alpha^2\Sigma_2 + \alpha^3\Sigma_3\right)\,\mathcal{W}_{11}(\alpha;\tau) \\ +\left(\alpha^2\widetilde{\Sigma}_1^2 + 2\alpha^3\widetilde{\Sigma}_1\Sigma_2 + \alpha^4\Sigma_2^2\right)\,\mathcal{W}_{12}(\alpha;\tau) + h.c.\end{array}\right] \\ &+\left[\alpha^2\left|\widetilde{\Sigma}_1\right|^2 + \alpha^3\left(\widetilde{\Sigma}_1\Sigma_2^* + h.c.\right) + \alpha^4\left|\Sigma_2\right|^2\right]\,\mathcal{W}_1^2(\alpha;\tau) + O(\alpha^2)\,.\end{aligned} \tag{22}$$

Символ $*$ означает операцию комплексного сопряжения, а в знаменателях $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_{11}$, $\mathcal{W}_{12}$ и $\mathcal{W}_1^2$ удерживается только $\Sigma_{01}(\tau)$. Оценка остаточного члена в формуле (22) дана в смысле АО-разложения. Разложения функций $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_{11}$, $\mathcal{W}_{12}$ и $\mathcal{W}_1^2$ с требуемой точностью приведены выше в данном разделе.

В справедливости формулы (22) можно убедиться, воспользовавшись тем свойством, что в пределах указанной точности величина $\alpha\widetilde{\Sigma}_1$ дает ненулевой вклад, будучи возведенной в степень не выше, чем в квадрат. Действительно, на фоне регулярных членов АО-разложения $\mathcal{W}_{1\,n}^m$ результат очевиден. Если $\widetilde{\Sigma}_1^2$ (или $|\widetilde{\Sigma}_1|^2$) домножается на контрчлен, то результат будет ненулевым только в случае второй и более высокой производной δ-функции (в противном случае срабатывает свойство $\widetilde{\Sigma}_1(0) = 0$). Во всех встречающихся в разложении (22) функциях $\mathcal{W}_{1\,n}^m = [\mathcal{W}_1]^m\Delta_1^n$ ($n \geq 0$, $m \geq 1$ $n{+}m{-}1$ — число собственно-энергетических вставок с одной стороны разреза диаграммы унитарности, $m-1$ — с другой) такой контрчлен возникает в порядке $\alpha^{-(n+2m-1)}{\times}\alpha^2$, причем среди функций $\mathcal{W}_{1\,n}^m$ только те могут быть домноженными на фактор $\widetilde{\Sigma}_1^2$ (или $|\widetilde{\Sigma}_1|^2$), для которых $n{+}2m{-}2 \geq 2$. С учетом того, что две вставки $\widetilde{\Sigma}_1$ идут каждая с фактором α, а остальные $n+2m-4$ вставок Σ_k с $k \geq 2$ — с фактором не менее α^2, для всех указанных выше вкладов в итоге получим $O(\alpha)$. Распространяя проведенное рассуждение на третью и выше степени $\alpha\widetilde{\Sigma}_1$, нетрудно увидеть, что они будут давать ненулевые вклады в $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$ только в порядке $O(\alpha^2)$ и выше.

Полученный выше результат можно обобщить и вывести в числитель также всю вещественную часть $\Sigma_1(\tau)$. В этом случае в формуле (22) в качестве определения $\widetilde{\Sigma}_1(\tau)$ следует положить $\mathrm{Im}\widetilde{\Sigma}_1(0) = 0$. Основанием для такого обобщения служит наблюдение о том, что Re-часть собственной энергии не дает вкладов в лидирующий член АО-разложения $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$. Отметим, что формула (22) с учетом указанной модификации на первый взгляд должна выглядеть много сложней, поскольку с формальной точки зрения она должна содержать бесконечный ряд членов типа $[\mathrm{Re}\Sigma_1(\tau)]^n\,\mathcal{W}_{1n}$, содержащих высшие степени $\mathrm{Re}\Sigma_1(\tau)$. Однако, образуя группы с другими функциями $\mathcal{W}_{1\,n}^m$, все лишние члены должны взаимно сократиться. Указанные группы образуются в силу соотношений типа $2\,\mathcal{W}_{12} + \mathcal{W}_1^2 = O(\alpha^{-2})$ [не $O(\alpha^{-3})$] и т.д. Приведенное выше утверждение можно проверить путем прямого сравнения результатов АО-разложений в формулах (17) и (22).

Свойство 3

Исходя из очевидного обобщения формулы (17) на случай произвольного n и с учетом формулы (19), нетрудно получить следующую аппроксимацию $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$ с точностью до $O(\alpha^n)$ поправок:

$$\mathcal{W}(\alpha;\tau) = \mathcal{W}_{[n]}(\alpha;\tau) - \alpha^{n-1}\frac{\mathrm{Im}\Sigma_{n+1}(0)}{\left[\mathrm{Im}\Sigma_1(0)\right]^2}\,\pi\delta(\tau) + O(\alpha^n), \tag{23}$$

где $\mathcal{W}_{[n]}(\alpha;\tau)$ — квадрированный пропагатор, в знаменателе которого удерживаются все вклады в собственную энергию вплоть до n-петлевого ($n \geq 1$). Во втором члене собраны все ($n{+}1$)-петлевые вклады, которые необходимо добавить (с соответствующими факторами) для того, чтобы получить аппроксимацию $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$ с точностью до $O(\alpha^n)$-поправок. Напомним, что $\mathcal{W}_{[n]}(\alpha;\tau)$ в пределах заданной точности можно представить в виде любой допустимой согласно свойству 2 схемы неполного разложения или в виде полного АО-разложения.

