ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2001–35
ОТФ

В.О. Соловьев*

ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ КАК ГАМИЛЬТОНОВЫ ПЕРЕМЕННЫЕ
III. Идеальная жидкость со свободной поверхностью

*E-mail: vosoloviev@mx.ihep.su

Протвино 2001

УДК 539.1.01 М–24

Аннотация

Соловьев В.О. Граничные значения как гамильтоновы переменные. III. Идеальная жидкость со свободной поверхностью: Препринт ИФВЭ 2001–35. – Протвино, 2001. – 24 с., библиогр.: 23.

Рассматривается одно из приложений развитого в предыдущих работах подхода к гамильтонову анализу граничных членов. Для невязкой сжимаемой жидкости с поверхностным натяжением, находящейся в поле ньютонова гравитационного потенциала, строится гамильтонов формализм и выясняется роль общепринятых граничных условий. Показано, что эти условия обеспечивают отсутствие сингулярных членов в уравнениях движения, т.е. в гамильтоновых векторных полях. С другой стороны, вариация гамильтониана содержит, вообще говоря, ненулевой граничный вклад, а такие гамильтонианы обычно называют "недифференцируемыми" или "недопустимыми". Это означает, что для неультралокальных скобок Пуассона "недифференцируемые" функционалы могут быть допустимыми гамильтонианами. Дается четырехсторонняя картина динамики свободной поверхности: как с точки зрения лагранжевых, так и эйлеровых координат; как в вариационном, так и в гамильтоновом подходах.

Abstract

Soloviev V.O. Boundary Values as Hamiltonian Variables. III. Ideal Fluid with a Free Surface: IHEP Preprint 2001–35. – Protvino, 2001. – p. 24, refs.: 23.

An application of the approach to Hamiltonian treatment of boundary terms proposed in previous articles of this series is considered. Here the Hamiltonian formalism is constructed and the role of standard boundary conditions is revealed for a nonviscid compressible fluid with surface tension which moves in a field of the Newtonian gravitational potential. It is shown that these boundary conditions guarantee absence of singular contributions to the equations of motion, i.e. to the Hamiltonian vector fields. From the other side the Hamiltonian variation contains a nonzero boundary term. Such Hamiltonians are usually treated as "non-differentiable" or "inadmissible". We conclude that non-differentiable functionals can be admissible Hamiltonians for nonultralocal Poisson brackets. We give a four-sided picture of free surface dynamics: both in Lagrangian and in Eulerian variables and also both in variational and in Hamiltonian approaches.

Введение

В предыдущих работах [1], [2] мы попытались построить достаточно общий гамильтонов формализм теории поля, не требующий отбрасывания граничных членов при интегрировании по частям. За мотивацией и детальной разработкой метода отсылаем заинтересованного читателя к этим ссылкам. Целью настоящей работы является применение построенного формализма к одной конкретной задаче — описанию динамики идеальной сжимаемой жидкости с целью выяснить роль, которую играют граничные условия при определении класса допустимых функционалов. Новым общим результатом по сравнению, например, с подходом, предложенным Редже и Тейтельбоймом [3] и являющимся в настоящее время общепринятым (см., например, [4]), является то, что для неультралокальных скобок Пуассона этот класс может отличаться от класса "дифференцируемых" функционалов. Весьма краткое и предварительное изложение этих результатов появилось в работе [5], где были рассмотрены два примера: формализм Аштекара в канонической гравитации и гидродинамика идеальной жидкости. Позднее первый из примеров был детально исследован в статье [6]. Здесь будет подробно разобран второй пример.

Напомним сначала историю применения гамильтонова подхода к изучению поверхностных волн в идеальной (невязкой) жидкости. В 1967 г. Захаров [7] впервые предложил использовать канонический формализм для анализа волн на поверхности несжимаемой жидкости в случае ее потенциального течения. Позднее, в 1977 г., эта проблема обсуждалась также Миллсом [8] и Майлдером [9]. В 1986 г. Марсден и его соавторы [10] предложили свой подход к более общей задаче, когда течение несжимаемой жидкости уже не предполагалось потенциальным. В 1988 г. Абарбанел и др. [11] рассмотрели случай сжимаемой жидкости. Подходы этих авторов довольно сильно отличаются друг от друга. Было бы интересно воспроизвести результаты всех этих работ на основе формализма, развитого в наших предыдущих публикациях [1], [2]. Здесь мы, однако, ограничимся случаем сжимаемой жидкости.

Итак, основным объектом изучения будет динамика сжимаемой невязкой жидкости в эйлеровых координатах, а основным методом — гамильтонов формализм, сохраняющий все граничные члены. Для полноты картины напомним связи, существующие между четырьмя возможными способами описания гидродинамики: вариационным принципом и гамильтоновым формализмом, в лагранжевых и в эйлеровых координатах. Наглядно эти связи могут быть представлены коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\textbf{Вариационный принцип}\\ \textbf{в лагранжевых переменных}\end{array} \arrow[r, "\textit{Преобразование Лежандра}"] \arrow[d, "\textit{Потенциалы}"', "\textit{Клебша}"] & \begin{array}{c}\textbf{Гамильтонов формализм}\\ \textbf{в лагранжевых переменных}\end{array} \arrow[d, "\textit{Редукция}"] \\
\begin{array}{c}\textbf{Вариационный принцип}\\ \textbf{в эйлеровых переменных}\end{array} \arrow[r, "\textit{Преобразование Лежандра + редукция}"] & \begin{array}{c}\textbf{Гамильтонов формализм}\\ \textbf{в эйлеровых переменных}\end{array}
\end{tikzcd}$$

Наше изложение является новым в части, относящейся к граничным членам. Как уже отмечалось ранее [11], здесь редукция гамильтонова формализма от лагранжевых координат к эйлеровым, проведенная в работе [10], нуждается в небольшой модификации.

