



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 99–59  
КО

А. И. Курносенко

## ИНВЕРСНЫЙ ИНВАРИАНТ ПАРЫ ОКРУЖНОСТЕЙ

Публикуется в сборнике  
*“Записки научных семинаров  
Петерб. отд. Мат. ин-та им. Стеклова”*

Протвино 1999

**Аннотация**

Курносенко А.И. Инверсный инвариант пары окружностей: Препринт ИФВЭ 99–59. – Протвино, 1999. – 16 с., 7 рис., библиогр.: 10.

Вводится инверсный инвариант, близкий по содержанию к понятию *инверсного расстояния* между двумя непересекающимися окружностями. В отличие от инверсного расстояния, он определяется для любой пары прямых и окружностей и учитывает их ориентацию. В качестве приложений инварианта рассматриваются задачи о сопряжении окружностей, исследуются свойства плоских кривых, связанные с характером монотонности кривизны.

**Abstract**

Kurnosenko A.I. Inversive Invariant of a Pair of Circles: IHEP Preprint 99–59. – Protvino, 1999. – p. 16, figs. 7, refs.: 10.

An inversive invariant of two oriented circles is introduced. Being close to Coxeter's inversive distance between two non-intersecting circles, it is defined for any pair of oriented circles (straight lines). To demonstrate its effectiveness two topics are discussed: the problem of  $C^1$ -conjunction of circles and the properties of plane curves with monotonous curvature.

E-mail: kurnosenko@mx.ihep.su

К вводимому здесь *инварианту пары окружностей* автора привели различные задачи с плоскими кривыми. Так, с его использованием, хотя и без явного определения, в статье [1] сформулированы условия, сопровождающие монотонность кривизны плоской кривой. Близкой по содержанию величиной является *инверсное расстояние*  $\delta$ , определяемое для пары *непересекающихся* окружностей [2,3]. Если  $a$  и  $b$  — их радиусы,  $c$  — межцентровое расстояние, и их можно инвертировать в пару концентричных окружностей радиусов  $r_1$  и  $r_2$ , либо в прямую и окружность радиуса  $r_0$  с центром на расстоянии  $d$  от прямой, то

$$\delta = \operatorname{Arch} \left| \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right| = \ln \frac{\max(r_1, r_2)}{\min(r_1, r_2)} = \ln \frac{d}{r_0}. \quad (1)$$

По-видимому, впервые инверсное расстояние было введено Г. С. М. Коксетером в [3]: “*The object of this note is to encourage use of «inversive distance», which is a number determined by two non-intersecting circles in such a way as to be additive (like ordinary distance) for three circles belonging to a (non-intersecting) pencil, and invariant under the group generated by inversions.*”

Мотивация данной статьи близка к процитированным намерениям проф. Коксета — “*to encourage use of . . .*”. Инверсный инвариант в предлагаемой здесь версии определяется для любой пары прямых и окружностей и учитывает их ориентацию. Эффективность его применения мы продемонстрируем на нескольких примерах.

**Основные определения.** Под окружностью  $\mathcal{K}_i$  на канонически ориентированной плоскости будем понимать *ориентированную кривую постоянной кривизны* и определять ее четверкой параметров — координатами начальной точки  $P_i = (x_i, y_i)$ , направлением  $\tau_i$  касательной в этой точке и кривизной  $k_i$ :

$$\mathcal{K}_i = K(x_i, y_i, \tau_i, k_i).$$

Формулы для описания инверсии, сопряжения дуг и т.п. воспримут случай  $k = 0$  как ординарный (и не потребуют даже предельного перехода), если от традиционных

уравнений окружности перейти к неявному уравнению *линии постоянной кривизны*

$$C(x, y; \mathcal{K}_1) := k_1 [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2] + 2(x-x_1) \sin \tau_1 - 2(y-y_1) \cos \tau_1 = 0. \quad (2)$$

Уравнение  $A(x^2+y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0$  приводится к виду (2) нормировкой (делением) на  $\pm\sqrt{B^2+C^2-AD}$ . Полагая  $\mathcal{K} = K(0, 0, 0^\circ, k)$ , получаем “каноническое уравнение линии постоянной кривизны” и его явное представление в окрестности начала координат:

$$k(x^2+y^2) - 2y = 0, \quad y(x) = \frac{kx^2}{1+\sqrt{1-k^2x^2}}. \quad (3)$$

Вектор  $\mathbf{u}_i = \|U_i, V_i\|$ ,

$$U_i = k_i x_i - \sin \tau_i, \quad V_i = k_i y_i + \cos \tau_i, \quad (4)$$

не зависит от произвола в выборе начальной точки на кривой (2): при  $k = 0$  это орт нормали к прямой, в противном случае  $\mathbf{u}/k$  есть радиус-вектор центра окружности. Во всех точках плоскости выполняется неравенство

$$(k_1 x - U_1)^2 + (k_1 y - V_1)^2 \equiv k_1 C(x, y; \mathcal{K}_1) + 1 \geq 0, \quad (5)$$

в котором равенство достигается только в центре окружности.

Расстояние  $D$  от произвольной точки  $P = (x, y)$  до окружности  $\mathcal{K}_1$  равно

$$D(P; \mathcal{K}_1) = \frac{C(P; \mathcal{K}_1)}{1 + \sqrt{1 + k_1 C(P; \mathcal{K}_1)}}. \quad (6)$$

Знак величин  $D$  и  $C$  отражает расположение точки слева ( $C < 0$ ) или справа ( $C > 0$ ) от окружности. В отличие от понятий “внутренность” и “внешность” круга, понятия “слева” и “справа” более подходят для задач ориентированной геометрии, в частности, моделирования твердых тел. Так, если кривая  $\mathbf{r}(s) = \|x(s), y(s)\|$  является контуром плоской детали, и направление обхода контура зафиксировано так, чтобы вектор нормали  $\|-y'_s, x'_s\|$  совпал с вектором давления (пальцем) на деталь, то понятия “слева–справа” станут синонимами понятий “материал–воздух” (рис. 1).

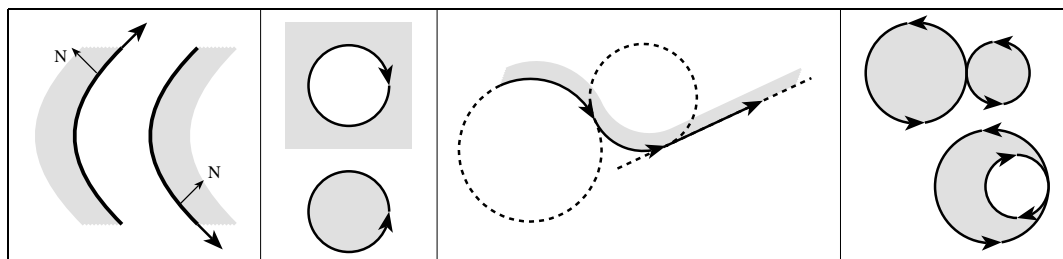


Рис. 1.

Положительная и отрицательная кривизна будут соответствовать участкам типа “вал–отверстие”, равно как случай  $k = 0$  — неприменимости этих понятий. Итак, определим *область материала*:

$$\text{Mat}(\mathcal{K}) := \{(x, y) : C(x, y; \mathcal{K}) \leq 0\}. \quad (7)$$

Это определение заменит конструкцию “внутренность круга, если  $k > 0$ , область слева от прямой, если  $k = 0$ , или внешность круга, если  $k < 0$ ”.