Формула (23) представляет собой точную количественную характеристику указанного во Введении свойства редуцирования одного петлевого порядка ТВ в резонансной области. Действительно, поскольку $\mathcal{W}_{[n]}(\alpha;\tau) \sim \alpha^{-1}$ при $\alpha \to 0$, второй член в формуле (23), содержащий $(n+1)$-петлевые вклады, дает вклад в n-ую поправку к лидирующему вкладу, а не в $(n+1)$-ую, как это можно наивно ожидать для $(n+1)$-петлевых вкладов. Отметим, что второй член в формуле (23) невозможно получить исходя из анализа только амплитуды. В этой связи его уместно называть аномальным аддитивным членом.

Далее приведем еще два свойства полученных АО-разложений, прямо не имеющих отношения к проблеме калибровочных сокращений, но представляющих несомненный интерес.

Свойство 4

Полученные выше формулы АО-разложения преобразуются следующим образом при сдвижке аргумента τ на величину порядка $O(\alpha)$:

$$\widetilde{\mathcal{W}}(\alpha;\tau) = \widetilde{\mathcal{W}}(\alpha;\tau - \alpha\, m^2)\Big|_{\substack{h(\tau-\alpha\, m^2)\to h(\tau)-m^2 \\ f(\tau-\alpha\, m^2)\to f(\tau)}}\,, \tag{24}$$

где $\widetilde{\mathcal{W}}(\alpha;\tau)$ — любая из рассмотренных выше функций $\mathcal{W}^{m}_{1\,n}$ или исходная функция $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$, $m^2 = O(1)$.

Свойство (24) означает нечувствительность формализма к вариациям в пределах $O(\alpha)$ положения массовой оболочки, а также независимость формализма от схемы перенормировки. Действительно, на однопетлевом уровне переход, например, от схемы MS к схеме on-mass-shell (OMS) описывается формулами

$$\begin{aligned} \Sigma_{OMS}(p^2) &= \Sigma(p^2) - \mathrm{Re}\Sigma(M^2_{OMS}) - (p^2 - M^2_{OMS}) \times \mathrm{Re}\Sigma'(M^2_{OMS})\,, \\ M^2_{OMS} &= M^2 - \mathrm{Re}\Sigma(M^2_{OMS})\,, \qquad Z_{OMS} = 1 + \mathrm{Re}\Sigma'(M^2_{OMS})\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Преобразование (25), очевидно, полностью вписывается в класс преобразований, охватываемых формулой (24)[6]. Преобразования на уровне многопетлевых вкладов контролируются формулой (17). Следовательно, они могут быть осуществлены согласно стандартным рецептам УФ-перенормировки, на которые никак не влияет присутствие "инфракрасных" контрчленов, сосредоточенных в строго ограниченной области импульсов (вблизи массовой оболочки; см. также [15] и цитированную там литературу). Отметим, что переход

[6]Напоминаем, что мы не рассматриваем вклады в числитель пропагатора и, следовательно, игнорируем мультипликативную перенормировку волновой функции.

к другой схеме перенормировки может быть совершен (умозрительно) для полных функций Грина до операции квадрирования амплитуд и их АО разложения. Последующее АО-разложение никак не “чувствует”, в какой схеме были определены функции Грина.

Свойство (24) является тривиальным для неразложенных функций $\widetilde{W}$ и для их формальных разложений (в смысле обычных функций). Нетривиальным является то, что оно остается справедливым и для контрчленов $E(\tau)$. Однако это тоже можно понять, если заметить, что преобразование $\tau \to \tau - \alpha\, m^2$ не затрагивает структуру гомогенизации при скейлинге $\tau \to \xi\tau$, $\alpha \to \xi\alpha$ (см. раздел 2). В результате свойство (24) оказывается справедливым в самом общем случае.

Свойство 5

Из формулы (24) вытекает следующая рекуррентная формула для коэффициентов c_n, определенных согласно (8):

$$c_{n-1} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial h_0} - \sum_{r=0}^{N-n}\left(h_0^{(r+1)}\frac{\partial}{\partial h_0^{(r)}} + f_0^{(r+1)}\frac{\partial}{\partial f_0^{(r)}}\right) + \frac{\partial}{\partial M^2}\right] c_n. \tag{26}$$

Здесь коэффициенты $c_n = c_n\left(M^2; \alpha; h_0, \ldots h_0^{(N-n)}; f_0, \ldots f_0^{(N-n)}\right)$ понимаются как не зависящие от τ константы; индекс n пробегает значения $0 \le n \le N$, N — максимальная степень производной дельта-функции в контрчлене $E(\tau)$. Формула (26) выписана с учетом возможной зависимости от параметра M^2 в коэффициентах c_n. В рассмотренных выше примерах такая зависимость отсутствует, однако она возникает в конфигурациях, в которых явно учитываются обмены безмассовыми частицами [21]. Существенным моментом для вывода формулы (26) является разложение по степеням α дельта-функции $\delta(\tau - \alpha\, m^2)$ и ее производных в правой части соотношения (24). Практическая ценность формулы (26) состоит в том, что она позволяет определить “низший” коэффициент c_{n-1} с точностью до $O(\alpha^L)$, если “высший” коэффициент c_n известен с точностью до $O(\alpha^{L+1})$.