Мы последовательно рассмотрим каждый из четырех углов представленной выше коммутативной диаграммы и каждую из четырех стрелок, отвечающих переходам из угла в угол. Во всех случаях будет обсуждаться как фиксированная граница области, так и свободная.

Глава 1 посвящается вариационному принципу в лагранжевых координатах. Лагранжев подход наиболее близок к механическому описанию жидкости как совокупности материальных точек. Основными переменными при этом служат координаты точечных частиц. Однако необходимо дополнить потенциальную энергию частиц во внешнем поле (в нашем примере в поле ньютонова гравитационного потенциала) внутренней энергией жидкости, которая предполагается зависящей от плотности и энтропии. Таким образом, в игру вступает термодинамика, и появляются новые переменные: температура и давление.

При рассмотрении случая свободной границы мы воспользуемся подходом, впервые предложенным в работе [11], который позволяет удобным для последующего перехода к гамильтонову формализму образом включить в действие энергию сил поверхностного натяжения.

В главе 2 описывается переход от лагранжева к гамильтонову формализму в лагранжевых переменных. В данном случае этот переход не вызывает больших затруднений, он сводится к нахождению канонически сопряженных к координатам частиц жидкости импульсов и преобразованию Лежандра.

В случае свободной границы здесь при выводе гамильтоновых уравнений движения не требуется выходить за рамки критерия Редже-Тейтельбойма. Это объясняется тем, что скобки Пуассона канонические, а значит, ультралокальные.

Глава 3 посвящена переходу от лагранжевых координат к эйлеровым в рамках гамильтонова формализма. Эйлерово описание, в отличие от лагранжева, больше напоминает теорию поля, чем механику. Нетривиальность задачи перехода к новым переменным проявляется в том, что при этом преобразовании смешиваются "зависимые" (поля) и "независимые" (координаты) переменные. Формальные манипуляции производятся при помощи δ-функций, что в случае свободной границы никак нельзя считать строгим выводом, результаты, однако, в дальнейшем оправдываются их самосогласованностью. В случае фиксированной границы мы приводим строгие вычисления, основанные на методах предыдущей работы [2], явно демонстрирующие выполнение тождества Якоби. Выполнение тождества Якоби здесь не является банальностью, на что обращалось внимание в работе [10]. Для свободной границы нам пока не удалось найти столь же простого доказательства тождества Якоби. Но формализм позволяет получить гамильтоновы уравнения (гамильтоново векторное поле) путем операции внутреннего умножения 1-формы (вариации гамильтониана) на бивектор, задающий скобку Пуассона. Первоначально в гамильтовом векторном поле имеется сингулярный вклад, пропорциональный граничной δ-функции. Требование регулярности, т.е. обращения в ноль этого вклада, оказывается равносильным граничному условию задачи.

В главе 4 строится вариационный принцип для эйлеровых переменных. Для фиксированной границы интересное обсуждение этой проблемы имеется в книге Купершмидта [12]. В результате добавления в лагранжиан связей появляются переменные Клебша, которые в следующей главе становятся каноническими переменными гамильтонова формализма.

При рассмотрении задачи со свободной границей к действию добавляется с противоположным знаком вклад поверхностной энергии. Для того, чтобы из действия получались при варьировании правильные граничные условия, требуется дополнительно изменить его на новый поверхностный член. После этого оказывается, что плотность лагранжиана совпадает с давлением жидкости. В частном случае двумерного потенциального течения несжимаемой жидкости без поверхностного натяжения тот факт, что из действия следуют динамические граничные условия, был отмечен Люком [13]. Независимо Захаров [7] показал, что граничные условия являются гамильтоновыми уравнениями.

Глава 5 посвящена переходу от вариационного принципа к гамильтонову формализму на языке эйлеровых переменных. При работе с фиксированной границей переменные Клебша оказываются каноническими. Мы используем здесь метод Фаддеева-Джакива [14], т.е. просто вычисляем матрицу, обратную к матрице симплектической формы, не обращаясь к “первичным связям” Дирака [15]. Из потенциалов Клебша легко строятся стандартные импульсы эйлерова подхода, скобки Пуассона между которыми представляют алгебру диффеоморфизмов. Гамильтониан выражается через эти переменные и малую толику переменных Клебша — плотность и энтропию, в результате замыкая нашу диаграмму.

В случае свободной поверхности добавляется новая функция, описывающая положение границы, после чего переменные уже не являются каноническими. На этот раз мы пользуемся методом Дирака для работы со связями и строим скобки Дирака, которые затем используем для записи пуассонова бивектора. Этот бивектор, в отличие от построенного в главе 3, записывается в других переменных. Однако, воспользовавшись им для нахождения гамильтонова векторного поля, т.е. для вывода гамильтоновых уравнений, мы вновь приходим к тому же самому результату, что и в главе 3. Таким образом, и в случае свободной границы диаграмма замыкается.