Для окружности  $\mathcal{K}_i$  определим *реверсную окружность*  $\mathcal{K}_i^* = K(x_i, y_i, \tau_i + \pi, -k_i)$ , имеющую ту же границу, но противоположную кривизну. “Область воздуха” окружности  $\mathcal{K}_i$  есть область материала  $\text{Mat}(\mathcal{K}_i^*)$  реверсной окружности.

На рис. 2 показаны спираль Корню с возрастающей кривизной и порождаемое ею семейство ориентированных кругов кривизны  $\mathcal{K}(s)$ . Наблюдаемая вложенность множеств в терминах (7) описывается следующим образом (теорема 2):

$$s_2 > s_1 \implies \text{Mat}(\mathcal{K}(s_2)) \subset \text{Mat}(\mathcal{K}(s_1)).$$

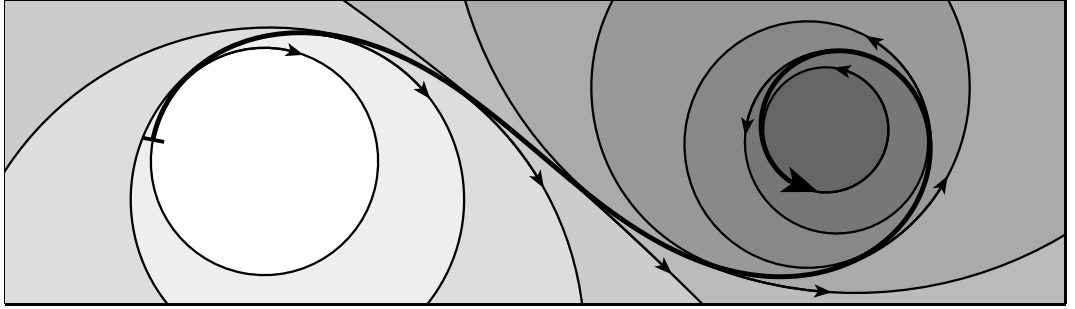


Рис. 2.

*Радикальная ось* пары окружностей определяется в [2] как геометрическое место точек, степень которых относительно обеих данных окружностей одинакова. Напомним, что степенью точки  $P$  относительно окружности  $\mathcal{K}$  радиуса  $R$  с центром в точке  $O$  называется величина  $|OP|^2 - R^2$ . Легко убедиться, что она равна  $C(P; \mathcal{K})/k$ . Радикальную ось можно также определить как прямую, проходящую через общие точки обеих окружностей. Даже если общие точки мнимые, содержащая их прямая и лежащая на ней средняя точка действительны. Неявное уравнение оси имеет вид

$$k_1 C(x, y; \mathcal{K}_2) - k_2 C(x, y; \mathcal{K}_1) = 0. \quad (8)$$

Она пересекается с общим перпендикуляром пары в точке

$$\|\hat{x}, \hat{y}\| = \frac{k_1 \mathbf{u}_1 + k_2 \mathbf{u}_2 - (k_1 \mathbf{u}_2 + k_2 \mathbf{u}_1)(1 - 2Q)}{H^2}.$$

Здесь  $H^2$  и  $Q$  — инварианты, к определению которых мы и переходим.

**Инварианты пары окружностей.** Для пары окружностей  $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$  введем обозначения  $\|\Delta x, \Delta y\| = \|x_2 - x_1, y_2 - y_1\|$  и определим величины

$$\begin{aligned} F &= k_1 k_2 \Delta x + k_2 \sin \tau_1 - k_1 \sin \tau_2 = k_1 U_2 - k_2 U_1, \\ G &= k_1 k_2 \Delta y - k_2 \cos \tau_1 + k_1 \cos \tau_2 = k_1 V_2 - k_2 V_1, \\ H^2 &= F^2 + G^2. \end{aligned} \quad (9)$$

При  $k_{1,2} \neq 0$  вектор  $\|F, G\|$  коллинеарен вектору  $\mathbf{d}$ , соединяющему центры окружностей:

$$\|F, G\| = k_1 k_2 \cdot \|\mathbf{u}_2/k_2 - \mathbf{u}_1/k_1\| = k_1 k_2 \mathbf{d} \implies H^2 = |k_1 k_2 \mathbf{d}|^2.$$

Если, например,  $k_1 = 0$ , то вектор  $\|F, G\|$  перпендикулярен прямой  $\mathcal{K}_1$ :

$$\|F, G\| = k_2 \cdot \|\sin \tau_1, -\cos \tau_1\| \implies H^2 = k_2^2.$$

Таким образом, если  $H^2 \neq 0$ , то существует (и единственен) общий перпендикуляр к двум окружностям, и вектор  $\|F, G\|$  определяет его направление. Величина  $H^2$  не зависит от выбора системы координат и является инвариантом данной пары окружностей относительно поворота и переноса. Наконец, введем инвариант

$$Q(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) = \frac{k_1 k_2}{4} (\Delta x^2 + \Delta y^2) + \frac{k_2}{2} (\Delta x \sin \tau_1 - \Delta y \cos \tau_1) - \frac{k_1}{2} (\Delta x \sin \tau_2 - \Delta y \cos \tau_2) + \sin^2 \frac{\tau_2 - \tau_1}{2}. \quad (10)$$

Подстановками (9) проверяется соотношение

$$H^2 = 4k_1 k_2 Q + (k_2 - k_1)^2. \quad (11)$$

Независимость  $Q$  от выбора начальных точек и системы координат при  $k_1 = k_2 = 0$  очевидна из определения  $[\tau_{1,2}(s) = \text{const}_{1,2}]$ , при  $k_1 k_2 \neq 0$  она следует из (11); в ситуации  $k_1 = 0, k_2 \neq 0$  получим  $2Q = 1 + 2k_2 D$ , где  $D$  — расстояние (6) от центра окружности  $\mathcal{K}_2$  до прямой  $\mathcal{K}_1$ . Для  $Q(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j)$  и других функций пары окружностей будем использовать обозначения типа  $Q_{ij}$  или просто  $Q$ , если пара заранее оговорена.

Пару, для которой  $H^2 = 0$ , назовем вырожденной. Это либо пара прямых, либо пара концентричных окружностей.

Решая систему двух уравнений типа (2) в поисках точек пересечения невырожденной пары окружностей, мы получим, что их координаты выражаются через  $\sqrt{Q(1-Q)}$ , т.е. окружности могут иметь общую точку только при  $0 \leq Q \leq 1$ . Выберем ее в качестве начальной для обеих окружностей. Тогда разность  $\tau_2 - \tau_1$  равна  $\Delta\tau_{12}$  — углу между касательными в общей точке,  $\Delta x = \Delta y = 0$ , и

$$Q_{12} = Q_{21} = \sin^2(\Delta\tau_{12}/2), \quad 1 - 2Q = \cos \Delta\tau_{12}. \quad (12)$$

Эти соотношения проясняют геометрический смысл введенного инварианта. Они справедливы и в том случае, когда окружности не имеют действительных общих точек (угол пересечения чисто мнимый,  $\Delta\tau_{12} = i\delta$  ( $1$ ),  $\cos \Delta\tau_{12} < -1$  или  $\cos \Delta\tau_{12} > 1$ ). Из сохранения углов при инверсии следует, что инвариант  $Q$  сохраняется также при инверсии пары  $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$  относительно произвольной третьей окружности  $\mathcal{K}_0$ . Это дает основания назвать  $Q$  *инверсным инвариантом пары ориентированных окружностей*.