4. Обмен безмассовыми частицами

Вопрос об учете безмассовых частиц (фотонов) требует особого рассмотрения, поскольку собственная энергия нестабильной частицы в присутствии их вкладов *не* является аналитической функцией в любой сколь угодно малой окрестности точки $\tau = 0$. Действительно, однопетлевой вклад безмассовой частицы в собственную энергию массивной частицы приводит к особенности типа $\tau \times \ln(\tau - \mathrm{i}0)$. Первая производная этого выражения не определена в нуле. Следовательно, уже первый поправочный член в формуле (14) оказывается неопределенным.

Один из способов решения данной проблемы состоит во введении регуляризующей массы для безмассовых частиц (масса фотонов). В результате неаналитичные при $\tau = 0$ вклады в собственной энергии исчезают, и это позволяет далее беспрепятственно пользоваться полученными выше формулами АО-разложения. После вычисления вероятности процесса с учетом дополнительного излучения мягких фотонов и характерного обрезания сверху по их энергиям сингулярные при снятии регуляризации вклады должны сократиться (см. ниже) — аналогично тому, как это происходит в обычной КЭД. Указанное свойство означает непрерывность вероятности как функции массы фотонов. Следовательно, при решении чисто качественных задач можно не заботиться о присутствии массы фотона, поскольку в окончательных результатах она может быть устранена путем обычного предельного перехода. Следует однако помнить, что при проведении численных расчетов все же необходимо предварительное аналитическое выделение сингулярных по массе фотона вкладов с тем, чтобы, проконтролировав их явное сокращение, обеспечить хорошую сходимость вычислений.

Другой способ [13] основывается на использовании регуляризующих свойств параметра α. Этот способ естественным образом вписывается в контекст решения задачи АО-разложения квадрированных функций Грина и позволяет автоматически обеспечить сокращение ИК-расходимостей до проведения каких-либо иных вычислений. (Подчеркнем, что речь здесь идет о тех расходимостях, происхождение которых связано с возникновением сингулярности по параметру α при $\alpha \to 0$. Реально такие расходимости порождаются конфигурациями, в которых импульс безмассовых состояний проникает в пропагаторы нестабильных состояний, взятых на массовой оболочке. Заметим кстати, что сокращение ИК расходимостей означает сокращение связанных с ними сингулярностей по константе связи.) Суть этого способа состоит в поэтапном разложении полных квадрированных функций Грина: сначала только по вкладам безмассовых частиц (что всегда можно сделать в силу свойства $\mathrm{Im}\widetilde{\Sigma}_1(0) = 0$ соответствующих вкладов) и затем по остающимся вершинам, используя при необходимости технику АО.

Поступая таким образом, на промежуточном этапе мы получаем модифицированные функции Грина, нестабильные пропагаторы которых не содержат вкладов безмассовых частиц (фотонов). Платой за достигнутое упрощение является возникновение определенного числа конфигураций, явным образом содержащих вклады фотонов, и требующих вычисления для них специальных контрчленов. (В случае парного рождения нестабильных частиц число таких конфигураций существенно возрастает за счет обменов безмассовыми частицами между различными нестабильными состояниями.) Алгоритм, позволяющий перечислить все такие конфигурации, описан в [13], и там же на основании простых соображений унитарности дано общее доказательство сокращения рассматриваемого класса ИК-расходимостей. Этот факт дает основание для утверждения о сокращении сингулярных вкладов в альтернативной схеме с введением массы фотона. В реальных ситуациях полный список конфигураций с учетом вкладов только лишь одной безмассовой частицы оказывается весьма громоздким. В этой связи мы опускаем здесь дальнейшее обсуждение данного вопроса. Некоторые результаты в этом направлении получены в [21]. Полному обсуждению посвящена другая работа.

5. Нестабильные пропагаторы и калибровочные сокращения в электрослабой теории

Покажем теперь с помощью формулы (23), каким образом в МТВ обеспечиваются одновременно и калибровочные сокращения и точность описания как разложения по степеням константы связи. Рассуждения проведем в достаточно общей форме, применимой в принципе для любых нестабильных состояний электрослабой теории. Порядок рассмотрения будет таков: сначала покажем, что второй член в формуле (23) обеспечивает необходимые калибровочные сокращения, затем покажем, что этот же результат имеет место для первого члена. Точность разложения по степеням константы связи при этом автоматически обеспечивается самой формулой (23). Начнем, однако, с некоторых общих предварительных замечаний.

Прежде всего определимся с тем, что для регуляризации ИК-расходимостей мы будем использовать формализм с введением массы фотона. Поскольку ИК-расходимости сокращаются в вероятности (см. предыдущий раздел), она является непрерывной функцией массы фотона. Следовательно, зависимость от массы фотона в окончательных результатах может быть устранена путем обычного предельного перехода. Таким образом, если мы получим результат о калибровочных сокращениях в присутствии массы фотона, то после предельного перехода он тоже должен иметь место[7].

Введение массы фотона позволяет решить сразу две важные задачи. Во-первых, вследствие сопутствующей этому коррекции аналитических свойств собственноэнергетических вкладов появляется возможность прямого применения формулы (23) (см. обсуждение в разделах 2 и 3). Во-вторых, конфигурации с излучением/поглощением мягких фотонов удается отнести полностью к вершинным блокам. В результате, проблема нестабильности сводится исключительно к конфигурациям с непосредственно вылетающими из области взаимодействия частицами.

Обсудим теперь вопрос об учете нефизических полюсных вкладов в пропагаторах нестабильных векторных бозонов. Запараметризовав их собственную энергию в виде

$$\Sigma_{\mu\nu}(p) = \Sigma\, g_{\mu\nu} + \Sigma_L\, p_\mu p_\nu, \tag{27}$$

получим следующее выражение для полного пропагатора в R_ξ-калибровке:

$$D_{\mu\nu}(p) = \frac{g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu/p^2}{p^2 - M^2 + \Sigma} + \xi\, \frac{p_\mu p_\nu/p^2}{p^2 - \xi\, M^2 + \xi\, (\Sigma + p^2 \Sigma_L)}, \tag{28}$$

где первый член представляет собой произведение спинового фактора на пропагатор $\Delta(\alpha;\tau)$, введенный в формуле (1). Второй член описывает нефизические вклады.