Следует отметить, что недавно была предложена еще одна формула [16] для скобки Пуассона, точно удовлетворяющей тождеству Якоби. Однако построение пока является недостаточно общим для того, чтобы включить в рассмотрение неультралокальные скобки, и поэтому не может быть использовано в этой работе.

1. Вариационный принцип в лагранжевых переменных

Описание динамики среды в лагранжевых координатах означает, что прослеживается движение ее отдельных частиц. Это позволяет вывести уравнения движения среды из уравнений движения материальных точек — ее составляющих. Добавляются также термодинамические характеристики: внутренняя энергия, температура, давление, энтропия и др. Нумерация частиц среды может быть произведена, например, с помощью фиксации их начальных положений. Пусть движение происходит в некоторой (фиксированной или меняющейся со временем) области Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, и пусть $\mathbf{r} \in \Omega_0$ есть “номер” частицы, а $\mathbf{Y}(t)$ — ее положение в произвольный момент времени t. Для простоты изложения мы ограничимся использованием декартовых координат. Тогда закон движения определяется функцией

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\mathbf{r}, t), \qquad \text{причем} \qquad \mathbf{r} \equiv \mathbf{Y}(\mathbf{r}, 0).$$

Детерминизм классической механики позволяет быть уверенным и в существовании обратной функции

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{x}, t), \qquad \text{так что} \qquad \mathbf{r} \equiv \mathbf{R}(\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t), t).$$

1.1. Фиксированная граница

Естественно ожидать, что лагранжиан среды выражается интегралом по области Ω_0 от разности плотностей кинетической и потенциальной энергий (с добавлением к последней внутренней энергии):

$$L = \int\limits_{\Omega_0} \rho_0(\mathbf{r}) \left[\frac{\dot{\mathbf{Y}}^2}{2} - \Phi(\mathbf{Y}) - \varepsilon\left(\rho(\mathbf{Y}), s_0(\mathbf{r})\right) \right] d\mathbf{r}, \tag{1}$$

где $\dot{\mathbf{Y}} = \partial \mathbf{Y}/\partial t(\mathbf{r}, t)$; $\Phi(\mathbf{Y})$ — потенциал; $\varepsilon(\rho, s_0)$ — приходящаяся на единицу массы внутренняя энергия, заданная как функция плотности массы $\rho(\mathbf{Y})$ и энтропии на единицу массы $s_0(\mathbf{r})$, причем $\rho_0(\mathbf{r})$ — плотность массы в начальный момент времени $t = 0$. Удобно ввести матрицы перехода

$$J_{ij} = \frac{\partial Y^i}{\partial r^j}, \qquad J^{ij} = \frac{\partial r^i}{\partial Y^j}. \tag{2}$$

При этом пусть $J = \det |J_{ij}|$. Очевидно,

$$J_{ij} J^{jk} = \delta_i^k.$$

В силу сохранения массы

$$\rho_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \rho(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y}, \qquad \text{следовательно,} \qquad \rho_0 = \rho J.$$

Энтропия же предполагается присущей каждой частице в отдельности и аддитивной, причем

$$s_0(\mathbf{r}) = s(\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t), t).$$

Дополнительную информацию вносит первое начало термодинамики

$$\delta\varepsilon = T ds_0 - p d\frac{1}{\rho},$$

где T — абсолютная температура; p — давление; таким образом,

$$T = \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}, \qquad p = \rho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}.$$

Варьирование действия как функционала от $\mathbf{Y}(\mathbf{r},t)$

$$\delta\int\limits_{t_1}^{t_2} L dt = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_0}\rho_0(\mathbf{r})\left[\dot{\mathbf{Y}}\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{Y} - \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{Y}}\delta\mathbf{Y} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\delta\rho\right]d\mathbf{r},$$

с учетом формулы

$$\delta\rho = \delta\left(\frac{\rho_0}{J}\right) = -\frac{\rho_0}{J^2}\delta J,$$

и, следовательно, соотношения

$$-\rho_0\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\delta\rho = p\delta J,$$

ведет к уравнениям движения. Поскольку вариация якобиана определяется формулой

$$\delta J = JJ^{ji}\delta J_{ij} = JJ^{ji}\frac{\partial}{\partial r^j}\delta Y^i,$$

получаем

$$p\delta J = \frac{\partial}{\partial r^j}\left(pJJ^{ji}\delta Y^i\right) - JJ^{ji}\frac{\partial p}{\partial r^j}\delta Y^i - p\frac{\partial}{\partial r^j}\left(JJ^{ji}\right)\delta Y^i.$$

В Приложении показано, что последнее слагаемое обращается в ноль. Учитывая, что

$$\frac{\partial p}{\partial Y^i} = \frac{\partial p}{\partial r^j}\frac{\partial r^j}{\partial Y^i} = J^{ji}\frac{\partial p}{\partial r^j},$$

мы приходим к следующему выражению для вариации действия:

$$\delta\int\limits_{t_1}^{t_2} L dt = \int\limits_{\Omega_0} d\mathbf{r}\rho_0\dot{\mathbf{Y}}\delta\mathbf{Y}\Big|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_0}\delta\mathbf{Y}\left[-\rho_0\ddot{\mathbf{Y}} - \rho_0\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{Y}} - J\frac{\partial p}{\partial\mathbf{Y}}\right]d\mathbf{r} + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\oint\limits_{\partial\Omega_0} pJJ^{ji}\delta Y^i dS_j. \quad (3)$$