Под касанием кривых будем понимать сохранение направления касательной в общей точке. В этом смысле пары окружностей на последнем фрагменте рис. 1 не касаются. Эту ситуацию назовем “антикасанием”. Таким образом,  $Q = 0$ , если окружности касаются ( $\Delta\tau_{12} = 0$ ); окружности пересекаются, если  $0 < Q < 1$ ; случай  $Q = 1$  соответствует антикасанию ( $\Delta\tau_{12} = \pm\pi$ ). Для пары прямых всегда  $0 \leq Q \leq 1$ , предельные значения соответствуют параллельности и антипараллельности.

В остальных случаях общих точек нет, и взаимное расположение окружностей можно описать следующим образом: если  $Q < 0$ , то при сближении окружностей их

пересечению будет предшествовать касание, если же  $Q > 1$  — антикасание. Легко убедиться в справедливости равенств

$$Q(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) = 1 - Q(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2^*) = 1 - Q(\mathcal{K}_1^*, \mathcal{K}_2) = Q(\mathcal{K}_1^*, \mathcal{K}_2^*).$$

**Инверсия.** Пусть точка  $P_1 = (x_1, y_1)$  и окружность  $\mathcal{K}_1$  при инверсии относительно окружности  $\mathcal{K}_0$  преобразуются в точку  $P_2 = (x_2, y_2)$  и окружность  $\mathcal{K}_2$ . Обычно инверсия определяется равенством  $|OP_1| \cdot |OP_2| = R^2$ , где  $O$  и  $R$  — центр и радиус окружности инверсии (и условием расположения точки и ее образа на одном радиальном луче). Подстановка  $R^2 = 1/k_0^2$ ,  $|OP_i| = \sqrt{1+k_0 C_i}/|k_0|$ , где  $C_i = C(P_i; \mathcal{K}_0)$ , дает соотношение

$$C_1 + C_2 = -k_0 C_1 C_2,$$

включающее и случай  $k_0 = 0$ . Преобразование  $(x_1, y_1, \tau_1) \rightarrow (x_2, y_2, \tau_2)$  может быть записано в виде

$$\|x_2, y_2\| = \frac{\|x_1, y_1\| + C_1 \|U_0, V_0\|}{1 + k_0 C_1}, \quad \tau_2 = -\tau_1 - 2 \operatorname{arctg} \frac{k_0 x_1 - U_0}{k_0 y_1 - V_0}, \quad (13)$$

дающем при  $k_0 = 0$  симметричное отражение.

Пусть  $\Gamma_1 := (x_1(s), y_1(s))$  — гладкая кривая с натуральным уравнением  $k_1(s)$ . Она порождает семейство кругов кривизны  $\mathcal{K}(s) = K(x_1(s), y_1(s), \tau_1(s), k_1(s))$  (рис. 2). Определим на  $\Gamma_1$  функции относительно произвольной окружности  $\mathcal{K}_0$ :

$$C(s) = C(x_1(s), y_1(s); \mathcal{K}_0) \quad \text{и} \quad Q(s) = Q(\mathcal{K}(s), \mathcal{K}_0). \quad (14)$$

При инверсии (13) кривая  $\Gamma_1$  преобразуется в кривую  $\Gamma_2 := (x_2(s), y_2(s))$ , для которой  $s$  уже не будет натуральным параметром (кроме частного случая  $k_0 = 0$ ). Для ее дифференциала дуги  $d\sigma$  и функции кривизны получим

$$\frac{d\sigma}{ds} = \sqrt{x_2'^2 + y_2'^2} = \frac{1}{1 + k_0 C(s)}, \quad k_2(s) = \frac{y_2'' x_2' - x_2'' y_2'}{(x_2'^2 + y_2'^2)^{3/2}} = 2k_0 [1 - 2Q(s)] - k_1(s) \quad (15)$$

( $f'$  обозначает производную по  $s$ ). В частности, для окружности  $\mathcal{K}_1$  и ее образа  $\mathcal{K}_2$

$$k_2 = 2k_0(1 - 2Q_{01}) - k_1. \quad (16)$$

По отношению к  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$  окружность  $\mathcal{K}_0$ , преобразующая две данные окружности друг в друга, является *серединной окружностью* [2, стр. 150]. Она делит пополам угол  $\tau_{12}$  (12), т.е.  $|\tau_{01}| = |\tau_{02}| = |\tau_{12}|/2$ ,  $\cos \tau_{01} = \cos \tau_{02}$ , из чего следуют соотношения

$$Q_{02} = Q_{01}, \quad Q_{12} = 4Q_{01}(1 - Q_{01}).$$

Комбинируя с (16), получаем кривизну серединной окружности (с точностью до реверса):

$$k_0 = \frac{k_1 + k_2}{\pm 2\sqrt{1 - Q_{12}}}.$$

Известно, что таких окружностей две (если  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$  пересекаются) или одна. Если же учитывать ориентацию данных окружностей, то серединная окружность

либо единственна, либо не существует. В последнем случае существует окружность, преобразующая  $\mathcal{K}_1$  в  $\mathcal{K}_2^*$ . Отметим, как просто в терминах (2) выражаются неявные уравнения этих окружностей:

$$\begin{array}{l} \mathcal{K}_1 \leftrightarrow \mathcal{K}_2 \\ \mathcal{K}_1^* \leftrightarrow \mathcal{K}_2^* \end{array} : \frac{C(x, y; \mathcal{K}_1) + C(x, y; \mathcal{K}_2)}{\pm 2\sqrt{1 - Q_{12}}} = 0; \quad \begin{array}{l} \mathcal{K}_1 \leftrightarrow \mathcal{K}_2^* \\ \mathcal{K}_1^* \leftrightarrow \mathcal{K}_2 \end{array} : \frac{C(x, y; \mathcal{K}_1) - C(x, y; \mathcal{K}_2)}{\pm 2\sqrt{Q_{12}}} = 0.$$

**Собственная система координат пары окружностей.** Для пары  $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$  рассмотрим уравнение относительно  $r$

$$Q = (1 - k_1 r)(1 - k_2 r). \quad (17)$$

Оно может не иметь корней ( $k_1 = k_2 = 0$ ), иметь один (в конфигурации прямая–окружность) или два ( $k_1 k_2 \neq 0$ ) действительных корня  $r_{1,2}$ . Для концентричных окружностей  $r_1 = r_2$ . Пусть  $r$  — любой его корень. Тогда (11) примет вид  $H^2 = (k_1 + k_2 - 2k_1 k_2 r)^2$ . Определим  $H$  следующим образом:

$$H = k_1 + k_2 - 2k_1 k_2 r. \quad (18)$$

При наличии двух корней  $r_{1,2}$   $H(r_1) = -H(r_2)$ ; в противном случае  $H = k_i \neq 0$ , где индекс  $i$  соответствует окружности с ненулевой кривизной. Для невырожденной пары введем новую систему координат  $(x', y')$  подстановками

$$\begin{cases} x = \tilde{x} + x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y = \tilde{y} + x' \sin \theta + y' \cos \theta, \end{cases} \quad \|\tilde{x}, \tilde{y}\| = \frac{\mathbf{u}_2(1 - k_1 r) + \mathbf{u}_1(1 - k_2 r)}{H}, \quad \begin{cases} \cos \theta = F/H \\ \sin \theta = G/H. \end{cases} \quad (19)$$

Ее ось абсцисс совпадает с общим перпендикуляром пары, а точки  $(r, 0)$  и  $(-r, 0)$  могут быть выбраны в качестве начальных. Тогда описания и уравнения окружностей примут вид

$$\begin{array}{ll} \mathcal{K}_1 = K(r, 0, \pi/2, k_1), & C(x, y; \mathcal{K}_1) = k_1[(x-r)^2 + y^2] + 2(x-r), \\ \mathcal{K}_2 = K(-r, 0, -\pi/2, k_2), & C(x, y; \mathcal{K}_2) = k_2[(x+r)^2 + y^2] - 2(x+r). \end{array} \quad (20)$$

Геометрически этому соответствует следующее построение (рис. 3 на стр. 8). Из точек пересечения окружностей с их общим перпендикуляром составим пары  $(P_1, P_2)$ ,  $P_1 \in \mathcal{K}_1$ ,  $P_2 \in \mathcal{K}_2$ , с противоположно направленными касательными векторами. Таких пар или две ( $k_1 k_2 \neq 0$ ), или одна. Если их две — выберем любую. Начало координат установим в точке  $(P_1 + P_2)/2$ , ось ординат направим параллельно касательной к первой окружности в точке  $P_1$  и доопределим направление оси абсцисс до правой системы. Заметим, что окружность с кривизной  $k_0 = 1/r$  и центром в начале координат касается обеих данных окружностей.