Напомним, что в амплитуде, рассматриваемой по рецептам обычной ТВ, вклады второго члена в формуле (28) в силу ТУ полностью сокращаются с вкладами других нефизических состояний. Поэтому они не приводят к неинтегрируемым особенностям в фазовом пространстве. В МТВ второй член в формуле (28) тоже будем учитывать в полностью разложенном по степеням константы связи виде (в смысле обычных функций). Свойство сокращения его вкладов в этом случае контролируется свойствами первого члена в (28), рассматриваемого в квадрированном виде. Напомним, что перекрестные члены, возникающие в результате квадрирования пропагатора (28), не приводят к возникновению неинтегрируемых особенностей.

Покажем теперь, что вклады первого, т.е. физического члена в пропагаторе (28), будучи учтенными в МТВ по рецептам АО, не приводят к нарушению калибровочных сокращений. Доказательство проведем в два этапа. Начнем с анализа вкладов второго (аномального) члена в формуле (23). Рассмотрим отдельно следующие два случая: первый — с одиночным рождением нестабильного состояния, и второй — с множественным (т.е. парным и т.д.) рождением нестабильных состояний.

В первом случае заметим, что дополнительные к данному квадрированному пропагатору куски диаграммы унитарности в силу дельта-функции *без производной* при аномальном члене, берутся строго на массовой оболочке. Отсюда немедленно следует

[7]Массу фотона можно ввести таким образом, чтобы не нарушить ТУ, связанные с U(1)-инвариантностью. В этом можно убедиться, например, рассмотрев проблему в формализме Штукельберга (автор признателен А.А.Славнову за указание на это обстоятельство; массу фотона, кроме этого, можно ввести калибровочно-инвариантным образом [22]).

свойство калибровочной инвариантности указанных дополнительных кусков, поскольку они фактически совпадают с квадрированными элементами S-матрицы, вычисленными в приближении on-shell рождения/распада нестабильной частицы. Подчеркнем, что детали определения массовой оболочки в пределах $O(\alpha)$-поправок здесь не важны, поскольку второй член в формуле (23) описывает старшие вклады в пределах интересующей нас точности.

В случае, когда в данном процессе происходит множественное рождение нестабильных частиц, по этой же причине вклады всех прочих нестабильных состояний — всех кроме данного — следует рассматривать в низшем порядке АО-разложения. В силу формул (6), (8) и (14) такие вклады полностью определяются однопетлевыми f_0, причем опять с фактором, содержащим дельта-функцию *без производной.* С учетом калибровочной инвариантности однопетлевых f_0 (что видно, например, из явных выражений [5]) отсюда следует, что дополнительные по отношению к данному квадрированному пропагатору куски диаграммы унитарности, как и в первом случае, также являются калибровочно инвариантными. Из калибровочной инвариантности следует свойство калибровочных сокращений в соответствующих вкладах в вероятность.

Перейдем теперь к анализу первого члена в формуле (23). Для доказательства калибровочных сокращений порождаемых им вкладов обратимся к подходу background-field формализма. Напомним, что в этом формализме дайсоновское суммирование всех вкладов в собственную энергию вплоть до n-петлевых не приводит к нарушению ТУ при условии, что в вершинных функциях тоже учитываются все вклады вплоть до n-петлевых [10]. Следовательно, трактуя величину $\mathcal{W}_{[n]}(\alpha;\tau)$ именно таким образом, мы автоматически получаем свойство калибровочных сокращений в вероятности. Отсюда немедленно следует, что в пределах рассматриваемой точности калибровочные сокращения имеют место также в схеме полного АО-разложения величины $\mathcal{W}_{[n]}(\alpha;\tau)$. Проведенное рассуждение завершает доказательство калибровочных сокращений в МТВ.

В заключение раздела сделаем два важных замечания. Во-первых, в рассуждениях предыдущего абзаца вообще говоря неприемлемо использование *неполного* разложения для величины $\mathcal{W}_{[n]}(\alpha;\tau)$ (исключение см. в следующем разделе). Дело в том, что любое неполное разложение *a priori* не гарантирует свойство точных калибровочных сокращений: такие сокращения обязаны произойти в пределах заданной точности разложения по степеням константы связи, но не за пределами этой точности. Любое же неполное разложение непременно содержит вклады, являющиеся лишними с точки зрения заданной точности разложения. Другое дело, полное (точное) АО-разложение, в котором все лишние вклады отсечены по определению.

Второе замечание состоит в том, что полученный выше результат в принципе можно получить исходя из анализа непосредственно величины $\mathcal{W}_{[n+1]}(\alpha;\tau)$. Однако для этого необходимо заранее знать с какой точностью эта величина описывает квадрированный пропагатор $\mathcal{W}(\alpha;\tau)$. Исследования настоящей работы дают точный ответ на этот вопрос.