Вариационный принцип Гамильтона требует фиксации варьируемой функции на границах временно́го интервала

$$\delta\mathbf{Y}(t_1) = \delta\mathbf{Y}(t_2) = 0.$$

Член, содержащий вариацию $\delta\mathbf{Y}$ на пространственной границе $\partial\Omega_0$, обращается в ноль в силу условий, обеспечивающих неподвижность границы области $\Omega = \Omega_0$

$$n_j J^{ji}\delta Y^i\big|_{\partial\Omega_0} = 0, \qquad \text{или} \qquad \mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{Y}\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4)$$

где n^j — вектор нормали к $\partial\Omega_0$ (для определенности, в дальнейшем — единичной внешней нормали), которая предполагается гладкой, соответственно, $\mathbf{n}$ — тот же вектор в координатах $\mathbf{Y}$.

Смысл этих граничных условий в том, что частицы, которые в начальный момент времени были на границе области, останутся на ней навсегда.

Требование обращения в нуль объемного интеграла в вариации действия приводит к уравнениям Лагранжа, записанным в лагранжевых координатах

$$\ddot{\mathbf{Y}} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{Y}} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\mathbf{Y}}, \qquad \text{или} \qquad \ddot{Y}^i = -JJ^{ji}\frac{\partial\Phi}{\partial r^j} - \frac{JJ^{ji}}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r^j}. \quad (5)$$

1.2. Свободная граница

Предположим теперь, что граница жидкости или какая-либо ее часть является свободной. Тогда положение границы области $\partial\Omega = \partial\Omega_t$ должно быть описано динамическими переменными. В эйлеровом подходе это потребует введения новой независимой функции, а здесь оказывается достаточным использование той же самой переменной $\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t)$, вариация которой на границе теперь не будет связана условием (4). Кроме того, в действии могут появиться новые члены, задаваемые граничными интегралами, например, энергия поверхностного натяжения жидкости

$$L \to L - E_{\text{пов.}},$$

которая с точностью до постоянной определяется формулой

$$E_{\text{пов.}} = \tau \int\limits_{\partial\Omega_t} dS = \tau \int\limits_{\partial\Omega_t} n^i dS_i = \tau \int\limits_{\Omega_t} \nabla \cdot \mathbf{n} d\mathbf{Y}, \tag{6}$$

где n^i — вектор единичной внешней нормали на границе области, гладко продолженный на всю область. Рассмотрение таких задач можно проводить на основе предложенного в наших предыдущих работах формализма, который, однако, должен быть несколько обобщен. Введем функцию $P_\Omega(\mathbf{Y})$, которая положительна всюду внутри области Ω, равна нулю на границе $\partial\Omega$ и отрицательна снаружи. Тогда мы можем формально представить интеграл по области Ω как интеграл по всему пространству $\mathbb{R}^n$:

$$\int\limits_{\Omega} f d\mathbf{Y} = \int \theta(P_\Omega) f d\mathbf{Y}. \tag{7}$$

Требуемое обобщение состоит в том, что раньше [1], [2] мы не рассматривали P_Ω как варьируемую величину, теперь это необходимо делать. В предположении что $\nabla P_\Omega \neq 0$ на $\partial\Omega$, вектор единичной внешней нормали к граничной поверхности представляется формулой

$$\mathbf{n} = -\frac{\nabla P_\Omega}{|\nabla P_\Omega|}.$$

Поверхностная энергия жидкости (6) тогда может быть записана в виде

$$E_{\text{пов.}} = \tau \int \theta(P_\Omega) \nabla \cdot \mathbf{n} d\mathbf{Y} = -\tau \int (\nabla\theta \cdot \mathbf{n})\, d\mathbf{Y}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial\theta(P_\Omega)}{\partial Y^i} = \frac{d\theta(P_\Omega)}{dP_\Omega}\frac{\partial P_\Omega}{\partial Y^i}, \qquad \frac{d\theta(P_\Omega)}{dP_\Omega} = \left(\nabla\theta(P_\Omega) \cdot \frac{\nabla P_\Omega}{|\nabla P_\Omega|^2}\right), \tag{8}$$

т.е.

$$E_{\text{пов.}} = \tau \int \frac{d\theta(P_\Omega)}{dP_\Omega} |\nabla P_\Omega| d\mathbf{Y}.$$

Введем обозначение

$$K = \nabla \cdot \mathbf{n}.$$

Нетрудно убедиться, что на границе K является следом второй фундаментальной формы граничной поверхности. Тогда

$$E_{\text{пов.}} = \tau \int\limits_{\Omega_t} K d\mathbf{Y} = \tau \int \theta(P_\Omega) K d\mathbf{Y}.$$

Для получения естественного граничного условия нам необходимо найти вариацию этого выражения при варьировании функции $\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t)$. Рассмотрим сначала вариацию поверхностной энергии по функции P_Ω:

$$\delta E_{\text{пов.}} = \tau \int \frac{d\theta(P_\Omega)}{dP_\Omega} \delta P_\Omega K d\mathbf{Y} + \tau \int \theta(P_\Omega) \delta K d\mathbf{Y}.$$

Покажем, что второе слагаемое обращается в нуль (опуская $d\mathbf{Y}$ в интегралах):

$$\int \theta(P_\Omega)\delta K = \int \theta(P_\Omega)\delta \nabla \cdot \mathbf{n} = -\int \nabla\theta(P_\Omega)\delta\mathbf{n} = -\int \frac{d\theta}{dP_\Omega} |\nabla P_\Omega| \left(\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{n}\right) = 0, \tag{9}$$