Уравнение радикальной оси (8) в системе координат (19) принимает вид

$$x' = \frac{r(k_2 - k_1)}{H}. \quad (21)$$

Докажем следующее утверждение: *если кривизны пары окружностей не равны нулю одновременно, то*

$$\begin{cases} Q(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) \leq 0 \\ k_1 \leq k_2 \end{cases} \implies \text{Mat}(\mathcal{K}_2) \subseteq \text{Mat}(\mathcal{K}_1). \quad (22)$$



**Доказательство.** Представление (20), введенное для невырожденной пары, очевидно, легко распространить и на пару концентричных окружностей.

При  $Q \leq 0$  из (17) следует, что  $r \neq 0$ . Записав (17) в виде  $r^2(k_0 - k_1)(k_0 - k_2) \leq 0$ , где  $k_0 = 1/r$ , получим  $k_1 \leq k_0 \leq k_2$ . Пусть точка  $(x, y) \in \text{Mat}(\mathcal{K}_2)$ , т. е.  $C(x, y; \mathcal{K}_2) \leq 0$ . Ее принадлежность к  $\text{Mat}(\mathcal{K}_1)$  следует из тождества

$$C(x, y; \mathcal{K}_1) \equiv (k_1 - k_0)[(x - r)^2 + y^2] + (k_0 - k_2)[(x + r)^2 + y^2] + C(x, y; \mathcal{K}_2),$$

в правой части которого все слагаемые неположительны, и  $C(x, y; \mathcal{K}_1) \leq 0$ .  $\blacklozenge$

В том же предположении ( $|k_1| + |k_2| \neq 0$ ) справедливо аналогичное утверждение

$$\begin{cases} Q(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) > 1 \\ k_1 + k_2 > 0 \end{cases} \implies \text{Mat}(\mathcal{K}_2) \cap \text{Mat}(\mathcal{K}_1) = \emptyset, \quad (23)$$

а также утверждения, обратные (22) и (23).

**Задача о сопряжении трех дуг.** Задача построения дуги заданного радиуса, касающейся двух данных окружностей, излагается во многих инженерных справочниках. В книгах по геометрии ее, видимо, пропускают как слишком простую (начиная как минимум с задачи Аполлония о четырех окружностях). Тем не менее у нас есть основания обратиться к этой задаче.

- При ее решении скорее всего была бы применена инверсия, преобразующая данную пару в пару окружностей одинакового радиуса, после чего построение становится тривиальным. Но инверсия “не признает” центров окружностей, и связанные с ними свойства теряются.
- Новые качества возникают при учете ориентации и очередности окружностей при обходе контура, что весьма важно для задач геометрического моделирования. Оказывается, что максимальное количество решений сокращается в этом случае с восьми до двух. Из них только одно будет “истинным” сопряжением, если под таковым подразумевать переходную дугу с углом  $|\rho| < 180^\circ$ .
- И алгоритмы, и геометрические описания решений освобождаются при этом от многочисленных *if-then-else*-конструкций, перебирающих варианты взаимного расположения окружностей (например, “внешнее” и “внутреннее” касание) и вырождения одной из них в прямую. Эта информация передается через значение и знак кривизны, известный конструктору в терминах “вал–отверстие”.
- Наконец, интересна связь решений задачи с теоремой о четырех вершинах простой замкнутой кривой. Легко показать, что при циклическом сопряжении четырех окружностей без самопересечения каждая из четырех дуг будет “*протяженной вершиной*” [1, стр. 4]. Иными словами, будут выполнены неравенства

$$k_1 < k_2 > k_3 < k_4 > k_1 \quad (\text{или наоборот}).$$

Рис. 4 демонстрирует различия между решениями без учета и с учетом ориентации окружностей (номер окружности и знак кривизны указаны); последний фрагмент иллюстрирует влияние порядка обхода.

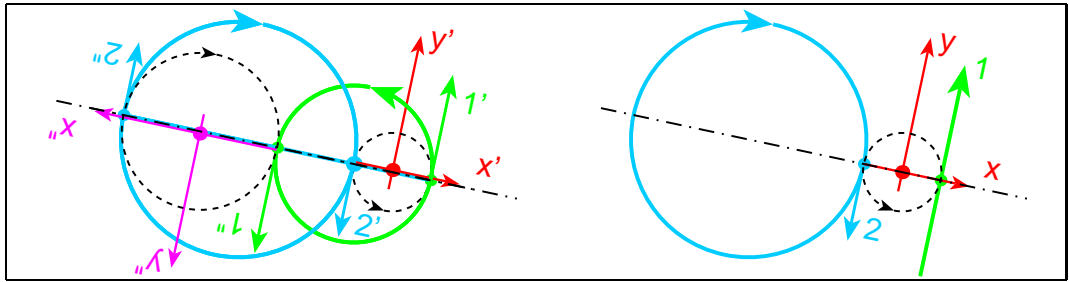


Рис. 3.

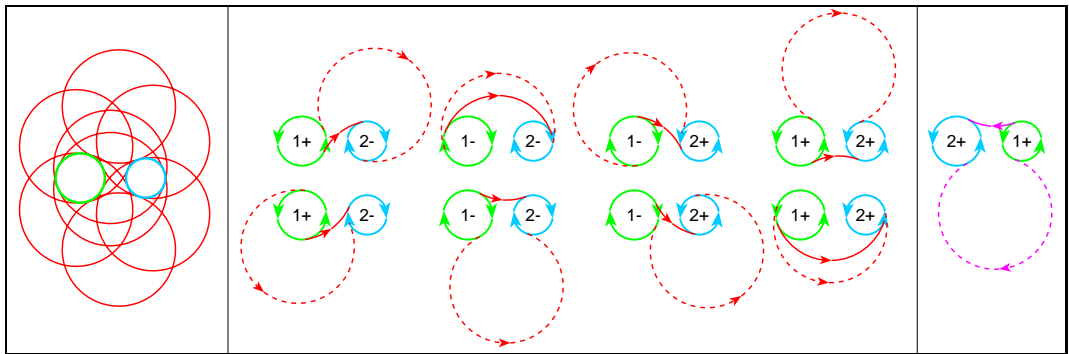


Рис. 4.