6. Простейшее обобщение fermion-loop схемы

В случае, если можно ограничиться рамками NLO-приближения, как, например, в исследованиях парного рождения W-бозонов на LEP2, свойство калибровочных сокращений можно доказать в обычном формализме, без обращения к background-field методу. Ключевым пунктом здесь является хорошо известный результат о калибровочных сокращениях в рамках так называемой fermion-loop схемы [8,9]. Напомним, что рецептурно эта схема сводится к следующему: при определении амплитуды, в знаменателях нестабильных пропагаторов W- и Z-бозонов собираются только фермионные 1-петлевые вклады в собственную энергию, являющиеся калибровочно-инвариантными; при этом в вершинных факторах учитываются также только фермионные 1-петлевые вклады. Вычисленная таким образом амплитуда не приводит к нарушению ТУ даже в случае дайсоновского суммирования в знаменателях нестабильных пропагаторов.

К недостаткам такой схемы следует отнести неясность в вопросе о бозонных поправках в амплитуде, некоторые из которых могут испортить калибровочные сокращения, а главное, остается полная неопределенность в вопросе о 2-петлевых вкладах в собственную энергию нестабильных пропагаторов, которые, как нам известно, (см. также [11,12]) дают вклады в том же NLO-приближении.

Оба вопроса решаются в МТВ с использованием АО. Начнем с 2-петлевых вкладов в собственную энергию. Как мы видели выше, их можно учесть путем добавления аномального члена к вероятности, вычисленной на основе амплитуды без 2-петлевых вкладов. С учетом формулы (23) нужный нам результат представим в виде

$$\alpha\, \mathcal{W}(\alpha;\tau) = \alpha\, \mathcal{W}_{[1]}(\alpha;\tau) - \alpha\, \frac{\mathrm{Im}\Sigma_2(0)}{\left[\mathrm{Im}\Sigma_1(0)\right]^2}\, \pi\delta(\tau) + O(\alpha^2). \tag{29}$$

Здесь фактор α мы ввели для обозначения вкладов распадного блока нестабильного состояния. Напомним, что $\alpha \times \mathcal{W}_{[1]}(\alpha;\tau) = O(1)$ при $\alpha \to 0$, а сама величина $\mathcal{W}_{[1]}(\alpha;\tau)$ представляет собой квадрированный пропагатор, в знаменателе которого удерживаются *все* 1-петлевые вклады в собственную энергию.

Перейдем теперь к вопросу об однопетлевых бозонных поправках. Разделим их на два класса. К первому отнесем поправки в собственную энергию нестабильных состояний, ко второму — поправки в вершинные факторы, а также поправки, связанные с излучением/поглощением фотонов заряженными частицами (напомним, что в случае ненулевой массы фотонов такие поправки можно отнести к вершинным факторам). Поправки первого типа легко учитываются в силу свойства обращения в ноль на массовой оболочке мнимых частей бозонных вкладов в собственную энергию W и Z [5]. С учетом этого свойства и, руководствуясь формулой (22), их можно без потери точности вывести из знаменателей нестабильных пропагаторов. Наиболее простые результаты получаются в схеме перенормировки типа OMS, в которой перенормированная собственная энергия обладает свойством $\mathrm{Re}\Sigma_1(0) = \mathrm{Re}\Sigma_1'(0) = 0$. Следствием этого свойства является следующее простое соотношение:

$$\alpha\, \mathcal{W}_{[1]}(\alpha;\tau) = \alpha\, \mathcal{W}_{1F}(\alpha;\tau) + O(a^2), \tag{30}$$

где $\mathcal{W}_{1F}(\alpha;\tau)$ представляет собой квадрированный пропагатор, в знаменателе которого удерживаются только фермионные 1-петлевые вклады. Подставляя (30) в (29), получаем базовую формулу, на основе которой, повторяя рассуждения предыдущего раздела, можно получить результат о калибровочных сокращениях — но пока только с точностью до неучтенных вкладов бозонных поправок в вершинные факторы. Последние также можно учесть, если воспользоваться тем свойством, что в присутствии указанных поправок и в пределах NLO величину $\mathcal{W}_{1F}(\alpha;\tau)$ достаточно взять только в главном приближении АО-разложения, в котором $\alpha \times \mathcal{W}_{1F}(\alpha;\tau) = \pi/f_0 \times \delta(\tau) + O(\alpha)$. В силу дельта-функции без производной, легко видеть, что все факторы, являющиеся дополнительными к данному квадрированному пропагатору, приводят к калибровочно-инвариантным вкладам (см. предыдущий раздел).

Итак, суммируя полученные результаты, приходим к следующему рецепту обобщения fermion-loop схемы. Прежде всего следует определить вероятность в обычном варианте fermion-loop схемы, т. е. с учетом дайсоновского суммирования 1-петлевых фермионных вкладов в собственную энергию и одновременным учетом 1-петлевых фермионных вкладов в вершинных блоках, *но* без учета каких-либо бозонных поправок. На этом этапе в случае парного рождения W-бозонов калибровочные сокращения на уровне амплитуды гарантированы [9] (доказательство в самом общем случае можно найти в [10]). Однако точность описания вероятности процесса — в смысле разложения по степеням константы связи — пока недостаточна, поскольку в пределах NLO существуют еще другие вклады. Их можно учесть при помощи введения следующих двух корректирующих членов. Первый — аномальный член — представляет собой вероятность рождения тех же нестабильных состояний, но вычисленную в on-shell приближении без учета каких-либо поправок и помноженную на фактор $\alpha\,\mathrm{Im}\Sigma_2(0)/\mathrm{Im}\Sigma_1(0)$. Второй член представляет собой ту же вероятность в on-shell приближении, но уже с учетом всех бозонных поправок, за исключением, разумеется, поправок в собственную энергию нестабильной частицы, которые уже учтены (см. формулу (30)). Поправки в сечении, связанные с излучением/поглощением реального мягкого фотона непосредственно нестабильным состоянием, также следует включить в этот член. На примере интегрированного сечения процесса все это можно записать в следующем виде:

$$\sigma(s) = \int\limits_0^s ds_+ \int\limits_0^{(\sqrt{s}-\sqrt{s_+})^2} ds_-\ \sigma_0(s\,; s_+, s_-), \tag{31}$$

$$\begin{aligned} \sigma_0(s\,; s_+, s_-) &= \sigma_0^{\text{off-shell, fermion-loop scheme}}(s\,; s_+, s_-) \\ &+\sigma_0^{\text{on-shell, tree}}(s\,; M_+, M_-) \times \prod_{\kappa=\pm} \delta(s_\kappa - M_\kappa^2) \times \alpha\,\mathrm{Im}\Sigma_2(0)/\mathrm{Im}\Sigma_1(0) \times BR_\kappa \\ &+\sigma_0^{\text{on-shell, boson 1-loop + real photon}}(s\,; M_+, M_-) \times \prod_{\kappa=\pm} \delta(s_\kappa - M_\kappa^2) \times BR_\kappa\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Здесь BR_κ обозначает бранчинг распада нестабильной частицы, вычисленный на массовой оболочке. В формуле (32) мы воспользовались соотношением $\mathrm{Im}\Sigma_1(0) = M\,\Gamma_0(M)$, вытекающем из унитарности, где $\alpha\Gamma_0(M)$ — ширина, вычисленная на массовой оболочке в приближении деревьев (в справедливости этого соотношения можно убедиться также путем прямых вычислений [23])[8]. Следует отметить, что фигурирующая в формуле (31) величина $\sigma_0(s\,; s_+, s_-)$ не является наблюдаемой. Поэтому нет ничего удивительного в том, что в нее дают вклад члены, явно содержащие дельта-функции (по этому поводу см. также обсуждение в следующем, заключительном разделе).

В формуле (32) можно осуществить дальнейшие упрощения путем перехода к полному AO-разложению. Для этого в обозначенной выше схеме перенормировки воспользуемся, с учетом (6), (8) и (14), следующим результатом:

$$\alpha\,\mathcal{W}_1(\alpha;\tau) = [\mathrm{Im}\Sigma_1(0)]^{-1}\ \pi\,\delta(\tau) + VP\frac{\alpha}{\tau^2} + O(a^2). \tag{33}$$

[8]В 2-петлевом приближении для Σ аналогичное соотношение скорее всего не существует, во всяком случае оно не следует из унитарности.

Подставляя (33) в (32), окончательно получаем

$$
\begin{aligned}
&\sigma_0(s\,;s_+,s_-) = \\
&\qquad VP\sigma_0^{\text{on/off-shell, tree}}(s\,;M_+,s_-)\times\delta(s_+-M_+^2)\times BR_+ \\
&\qquad +VP\sigma_0^{\text{off/on-shell, tree}}(s\,;s_+,M_-)\times\delta(s_--M_-^2)\times BR_- \\
&\qquad +\sigma_0^{\text{on-shell,tree}}(s\,;M_+,M_-)\times\prod_{\kappa=\pm}\delta(s_\kappa-M_\kappa^2)\times\alpha\,\mathrm{Im}\Sigma_2(0)/\mathrm{Im}\Sigma_1(0)\times BR_\kappa \\
&\qquad +\sigma_0^{\text{on-shell, tree+1-loop+real photon}}(s\,;M_+,M_-)\times\prod_{\kappa=\pm}\delta(s_\kappa-M_\kappa^2)\times BR_\kappa\,.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Здесь символ VP означает, что в стоящем справа от него выражении для вероятности соответствующий квадрированный нестабильный пропагатор аппроксимируется выражением $VP\;1/\tau^2$. Следует отметить, что использование прескрипции главного значения в данном случае обязательно, поскольку в случае другой прескрипции для $1/\tau^2$ в правых частях формул (30) и (33) возможно появление дополнительных вкладов, учет которых должен привести к соответствующей модификации формулы (34). Подчеркнем, что сказанное не относится к аномальному члену, описываемому третьим слагаемым в формуле (34), поскольку аномальный член возникает из сингулярных по α вкладов в функцию $\mathcal{W}_{11}(\alpha;\tau)$ (см. формулу (19) и замечание после формулы (21)).

7. Обсуждение результатов

Проведенные выше исследования доказывают свойство калибровочных сокращений в вероятности, вычисленной в МТВ с применением АО. В общем случае доказательство дано с использованием результатов, полученных ранее в background-field формализме. В приближении NLO доказательство также найдено в обычном формализме с использованием результатов, полученных в fermion-loop схеме. Одновременно найдено простейшее обобщение fermion-loop схемы, позволяющее осуществить полное описание процессов парного рождения W в приближении NLO.

Следует отметить, что результат о калибровочных сокращениях был ожидаем после появления работы [13], показавшей, что задачу определения вероятности можно привести к регулярным fixed-order вычислениям: этот факт давал основание полагать, что проблема калибровочной инвариантности тоже может быть решена. Однако при ближайшем рассмотрении проблемы оказалось, что до получения строгого результата здесь существует большая дистанция. Действительно, правила Фейнмана в МТВ+АО совпадают с обычными только вне массовой оболочки нестабильного состояния. Поэтому калибровочная инвариантность *a priori* имеет место только в той области кинематических переменных, в которой исключается проявление полюсных особенностей от вкладов промежуточных нестабильных состояний. Вместе с этим в любой окрестности указанных особенностей нестандартные вклады в силу дельта-функций оказываются конечными, сколько бы ни мала была окрестность. Причем о свойствах этих вкладов заранее ничего неизвестно. Это особенно ясно в случае, когда рассматриваются высшие порядки разложения (начиная с NLO), в которых начинают проявляться вклады производных дельта-функций, исключающих прямое применение результатов о калибровочной инвариантности дополнительных диаграмм Фейнмана.