так как вклад в интеграл дает только граница $\partial\Omega$, а на границе вариация единичной нормали ортогональна самой нормали. Таким образом,

$$\delta E_{\text{пов.}} = \tau \int \frac{d\theta}{dP_\Omega} K \delta P_\Omega d\mathbf{Y}.$$

Эта формула в ее непосредственном виде понадобится нам позже при рассмотрении задачи в эйлеровых координатах. Здесь же мы должны искать вариацию $\delta E_{\text{пов.}}$ по отношению к $\delta\mathbf{Y}$, так как P_Ω не является независимой переменной при использовании лагранжевых переменных. Дело в том, что область изменения координат $\mathbf{r}$, а именно, Ω_0, не изменяется даже в случае изменяющейся области Ω.

Вместо функции $P_\Omega(\mathbf{Y}, t)$, соответствующей области Ω, для области Ω_0 можно использовать функцию

$$P_{\Omega_0}(\mathbf{r}) = P_\Omega(\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t), t),$$

или

$$P_\Omega(\mathbf{x}, t) = P_{\Omega_0}(\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)).$$

Функция $P_{\Omega_0}(\mathbf{r})$ не подлежит варьированию так же, как и функции $\rho_0(\mathbf{r})$ и $s_0(\mathbf{r})$. Итак, следует принять во внимание соотношение

$$\delta P_\Omega = \frac{\partial P_\Omega}{\partial \mathbf{Y}} \delta\mathbf{Y} = \frac{\partial P_{\Omega_0}}{\partial r^j} J^{ji} \delta Y^i.$$

Тогда

$$\delta E_{\text{пов.}} = \tau \int \frac{d\theta}{dP_\Omega} \frac{\partial P_\Omega}{\partial Y_i} K \delta Y^i d\mathbf{Y},$$

или, учитывая (8),

$$\delta E_{\text{пов.}} = \tau \int \theta_{,j} K J J^{ji} \delta Y^i d\mathbf{r} = -\tau \int\limits_{\Omega_0} \partial_j (K J J^{ji} \delta Y^i) d\mathbf{r}.$$

Этот член вместе с поверхностным членом, содержащимся в формуле (3), дает нам полный поверхностный вклад в вариацию действия в случае свободной границы:

$$(\delta S)_{\text{пов.}} = \int\limits_{t_1}^{t^2} dt \int\limits_{\Omega_0} \partial_j \left((p-\tau K)JJ^{ji}\delta Y^i\right) d\mathbf{r} = \int\limits_{t_1}^{t^2} dt \oint\limits_{\partial\Omega_0} (p-\tau K)JJ^{ji}\delta Y^i dS_j.$$

Вариационный принцип Гамильтона требует обращения этого выражения в ноль, а так как вариация $\delta\mathbf{Y}$ здесь произвольна, мы получаем так называемые естественные граничные условия [17], [18]:

$$(p-\tau K)\big|_{\partial\Omega_0} = 0. \tag{10}$$

Поскольку граница переходит в границу при замене переменных $\mathbf{r} \to \mathbf{Y}(\mathbf{r}, t)$, последнее равенство можно переписать в стандартном виде [19]:

$$(p-\tau K)\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{11}$$

2. Гамильтонов формализм в лагранжевых переменных

2.1. Фиксированная граница

Из формулы для вариации действия (3) очевидно определение импульсов, канонически сопряженных к переменным $\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t)$,

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r})\dot{\mathbf{Y}}(\mathbf{r}, t), \qquad \{Y^i(\mathbf{r}, t), M_j(\mathbf{r}', t)\} = \delta^i_j \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

Стандартное преобразование Лежандра лагранжиана (1) приводит к гамильтониану

$$\mathrm{H} = \int\limits_{\Omega_0} \left(\frac{\mathbf{M}^2}{2\rho_0} + \rho_0\Phi(\mathbf{Y}) + \rho_0\varepsilon(\rho(\mathbf{Y}), s_0)\right) d\mathbf{r}. \tag{12}$$

В вариации гамильтониана

$$\delta\mathrm{H} = \int\limits_{\Omega_0} \left(\delta\mathbf{M}\left[\frac{\mathbf{M}}{\rho_0}\right] + \delta\mathbf{Y}\left[\rho_0\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{Y}} + J\frac{\partial p}{\partial\mathbf{Y}}\right]\right) d\mathbf{r} - \int\limits_{\partial\Omega_0} pJJ^{ji}\delta Y^i dS_j$$

при граничных условиях (4) последнее слагаемое обращается в ноль, что позволяет называть вариационными производными выражения, стоящие в квадратных скобках, и гамильтоновы уравнения имеют привычный вид

$$\dot{\mathbf{Y}} = \{\mathbf{Y}, \mathrm{H}\} = \frac{\delta\mathrm{H}}{\delta\mathbf{M}}, \qquad \dot{\mathbf{M}} = \{\mathbf{M}, \mathrm{H}\} = -\frac{\delta\mathrm{H}}{\delta\mathbf{Y}}, \tag{13}$$

т.е.

$$\dot{\mathbf{Y}} = \frac{\mathbf{M}}{\rho_0}, \qquad \dot{\mathbf{M}} = -\rho_0\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{Y}} - J\frac{\partial p}{\partial\mathbf{Y}}. \tag{14}$$

Эквивалентность этих уравнений лагранжевым (5) очевидна. (5). Что касается тождества Якоби, то, как было несколькими способами показано нами в работах [1], [2], каноническая скобка Пуассона, поверхностные члены в которой получены на основе [1], [2], удовлетворяет ему независимо от граничных условий.