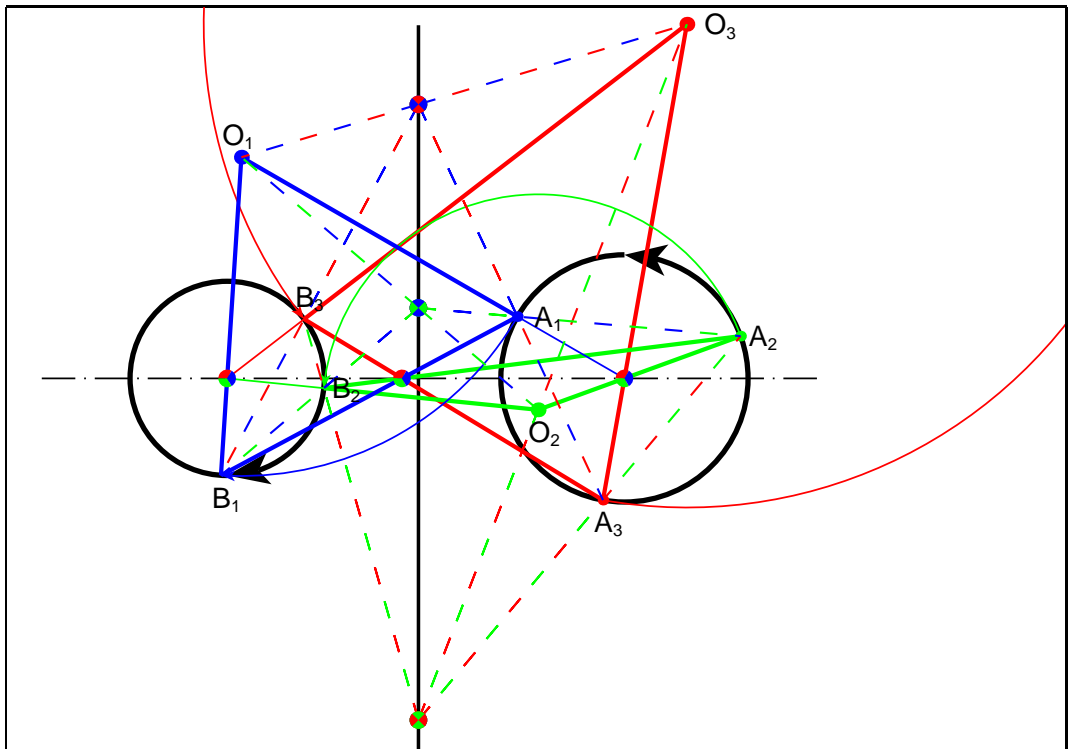


Рис. 5.

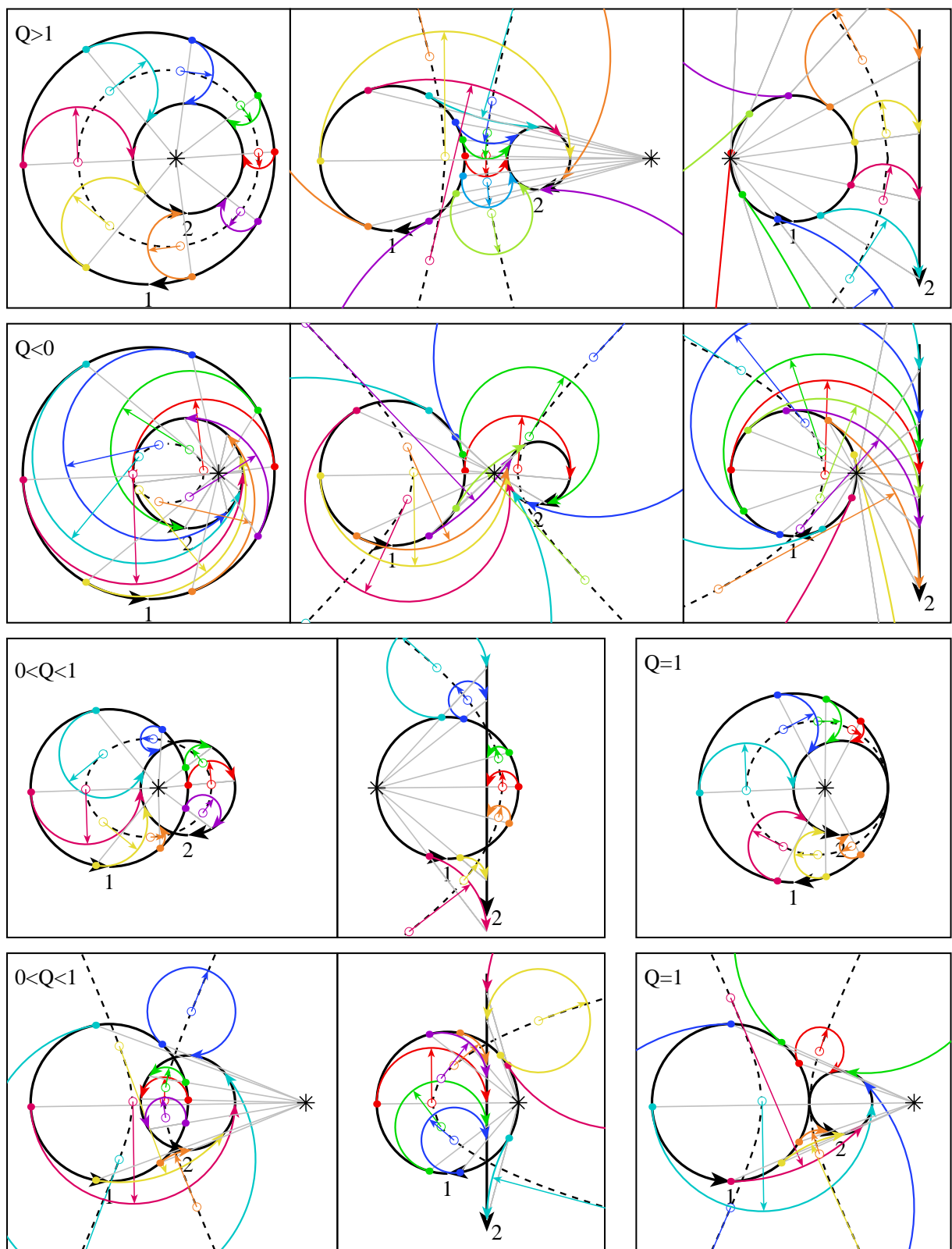


Рис. 6.

Пусть дуга  $\mathcal{K}_1 = K(x_1, y_1, \tau_1, k_1)$  переходит в точке  $T_1 = (p_1, q_1)$  при наклоне  $\xi_1$  в дугу  $\mathcal{K}_0$  кривизны  $k_0$ , которая в точке  $T_2 = (p_2, q_2)$  под углом  $\xi_2$  сопрягается с дугой  $\mathcal{K}_2$  кривизны  $k_2$ . Последняя задана начальными (“конечными”) условиями  $(x_2, y_2)$  и  $\tau_2$ .