Указанная трудность в настоящей работе обходится путем использования других специфических свойств АО разложения квадрированного пропагатора, позволяющих осуществить поэтапное сравнение с результатами обычного подхода, основанного на вычислении амплитуды с дайсоновским суммированием. Особая роль в решении этого вопроса отводится аномальному аддитивному члену, осуществляющему необходимую коррекцию результатов обычного подхода.

Вообще, метод сравнения с результатами обычного подхода способствует в ряде случаев получению результатов кратчайшим путем. Однако с другой стороны, он не всегда позволяет в полной мере выявить преимущества нового подхода. В частности, в высших порядках МТВ в случае использования результатов, полученных в background-field формализме, этот метод не позволяет полностью решить проблему калибровочной инвариантности. Все что удается сделать — это на основе результатов работы [10] показать, что в МТВ тоже имеет место свойство калибровочных сокращений, контролируемых ТУ (т.е. сокращений вкладов продольных векторных бозонов и голдстоуновских псевдоскаляров, духов etc.). Этого достаточно для того, чтобы избежать появление неконтролируемых высокоэнергетических вкладов, а также неконтролируемых вкладов, связанных с большими отношениями типа s/m_e^2 etc. [8]. Тем не менее, некоторая остаточная зависимость от квантового калибровочного параметра все же может остаться, поскольку она остается после указанных калибровочных сокращений в результатах работы [10]. В [9,12] это свойство трактуется как указание на некоторую "произвольность" любой схемы с дайсоновским суммированием.

В случае же полного АО-разложения можно ожидать, что такая остаточная зависимость должна исчезнуть. Действительно, взглянем на формулу (32). В первом члене в правой части этой формулы может оставаться зависимость от квантового калибровочного параметра [10]. Но она может проявиться также и во втором члене через вклады $\mathrm{Im}\Sigma_2(0)$. В отличие от 1-петлевого аналога этой величины, $\mathrm{Im}\Sigma_2(0)$ вообще говоря не связана с on-shell шириной. Следовательно, не существует указаний на то, что величина $\mathrm{Im}\Sigma_2(0)$ должна быть калибровочно-инвариантной. Таким образом, при переходе к формуле (34), в которой выполнено полное АО-разложение, вполне может произойти полное сокращение калибровочно-зависимых вкладов. Впрочем окончательный ответ на этот вопрос может быть получен в результате прямых вычислений.

В заключение обсудим еще два вопроса, обычно возникающих при сопоставлении результатов МТВ+АО с результатами обычного подхода. По существу речь пойдет о сравнении с брейт-вигнеровской параметризацией вкладов нестабильного состояния. Первый вопрос касается проблемы определения массы и ширины нестабильного состояния. В подходе МТВ+АО обе эти величины являются вторичными, подлежащими вычислению на основе данного значения константы связи, перенормированной (нефизической) массы M, и других первичных параметров теории. По-видимому, самый радикальный способ определения "физической" массы и ширины связан с вычислением положения полюса нестабильного пропагатора в комплексной области, что эквивалентно решению уравнения $M^2 - s_p - \Sigma(s_p) = 0$, где $s_p = M_p^2 - \mathrm{i} M_p \Gamma_p$.

Второй вариант состоит в отождествлении "физической" массы с величиной M_1, определенной как положение нуля реальной части знаменателя пропагатора: $M^2 - M_1^2 - \mathrm{Re}\Sigma(M_1^2) = 0$. Ширина в этом варианте определяется как результат ее прямого вычисления при $p^2 = M_1$. Обсуждению вопроса о выборе между этими двумя вариантами посвящена обширная литература. По ее итогам мы здесь отметим, что второй вариант является неудовлетворительным, поскольку начиная с двух петель M_1 не является калибровочно инвариантной величиной. В высших порядках ТВ этот эффект, очевидно, должен отразиться и на свойствах ширины, вычисленной по второму варианту.

Второй вопрос касается проблемы дельта-функций в результатах АО-разложения, и, скорее всего, является наиболее актуальным с точки зрения адаптации метода МТВ+АО в широких кругах научной общественности. По всей видимости, проблему следует обозначить как иллюзорное противоречие между присутствием дельта-функций и совершенно справедливым представлением о непрерывности физических результатов как функций физических параметров (в данном случае кинематических переменных). Эта проблема, естественно, поднималась и детально обсуждалась в работе [13]. Сущность решения сводится к тому, что между квадратом амплитуды (то, что обычно вычисляется) и истинной вероятностью процесса (то, что наблюдается) на самом деле нет прямого тождества. В самом деле, вычисленная исходя из диаграмм унитарности формальная вероятность, прежде чем стать действительно наблюдаемой величиной, *должна быть обязательно подвергнута операции интегрирования или, иначе говоря, "размазывания" с разного рода весовыми функциями*[9].

В случае процессов с заряженными начальными или конечными состояниями в качестве такой весовой функции выступает в первую очередь функция излучения мягких фотонов (flux function) [1,4,5]. Кроме этого, в "размазывание" дают вклад аппаратные функции, описывающие несовершенство используемых приборов. В действительности, однако, дело этим не исчерпывается, поскольку даже в случае процессов с нейтральными начальными и конечными состояниями (если гипотетически допустить, что известен способ их приготовления и регистрации *без всякого* участия заряженных частиц), а также в случае использования технически совершенных измерительно-приготовительных приборов, указанный эффект все равно остается, поскольку измерительный прибор по *принципиальным* соображениям всегда влияет на измеряемый объект [24]. В контексте рассматриваемой проблемы это означает, что в природе не существует прибора, способного сформировать абсолютно монохроматические пучки, и одновременно способного регистрировать абсолютно монохроматические конечные состояния. Таких приборов нет и быть не может потому, что *в обоих* случаях соответствующий (идеальный) прибор должен быть [25] размером со Вселенную.