2.2. Свободная граница

Дополним гамильтониан (12) поверхностной энергией

$$\mathrm{H} = \int\limits_{\Omega_0} \left(\frac{\mathbf{M}^2}{2\rho_0} + \rho_0 \Phi(\mathbf{Y}) + \rho_0 \varepsilon\left(\rho(\mathbf{Y}), s_0\right) \right) d\mathbf{r} + \tau \int\limits_{\partial\Omega} n^i dS_i.$$

Его вариация имеет вид

$$\delta\mathrm{H} = \int\limits_{\Omega_0} \left(\delta\mathbf{M} \left[\frac{\mathbf{M}}{\rho_0} \right] + \delta\mathbf{Y} \left[\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{Y}} + J \frac{\partial p}{\partial \mathbf{Y}} \right] \right) d\mathbf{r} - \int\limits_{\partial\Omega_0} (p - \tau K) J J^{ji} \delta Y^i dS_j,$$

причем вариация $\delta\mathbf{Y}$ свободна на границе. Отсюда находим полные вариационные производные

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathrm{H}}{\delta Y^i} &= \theta(P_{\Omega_0}) \left[\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial Y^i} + J \frac{\partial p}{\partial Y^i} \right] + \frac{\partial \theta(P_{\Omega_0})}{\partial r^i} \left[p - \tau K \right], \\ \frac{\delta \mathrm{H}}{\delta M^i} &= \theta(P_{\Omega_0}) \left[\frac{M^i}{\rho_0} \right]. \end{aligned}$$

Гамильтоново векторное поле и уравнения движения формально сохраняют тот же вид, что и в случае фиксированной границы (13). Однако в них присутствует сингулярный вклад, пропорциональный δ-функции. Требование исчезновения этого вклада ведет к стандартным граничным условиям (10). В данном случае, когда скобка Пуассона является канонической и, следовательно, ультралокальной,

$$\{\mathrm{F}, \mathrm{G}\} = -\mathsf{dF} \lrcorner\, \mathsf{dG} \lrcorner\, \Psi = \int \left(\frac{\delta \mathrm{F}}{\delta Y^i} \frac{\delta \mathrm{G}}{\delta M_i} - \frac{\delta \mathrm{G}}{\delta Y^i} \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta M_i} \right) d\mathbf{r},$$

это требование эквивалентно обращению в ноль поверхностного члена в вариации гамильтониана, т.е. требованию его "дифференцируемости" по Редже и Тейтельбойму [3]. Ниже мы убедимся, что для неультралокальных скобок Пуассона эти два условия не являются равносильными. Относительно тождества Якоби остается в силе аргументация, приведенная выше в случае фиксированной границы, поскольку граница области $\partial\Omega_0$ не является динамической.

Отметим в качестве курьеза, что и в работе [10], и в нашей работе [1], именно возможность присутствия ненулевых поверхностных членов в вариации гамильтониана для несжимаемой жидкости послужила стимулом к модификации стандартной формулы для скобок Пуассона. Однако в публикации [11] было справедливо отмечено, что как раз этот поверхностный вклад должен исчезать вследствие граничных условий. Подобные вклады, как мы увидим ниже, играют роль лишь в более сложных случаях, когда скобки Пуассона неультралокальны.

3. Гамильтонов формализм в эйлеровых переменных

3.1. Фиксированная граница

Переход от лагранжева описания к эйлерову в гамильтоновом формализме представляет собой замену переменных более общего типа, чем те, которые обычно встречаются в теории поля. Отчасти подобная замена напоминает те преобразования общей теории относительности, когда координаты начинают зависеть от метрики (c-числа начинают зависеть от q-чисел в квантовой теории)

$$M_i(\mathbf{r},t)d\mathbf{r} = \pi_i\left(\mathbf{Y}(\mathbf{r},t),t\right)d\mathbf{Y},$$

или

$$\pi_i(\mathbf{x},t) = \int\limits_{\Omega_0} \delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{Y}(\mathbf{r},t)\right) M_i(\mathbf{r},t)d\mathbf{r}.$$

Аналогичные формулы связывают плотности массы в двух подходах

$$\rho_0(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \rho\left(\mathbf{Y}(\mathbf{r},t),t\right)d\mathbf{Y}, \qquad \rho(\mathbf{x},t) = \int\limits_{\Omega_0} \delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{Y}(\mathbf{r},t)\right)\rho_0(\mathbf{r})d\mathbf{r},$$

а формулы для энтропии отличаются, поскольку эта величина является скаляром, а не скалярной плотностью

$$s(\mathbf{x},t) = s_0\left(\mathbf{R}(\mathbf{x},t)\right), \qquad s(\mathbf{x},t) = \int\limits_{\Omega_0} \delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{R}(\mathbf{x},t)\right)s_0(\mathbf{r})d\mathbf{r}. \tag{15}$$

Здесь

$$\mathbf{R}\left(\mathbf{Y}(\mathbf{r},t),t\right) \equiv \mathbf{r}, \qquad \mathbf{Y}\left(\mathbf{R}(\mathbf{x},t),t\right) \equiv \mathbf{x}.$$

Если переменные импульсов $M_i(\mathbf{r},t)$ заменяются в эйлеровом подходе равным числом степеней свободы $\pi_i(\mathbf{x},t)$, то место координат $Y^i(\mathbf{r},t)$ занимают новые переменные $\rho(\mathbf{x},t)$, $s(\mathbf{x},t)$, число которых, вообще говоря, отличается от размерности пространства. Мы увидим, кроме того, что скобки Пуассона даже для “новых импульсов” π_i будут отличны от канонических.