Исключим из рассмотрения тривиальные случаи вырожденных окружностей:  $H \neq 0$ . Точки  $T_1$  и  $T_2$  лежат на окружности  $\mathcal{K}_0$ , поэтому

$$\begin{aligned} U_0 : \quad & k_0 p_1 - \sin \xi_1 = k_0 p_2 - \sin \xi_2, \\ V_0 : \quad & k_0 q_1 + \cos \xi_1 = k_0 q_2 + \cos \xi_2. \end{aligned}$$

Величины  $F$  и  $G$  (9) могут быть выражены как через известные параметры  $(x_{1,2}, y_{1,2}, \tau_{1,2})$ , так и через неизвестные  $(p_{1,2}, q_{1,2}, \xi_{1,2})$ :

$$F = k_1 k_2 (x_2 - x_1) + k_2 \sin \tau_1 - k_1 \sin \tau_2 = k_1 k_2 (p_2 - p_1) + k_2 \sin \xi_1 - k_1 \sin \xi_2.$$

Получаем следующую систему уравнений относительно  $\xi_1$  и  $\xi_2$ :

$$\begin{cases} k_2(k_0 - k_1) \sin \xi_1 - k_1(k_0 - k_2) \sin \xi_2 = k_0 F \\ -k_2(k_0 - k_1) \cos \xi_1 + k_1(k_0 - k_2) \cos \xi_2 = k_0 G. \end{cases}$$

Она имеет два решения  $\{\xi_1^+, \xi_2^+\}$  и  $\{\xi_1^-, \xi_2^-\}$

$$\operatorname{tg} \frac{\xi_1^\pm}{2} = \frac{F(k_0 - k_1) \pm 2k_1 \sqrt{QW}}{2k_0 k_1 Q + (k_0 - k_1)(k_2 - k_1 - G)}, \quad \operatorname{tg} \frac{\xi_2^\pm}{2} = -\frac{F(k_0 - k_2) \pm 2k_2 \sqrt{QW}}{2k_0 k_2 Q - (k_0 - k_2)(k_2 - k_1 - G)}, \quad (24)$$

где

$$W = W(k_0) = k_0^2(1 - Q) - k_0(k_1 + k_2) + k_1 k_2. \quad (25)$$

Для угла поворота сопрягающей дуги  $\rho = \xi_2 - \xi_1$  получаем выражение

$$\operatorname{tg} \frac{\rho}{2} = \frac{k_0}{w}, \quad w = \pm \sqrt{\frac{W}{Q}}. \quad (26)$$

Если длина дуги  $\mathcal{K}_0$  равна  $l$ , то ее поворот (как интеграл от кривизны) равен  $k_0 l$  и заключен в пределах  $(0, \pm 2\pi)$  со знаком, равным знаку  $k_0$ . Следовательно, в случае сопряжения меньшей дугой ( $|\rho| < \pi$ ) знаки  $\operatorname{tg}(\rho/2)$  и  $k_0$  совпадают. Чтобы получить именно такое сопряжение, в (26) следует выбрать знак плюс перед радикалом при определении вспомогательной переменной  $w$ . Отрицательное значение  $w$  дает сопряжения большей дугой той же кривизны.

Согласно (24), допустимые значения  $k_0$  определяются неравенством  $QW \geq 0$ :

$$Q [k_0^2(1 - Q) - k_0(k_1 + k_2) + k_1 k_2] \geq 0. \quad (27)$$

При  $Q \neq 1$  оно принимает вид

$$Q(1 - Q)(k_0 - k^+)(k_0 - k^-) \geq 0, \quad (28)$$

где  $k^+$  и  $k^-$  — корни полинома  $W(k_0)$  (25):

$$\{k^+, k^-\} = \left\{ \frac{k_1 + k_2 \pm H}{2(1 - Q)} \right\} = \left\{ \frac{1}{r}, \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2 - k_1 k_2 r} \right\}.$$

Пусть  $k^- < k^+$  и  $k_{min} = \min(k_1, k_2)$ ,  $k_{max} = \max(k_1, k_2)$ . Установив равенства

$$(k_1 - k^\pm)(k_2 - k^\pm) = Q \cdot (k^\pm)^2, \quad (29)$$

получим, что оба корня  $k^\pm$  находятся одновременно внутри ( $Q < 0$ ) или снаружи ( $Q > 0$ ,  $Q \neq 1$ ) интервала  $(k_{min}, k_{max})$ . Рассмотрим решения при различных значениях  $Q$ .

1.  $Q < 0$ . Из (28) и (29) получаем

$$k_{min} < k^- \leq k_0 \leq k^+ < k_{max}. \quad (30)$$

Отметим, что при  $Q < 0$  (и только в этом случае) последовательность  $k_1, k_0, k_2$  монотонна.

2.  $Q = 0$ . Дуги  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$  касаются, т.е. сопрягаются без помощи промежуточной дуги. “Нормальных” сопряжений нет.

3.  $0 < Q < 1$ .

$$-\infty \leq k_0 \leq k^- < k_{min}, \quad k_{max} < k^+ \leq k_0 \leq \infty.$$

Сопряжениям с бесконечной кривизной соответствует пересечение окружностей.

4.  $Q = 1$  (“антикасание”). Неравенство (27) принимает вид  $k_0(k_1+k_2) \leq k_1k_2$ , а при  $k_1+k_2=0$  (т.е.  $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2^*$ ) —  $0 \leq -k_1^2 = -k_2^2$ , т.е.

$$\begin{aligned} k_1+k_2 > 0: & \quad -\infty \leq k_0 \leq k_1k_2/(k_1+k_2) < k_{min}; \\ k_1+k_2 = 0: & \quad \text{сопряжений нет}; \\ k_1+k_2 < 0: & \quad k_{max} < k_1k_2/(k_1+k_2) \leq k_0 \leq \infty. \end{aligned}$$

5.  $Q > 1$ . Из (17) следует, что в этом случае равенство  $k_1+k_2=0$  исключено.

$$\begin{aligned} k_1+k_2 > 0: & \quad -\infty < k^- \leq k_0 \leq k^+ < k_{min} \\ k_1+k_2 < 0: & \quad k_{max} < k^- \leq k_0 \leq k^+ < \infty. \end{aligned}$$

Различные типы сопряжений иллюстрирует рис. 6. Пунктирная кривая — геометрическое место центров сопрягающих окружностей (31). “Звездочкой” показан центр подобия [4, стр. 12] пары окружностей, он же — центр серединной окружности (возможно, мнимой).

**Свойства семейства сопрягающих окружностей.** Решения задачи в системе координат (19) имеют вид  $(\Delta k = k_2 - k_1)$ :

$$\begin{aligned} \|\sin \xi_i, \cos \xi_i\| &= \frac{2Qk_0}{H(k_i - k_0)} \|(-1)^i k_i, w\| + \frac{1}{H} \|\Delta k, 0\|, \\ \|p_i, q_i\| &= \frac{2Q}{H(k_i - k_0)} \|(-1)^i k_i, -w\| + \frac{1}{H} \|r\Delta k, 0\|. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое включает положение радикальной оси (21). Если  $\mathcal{K}_1 \neq \mathcal{K}_2^*$  и  $Q \neq 0$ , то для каждой точки на окружности  $\mathcal{K}_1$  (или  $\mathcal{K}_2$ ) сопряжение существует и единственно. Координаты центра сопрягающей дуги равны

$$x = p_{1,2} - \frac{\sin \xi_{1,2}}{k_0} = \frac{\Delta k}{H} \left( r - \frac{1}{k_0} \right), \quad y = q_{1,2} + \frac{\cos \xi_{1,2}}{k_0} = \frac{2wQ}{Hk_0} = \frac{\pm 2\sqrt{QW(k_0)}}{Hk_0}.$$

Исключая  $k_0$ , получаем уравнение геометрического места центров сопрягающих дуг:

$$(\Delta k)^2 y^2 - 4k_1 k_2 Q x^2 - 4Q \Delta k x = 0. \quad (31)$$

При  $k_1 = k_2$  ГМТ вырождается в прямую  $x = 0$ . В противном случае это эллипс ( $k_1 k_2 Q < 0$ ), гипербола ( $k_1 k_2 Q > 0$ ) или парабола ( $k_1 k_2 Q = 0$ ) с эксцентриситетом  $e = |H/\Delta k|$  и фокальным параметром  $p = |2Q/\Delta k|$  (рис. 6).