Таким образом, в процессе любого измерения не существует даже гипотетического способа "попасть" точно в дельта-функцию, поскольку любое измерение обязательно сразу охватывает некоторую окрестность. Свойство гладкости получающегося результата в случае попадания в эту окрестность дельта-функции гарантируется асимптотическими свойствами АО-разложения.

Благодарности

Автор признателен Д.Ю.Бардину, Л.В.Калиновской и Ф.В.Ткачеву за обсуждение вопросов, связанных с приложениями электрослабой теории, Ф.В.Ткачеву также за приглашение заняться вопросами нестабильности и обсуждение результатов его работы [13].

[9]Следует отметить, что если нет интегрирования квадрата амплитуды, то нет и проблемы неинтегрируемых сингулярностей в фазовом пространстве, и все расчеты можно осуществить в обычном подходе ТВ. Иначе говоря, если нет интегрирования, то нет и поля приложения для метода МТВ+АО. (Напомним, что этот метод предназначен именно для вычисления проблемных интегралов в вероятности. Если интеграл не проблемный, то дельта-функции не возникают.)

Хотелось бы поблагодарить А.А.Славнова за ценное замечание о ТУ в присутствии массы фотона, а также Б.А.Арбузова и В.Е.Рочева за поддержку и полезные дискуссии.

Работа выполнена при *моральной* поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант РФФИ №99-02-18365.

Список литературы

[1] Report CERN 96-01. Physics at LEP2, eds. G.Altarelli, T.Sjostrand and F.Zwirner.

[2] Veltman M. // Physica, 1963, v.29, p.186.

[3] Beenakker W. et al. – In: Ref. [1], p.79 [hep-ph/9602352].

[4] Montagna G., Nicrosini O. and Piccinini F. Rev.Nouvo Cim., 1998, v.21, p.1.

[5] Bardin D. and Passarino G. The Standard Model in the Making Precision Study of the Electroweak Interactions, Oxford Science Pub., Clarendon Press, Oxford,1999.

[6] Stuart R.G. // Phys.Lett., 1991, v.B262, p.113.

[7] Beenakker W., Berends F.A. and Chapovsky A.P. // Nucl.Phys., 1999, v.B548, p.3; Denner A., Dittmaier S., Roth M. and Wackeroth D. Radiative corrections to $e^+e^- \to WW \to 4$ fermions, hep-ph/9909363.

[8] Argyres E.N. et al. // Phys. Lett., 1995, v.B358, p.339 [hep-ph/9507216]

[9] Beenakker W. et al. // Nucl.Phys., 1997, v.B500, p.255.

[10] Denner A. and Dittmaier S. // Phys.Rev., 1996, v.D54, p.4499 [hep-ph/9603341].

[11] Dittmaier S. Theoretical aspects of W physics. – In: Proc. HEP 97 (Jerusalem), eds. D.Lellouch, Springer-Verlag, 1999, p.709 [hep-ph/9710542]; Radiative corrections to W-pair production in e^+e^- annihilation, hep-ph/9811434.

[12] Beenakker W. and Denner A. // Acta Phys.Polon B29 (98) 2821.

[13] Tkachov F.V. Perturbation theory With unstable fundamental fields, hep-ph/9802307.

[14] Tkachov F.V. // Int.J.Mod.Phys., 1993, v.A8, p.2047 [hep-ph/9612284].

[15] Ткачев Ф.В. // ЭЧАЯ, 1994, т.25, вып.3, с.649.

[16] Tkachov F.V. // Phys.Lett., 1997, v.B412, p.350 [hep-ph/9703424].

[17] Schwartz L. Theorie des Distributions. I, II, Paris, 1950-51.

[18] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Ф-М.Лит., 1959 (2 изд.).

[19] Боголюбов Н.Н. // ДАН СССР, 1952, т.82, с.217.

[20] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. – М.: Наука, 1984 (4 изд.).

[21] Nekrasov M.L. and Tkachov F.V. On the structure of systematic perturbation theory With unstable fields, Report in XIV Int.

[22] Slavnov A.A. // Phys.Lett., 1981, v.B98, p.57.

[23] Bardin D. Field Theory and Standard Model. – In: 1999 European School of High Energy Physics. CERN Yellow Report, 2000 (to be published).

[24] Bohr N. // Nature, Suppl. 121 (1928) 580; Discussion With Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics. – In: "A.Einstein, philosopher-scientist", Evanston,1949, p.201-241.

[25] Heisenberg W. Z.Phys., 1927, v.43, p. 172.

Рукопись поступила 15 декабря 1999 г.

М.Л. Некрасов
Эффекты конечной ширины и калибровочные сокращения в процессах рождения W- и Z-бозонов в подходе модифицированной теории возмущений.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы LaTeX.
Редактор Н.В.Ежела. Технический редактор Н.В.Орлова.

Подписано к печати 17.12.99. Формат $60 \times 84/8$. Офсетная печать.
Печ.л. 3,0. Уч.-изд.л. 2,4. Тираж 130. Заказ 201. Индекс 3649.
ЛР №020498 17.04.97.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 99–57, И Ф В Э, 1999