Для вычисления скобок Пуассона между новыми переменными удобно перейти к линейным функционалам, например,

$$\pi(\lambda) = \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\lambda^i(\mathbf{x})\pi_i(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\int\limits_{\Omega_0} d\mathbf{r}\lambda^i(\mathbf{x})\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{Y}(\mathbf{r},t)\right)M_i(\mathbf{r},t) = \int\limits_{\Omega_0} d\mathbf{r}\lambda^i\left(\mathbf{Y}(\mathbf{r},t)\right)M_i(\mathbf{r},t).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\{\pi(\lambda),\pi(\mu)\} &= \int\limits_{\Omega_0} d\mathbf{r}\int\limits_{\Omega_0} d\mathbf{r}'\{\lambda^i(\mathbf{Y}(\mathbf{r},t))M_i(\mathbf{r},t),\mu^j(\mathbf{Y}(\mathbf{r}',t))M_j(\mathbf{r}',t)\} = \\
&= \int\limits_{\Omega_0} d\mathbf{r}\int\limits_{\Omega_0} d\mathbf{r}'\big(\{\lambda^i(\mathbf{Y}(\mathbf{r},t)),M_j(\mathbf{r}',t)\}M_i(\mathbf{r},t)\mu^j(\mathbf{Y}(\mathbf{r}',t)) + \\
&+ \{M_i(\mathbf{r},t),\mu^j(\mathbf{Y}(\mathbf{r}',t))\}\lambda^i(\mathbf{Y}(\mathbf{r},t))M_j(\mathbf{r}',t)\big) = \\
&= -\int\limits_{\Omega_0} d\mathbf{r}[\lambda,\mu]^i M_i = -\int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}[\lambda,\mu]^i\pi_i = -\pi([\lambda,\mu]),
\end{aligned} \tag{16}$$

где

$$[\lambda,\mu]^i = \lambda^j\mu^i_{,j} - \mu^j\lambda^i_{,j}.$$

Аналогичным образом получаем соотношение

$$\{\rho(\lambda), \pi(\mu)\} = \rho(\mu^i \lambda_{,i}). \tag{17}$$

Используя полученные ранее в работах [1], [2] правила, мы приходим к выводу, что на локальном языке равенства (16), (17) означают

$$\begin{aligned} \{\pi_i(\mathbf{x}), \pi_j(\mathbf{x}')\} &= \pi_i(\mathbf{x}')\delta_{,j}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) - \pi_j(\mathbf{x})\delta_{,i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), &(18)\\ \{\rho(\mathbf{x}), \pi_i(\mathbf{x}')\} &= \rho(\mathbf{x}')\delta_{,i}(\mathbf{x}', \mathbf{x}). &(19) \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что полученные скобки соответствуют обычной реализации алгебры диффеоморфизмов, генераторами которой являются переменные $\pi_i(\mathbf{x})$.

Скобка для $\rho(\mathbf{x})$ соответствует закону преобразования скалярной плотности. В отличие от $\rho(\mathbf{x})$, $s(\mathbf{x})$ преобразуется как скаляр, что означает

$$\{s(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')\} = -s_{,i}\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \tag{20}$$

Очевидно, что остальные скобки обращаются в ноль.

Скобки Пуассона для произвольных локальных функционалов от переменных $\pi_i(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x})$, $s(\mathbf{x})$ с учетом всех граничных членов могут быть построены с помощью определенных на основе нашего формализма [2] пуассонова бивектора, операций внутреннего умножения и дифференциала (полной вариации локального функционала):

$$\{\mathrm{F}, \mathrm{G}\} = -\mathsf{d}\mathrm{F} \lrcorner \mathsf{d}\mathrm{G} \lrcorner \Psi.$$

Например, в простейшем случае, когда граница области Ω неподвижна, и когда присутствует только зависимость от самих функций $\pi_i(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x})$, $s(\mathbf{x})$, но не от их пространственных производных, получаем

$$\{F, G\} = \int\limits_\Omega d\mathbf{x} \left[\rho\left(\partial_i\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)\frac{\partial g}{\partial\pi_i} - \partial_i\left(\frac{\partial g}{\partial\rho}\right)\frac{\partial f}{\partial\pi_i}\right) - \right.$$
$$\left. -s_{,i}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial g}{\partial\pi_i} - \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial\pi_i}\right) + \pi_i\left(\partial_j\left(\frac{\partial f}{\partial\pi_i}\right)\frac{\partial g}{\partial\pi_j} - \partial_j\left(\frac{\partial g}{\partial\pi_i}\right)\frac{\partial f}{\partial\pi_j}\right)\right].$$