Каждому сопряжению сопоставим треугольник  $OAB$ , где  $O$  — центр сопрягающей окружности,  $A$  и  $B$  — точки сопряжения. Очевидно, все отрезки  $OA$  и все отрезки  $OB$  пересекаются в точках  $(X_1, 0)$  и  $(X_2, 0)$  — центрах данных окружностей. Любопытно, что все хорды  $AB$  также пересекаются в одной точке  $(X_{12}, 0)$  — центре подобия пары окружностей:

$$X_{12} = \frac{(1-k_1 r) + (1-k_2 r)}{k_2 - k_1}, \quad X_1 = -\frac{1-k_1 r}{k_1}, \quad X_2 = \frac{1-k_2 r}{k_2}.$$

Кроме того, все три точки пересечения лежат на одной прямой — общем перпендикуляре пары. Следовательно, согласно обратной теореме Дезарга, *любые два треугольника  $OAB$  являются перспективными. Центры перспективы лежат на радикальной оси пары окружностей* (рис. 5).

**Спиральные кривые.** Как и в статье [1], под *спиральностью* будем понимать монотонное изменение кривизны вдоль кривой, допуская при этом разрывы кривизны и участки ее постоянства, меньшие полной окружности. Подобное определение, суженное требованиями знакопостоянства и ограниченности кривизны, принято также в статье [5].

Описание инверсии кривых обычно состоит в перечислении конкретных преобразований [6] (например, *парабола*  $\rightarrow$  *цискоида Диоклеса* и пр.). Сохранение спиральности при инверсии — общее свойство этих преобразований, которое можно считать обобщением известного факта — сохранения постоянства кривизны.

**Теорема 1.** *При инверсии спиральной кривой относительно окружности, центр которой не лежит на кривой, спиральность сохраняется, а ее характер (возрастание/убывание кривизны) изменяется на противоположный.*

**Доказательство.** Выберем систему координат так, чтобы окружность инверсии  $\mathcal{K}$  заняла “каноническое” положение (3). Для кривой  $\Gamma_1 := (x_1(s), y_1(s))$  с натуральным уравнением  $k_1(s)$  введем функции  $Q(s; \mathcal{K})$  и  $C(s; \mathcal{K})$  (14):

$$\begin{aligned} C(s) &= k_0[x_1(s)^2 + y_1(s)^2] - 2y_1(s), \\ Q(s) &= \frac{1}{4}k_1(s)C(s) - \frac{k_0}{2}[x_1(s) \sin \tau_1(s) - y_1(s) \cos \tau_1(s)] + \sin^2 \frac{\tau_1(s)}{2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Учитывая, что  $x'_1(s) = \cos \tau_1(s)$ ,  $y'_1(s) = \sin \tau_1(s)$ ,  $\tau'_1(s) = k_1(s)$ , получаем

$$Q'(s) = \frac{1}{4}k'_1(s)C(s). \quad (33)$$

Дифференцируя равенство (15), связывающее кривизну  $k_2(s)$  образа с кривизной  $k_1(s)$  оригинала, получаем

$$k_2'(s) = -k_1'(s) - 4k_0Q'(s) = -k_1'(s) - k_0k_1'(s)C(s) = -k_1'(s)[1 + k_0C(s)]. \quad (34)$$

Так как центр кривизны не лежит на кривой, сомножитель  $[1 + k_0C(s)]$  строго положителен (5). Функции  $k_1(s)$  и  $k_2(s)$  имеют знакопостоянные производные противоположного знака, откуда и следует утверждение теоремы для участков с непрерывной кривизной.

Из определения (10) следует, что если две окружности  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$  касаются в точке  $T$  [ $T = P_1 = (x_1, y_1) = P_2 = (x_2, y_2)$ ,  $\tau_1 = \tau_2$ ], и  $\mathcal{K}_0$  — произвольная третья окружность, то

$$Q_{02} - Q_{01} = \frac{1}{4}(k_2 - k_1)C(T; \mathcal{K}_0).$$

В точках разрыва кривизны, где круг кривизны слева  $\mathcal{K}(s-0)$  касается правого круга кривизны  $\mathcal{K}(s+0)$ , это равенство принимает вид

$$\Delta Q(s) := Q(s+0) - Q(s-0) = \frac{1}{4}\Delta k_1(s)C(s).$$

Поскольку сама кривая непрерывна, непрерывна и функция координат  $C(s)$ . Для скачка кривизны у кривой-образа из (16) получаем

$$\Delta k_2(s) = -\Delta k_1(s) - 4k_0\Delta Q(s) = -\Delta k_1(s)[1 + k_0C(s)],$$

также в соответствии с утверждением теоремы.  $\blacklozenge$

Из формулировки теоремы можно исключить оговорку о том, что центр инверсии не лежит на кривой; хотя кривая-образ будет в этом случае разрывной на бесконечности, два ее участка будут иметь знакопостоянную монотонную функцию кривизны.

Под вершиной кривой мы понимаем точку или участок экстремальной кривизны, не исключая при этом нулевое значение экстремума. Построенный в этой точке круг кривизны будем называть экстремальным.

**Следствие 1.1.** *При инверсии кривой ее вершины преобразуются в вершины образа с противоположным типом экстремума.*

**Расположение кривой относительно круга кривизны.** Расположение кривой относительно окружности кривизны  $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}(s_0)$  зависит от характера монотонности кривизны в точке  $x(s_0), y(s_0)$ . Соответствующие утверждения хорошо известны [7, стр. 34]. Обычно они формулируются и доказываются для некоторой окрестности точки  $s_0$ ,  $s_1 \leq s_0 \leq s_2$  в локальной системе координат, выбранной так, что

$$x(s_0) = 0, \quad y(s_0) = 0, \quad \tau(s_0) = 0. \quad (35)$$

Окрестность  $[s_1, s_2]$  ограничена условиями:

- (a) кривая может быть представлена как функция  $y = f(x)$  в локальной системе координат;
- (b) кривая не имеет разрывов кривизны;

(условие (b) добавлено, поскольку обычно при изложении этой темы оговаривается регулярность кривой). Тогда кривая  $\Gamma(s)$  с возрастающей [убывающей] кривизной расположена слева [соответственно, справа] от круга кривизны  $\mathcal{K}_0$ . Привлекая функцию  $C(s)$  (14) относительно  $\mathcal{K}_0$ , выразим эти утверждения отношениями

$$\begin{aligned} k'(s) > 0: \quad C(s) < 0, \quad \text{или} \quad \Gamma(s) \subset \text{Mat}(\mathcal{K}_0), \quad s_0 < s \leq s_2, \\ k'(s) < 0: \quad C(s) > 0, \quad \text{или} \quad \Gamma(s) \subset \text{Mat}(\mathcal{K}_0^*), \quad s_0 < s \leq s_2. \end{aligned} \quad (36)$$

Если точка  $s_0$  является вершиной (единственной в данной окрестности), то

$$\begin{aligned} \text{для вершины-минимума:} \quad C(s) < 0, \quad \text{или} \quad \Gamma(s) \subset \text{Mat}(\mathcal{K}_0), \quad s_1 \leq s \leq s_2, \\ \text{для вершины-максимума:} \quad C(s) > 0, \quad \text{или} \quad \Gamma(s) \subset \text{Mat}(\mathcal{K}_0^*), \quad s_1 \leq s \leq s_2. \end{aligned} \quad (37)$$

Расширим область справедливости этих дифференциальных утверждений. Следующую теорему иллюстрирует рис. 2.

**Теорема 2.** Пусть  $\Gamma = (x(s), y(s))$ ,  $0 \leq s \leq S$  — спиральная кривая с возрастающей кривизной  $k(s)$ . Тогда вся кривая и все ее круги кривизны  $\mathcal{K}(s)$  находятся в материале круга кривизны  $\mathcal{K}_0 := \mathcal{K}(0)$ .

**Доказательство.** Особый случай  $k(0) = -\infty$  (например, логарифмическая спираль или эвольвента окружности) можно в пределе рассматривать как вырождение  $\mathcal{K}(0)$  в точку, понимая под  $\text{Mat}(\mathcal{K}(0))$  всю плоскость. Далее будем считать значение  $k(0)$  конечным, что означает существование функций  $Q(s)$  и  $C(s)$  (32).

Если в начале кривой имеется участок постоянной кривизны, то за исходную точку  $s = 0$  примем конец этого участка. Перейдя в систему координат (35), рассмотрим дугу кривой на отрезке  $s \in [0, s_1]$ , в пределах которого выполнены условия (a) и (b), сопровождающие утверждение (36).

Из (33) и (36) следует, что  $Q'(s) < 0$  и, поскольку  $Q(0) = Q(\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_0) = 0$ , на рассматриваемом отрезке  $Q(s) \leq 0$ . Тогда, согласно (22),  $\text{Mat}(\mathcal{K}(s)) \subset \text{Mat}(\mathcal{K}_0)$ . Если на конце участка имеется разрыв кривизны, то круг слева  $\mathcal{K}^- = \mathcal{K}(s_1 - 0)$  будет касаться круга  $\mathcal{K}^+ = \mathcal{K}(s_1 + 0)$ , построенного справа от разрыва, т.е.  $Q(\mathcal{K}^-, \mathcal{K}^+) = 0$  и  $k(s_1 + 0) > k(s_1 - 0)$ . Значит, соотношение  $\text{Mat}(\mathcal{K}^+) \subset \text{Mat}(\mathcal{K}^-) \subset \text{Mat}(\mathcal{K}_0)$  также будет выполнено. То же рассмотрение с кругом кривизны  $\mathcal{K}^+$  в качестве начального позволяет распространить утверждение на всю кривую. ♦

**Следствие 2.1.** Спиральная кривая не имеет самопересечений (в [10] этот факт доказан для частного случая знакопостоянной монотонной кривизны).

**Следствие 2.2.** Окрестность вершины кривой с минимальной (максимальной) кривизной, лежащая в материале (соответственно, вне материала) экстремального круга кривизны, включает две соседние вершины либо, если таковых нет, всю кривую.



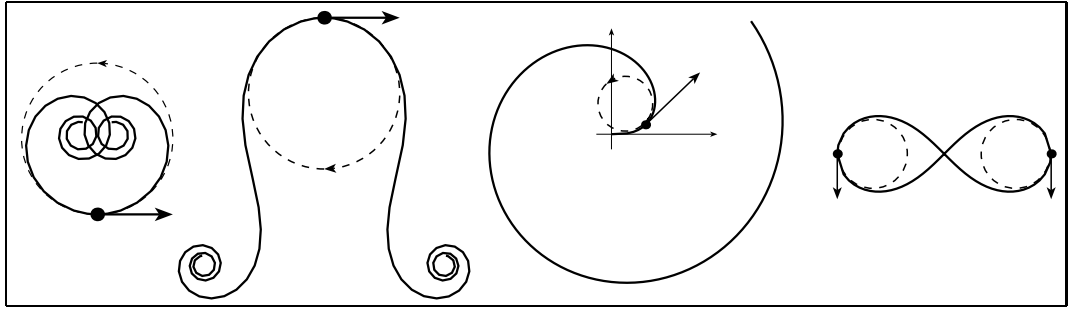


Рис. 7.

Это положение иллюстрирует рис. 7, на котором показаны две кривые с единственной вершиной [ $k(s) \sim s^2 \pm b$ ], спираль Ферма  $r = a\sqrt{\theta}$  ( $\theta_{\text{vx}} = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{7}-5}$ ) и замкнутая кривая с двумя вершинами (лемниската), которая также не имеет с экстремальными окружностями общих точек, кроме самих точек касания.

Отметим, что функция  $Q(s; \mathcal{K}_0)$ , определенная относительно круга кривизны в исходной точке спирали, монотонно убывает от нулевого значения. Она может быть равна нулю только на начальном участке кривой, если он состоит из одной или из двух дуг постоянной кривизны (но не более! — (30)).

**Следствие 2.3.** Если  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$  — круги кривизны в начальной и конечной точке спиральной кривой, и  $Q_{12} = 0$ , то эта кривая состоит из двух дуг постоянной кривизны.

Кривые, составленные из двух дуг окружностей, активно используются в задачах интерполяции. В англоязычной литературе для них принят термин “*biarc*” [8,9]. В статье [1] показана особая роль этих кривых в теории спиралей.

В. А. Залгаллер обратил внимание автора на статью [10]. Ее положения перекликаются с леммой 1 в [1] и теоремой 2 настоящей статьи. Однако в [10] рассмотрение ограничивается кривыми с монотонной *положительной* кривизной.

\* \* \*

Инвариант (10) связан с инверсным расстоянием (1) равенством  $\delta = \text{Arch}|1-2Q|$ , из которого видно, что величина  $Q$  более информативна: при переходе от  $Q$  к  $\delta$  информация об ориентации окружностей теряется под знаком модуля, а случай пересекающихся окружностей ( $0 \leq Q \leq 1$ ) не попадает в область определения функции  $\text{Arch}(x)$ .

Рассмотренный здесь и в статьях [1,10] класс кривых заслуживает, на наш взгляд, более подробного изучения и однозначного персонального определения. Термин “*истинные спирали*” для кривых с монотонной функцией кривизны представляется вполне уместным.

## Список литературы

- [1] Курносенко А.И. Интерполяционные свойства плоских спиральных кривых. Препринт ИФВЭ 9-98. – Протвино, 1998.
- [2] Коксетер Г.С.М., Грейтцер С. Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978.
- [3] Coxeter H.S.M. Inversive Distance. //Annali di Matematica Pura ed Applicata. 1966, (4) 71, pp.73–83.
- [4] Pedoe D. Circles. Pergamon Press, 1957.
- [5] Marciniak, K., Putz, B. Approximation of spirals by piecewise curves of fewest circular arc segments. //Computer Aided Design, 1984, Vol. 16, №2, pp. 87–90.
- [6] Yates, R. C. A Handbook on Curves and Their Properties. Ann Arbor, MI: J. W. Edwards, 1952.
- [7] Шикин Е.В., Франк-Каменецкий М.М. Кривые на плоскости и в пространстве. – М.: ФАЗИС, 1997.
- [8] Bolton K.M. Biarc curves. //Computer Aided Design, 1975, Vol. 7, №2, pp. 89–92.
- [9] Meek D.S., Walton D.J. Approximation of discrete data by  $G^1$  arc splines. //Computer Aided Design, 1992, Vol. 24, №6, pp. 301–306.
- [10] Vogt W. Über monotongekrümmte Kurven. //Journal für die reine und angewandte Mathematik, 144(1914), pp. 239–248.

*Рукопись поступила 21 декабря 1999 г.*

А.И. Курносенко.  
Инверсный инвариант пары окружностей.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы  $\text{\LaTeX}$ .  
Редактор Е.В.Ежела.

---

Подписано к печати 23.12.99. Формат  $60 \times 84/8$ .  
Офсетная печать. Печ.л. 2. Уч.-изд.л. 1,53. Тираж 130. Заказ 206.  
Индекс 3649. ЛР №020498 17.04.97.

---

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий  
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649