Вид гамильтониана при переходе к эйлеровым переменным почти не изменяется

$$\mathrm{H} = \int\limits_\Omega d\mathbf{x}\left(\frac{\pi^2}{2\rho} + \rho\Phi(\mathbf{x}) + \rho\varepsilon(\rho, s)\right). \tag{21}$$

Его вариационные производные равны

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathrm{H}}{\delta\pi_i} &= \theta\frac{\pi_i}{\rho},\\ \frac{\delta\mathrm{H}}{\delta\rho} &= \theta\left(-\frac{\pi^2}{2\rho^2} + \Phi + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right),\\ \frac{\delta\mathrm{H}}{\delta s} &= \theta\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial s} = \theta\rho T. \end{aligned}$$

Гамильтоновы уравнения получаются с помощью внутреннего умножения дифференциала гамильтониана на пуассонов бивектор согласно общему формализму, предложенному в работе [2]. Удобно переписать эти уравнения через эйлерову скорость $v^i = \pi_i/\rho$

$$\dot{\rho} = -\left(\rho v^i\right)_{,i}, \tag{22}$$

$$\dot{s} = -v^i s_{,i}, \tag{23}$$

$$\dot{v}^i = -v^j v^i_{,j} - \Phi_{,i} - \frac{p_{,i}}{\rho}, \tag{24}$$

где $p = \rho^2 \partial\varepsilon/\partial\rho$. Для проверки тождества Якоби здесь можно воспользоваться методом, изложенным и обоснованным в предыдущей работе [2]. В действительности, наши расчеты отличаются от стандартных, описанных, например, в книге Олвера [20], только учетом всех граничных вкладов. Бивектор, определяющий скобку Пуассона, имеет вид

$$\begin{aligned}
\Psi &= \frac{1}{2}\int\int \frac{\delta}{\delta\phi_A(x)}\{\phi_A(x),\phi_B(y)\}\wedge\frac{\delta}{\delta\phi_B(y)} = \\
&= \frac{1}{2}\int\int \frac{\delta}{\delta\pi_i(x)}\{\pi_i(x),\pi_j(y)\}\wedge\frac{\delta}{\delta\pi_j(y)} + \frac{\delta}{\delta\rho(x)}\{\rho(x),\pi_i(y)\}\wedge\frac{\delta}{\delta\pi_i(y)} + \\
&+ \frac{\delta}{\delta\pi_i(x)}\{\pi_i(x),\rho(y)\}\wedge\frac{\delta}{\delta\rho(y)} + \frac{\delta}{\delta s(x)}\{s(x),\pi_i(y)\}\wedge\frac{\delta}{\delta\pi_i(y)} + \frac{\delta}{\delta\pi_i(x)}\{\pi_i(x),s(y)\}\wedge\frac{\delta}{\delta s(y)}.
\end{aligned}$$

После преобразований и интегрирования получаем другую его запись:

$$\Psi = \int \pi_i D_j\left(\frac{\delta}{\delta\pi_i}\right)\wedge\frac{\delta}{\delta\pi_j} + \rho D_i\left(\frac{\delta}{\delta\rho}\right)\wedge\frac{\delta}{\delta\pi_i} - s_{,i}\frac{\delta}{\delta s}\wedge\frac{\delta}{\delta\pi_i}.$$

Тогда нетрудно увидеть, что

$$\mathsf{d}\Psi = \int \delta\pi_i D_j\left(\frac{\delta}{\delta\pi_i}\right)\wedge\frac{\delta}{\delta\pi_i} + \delta\rho D_i\left(\frac{\delta}{\delta\rho}\right)\wedge\frac{\delta}{\delta\pi_i} - (\delta s)_{,i}\frac{\delta}{\delta s}\wedge\frac{\delta}{\delta\pi_i},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}\Psi \lrcorner \Psi = \int \pi_i D_k\left[D_j\left(\frac{\delta}{\delta\pi_i}\right)\wedge\frac{\delta}{\delta\pi_j}\right]\wedge\frac{\delta}{\delta\pi_k} - D_j\left(\frac{\delta}{\delta\pi_i}\right)\wedge\frac{\delta}{\delta\pi_j}\wedge\pi_k D_i\left(\frac{\delta}{\delta\pi_k}\right) - \\
-D_j\left(\frac{\delta}{\delta\pi_i}\right)\wedge\frac{\delta}{\delta\pi_j}\wedge\rho D_i\left(\frac{\delta}{\delta\rho}\right) + s_{,i}D_j\left(\frac{\delta}{\delta\pi_i}\right)\wedge\frac{\delta}{\delta\pi_j}\wedge\frac{\delta}{\delta s} + \\
+D_k\left[D_i\left(\frac{\delta}{\delta\rho}\right)\wedge\frac{\delta}{\delta\pi_i}\right]\wedge\rho\frac{\delta}{\delta\pi_k} + \frac{\delta}{\delta s}\wedge\frac{\delta}{\delta\pi_i}\wedge D_i\left(s_{,k}\frac{\delta}{\delta\pi_k}\right).
\end{aligned}$$

Прямым вычислением, сохраняя полные дивергенции, нетрудно проверить, что это выражение обращается в ноль точно, а не по модулю дивергенций. Это означает обращение в ноль скобки Схоутена-Нейенхейса бивектора Ψ с самим собой, поскольку для бивекторов

$$[\Psi,\Psi]_{SN} = \mathsf{d}\Psi \lrcorner \Psi + (-1)^{2\cdot 2}\mathsf{d}\Psi \lrcorner \Psi = 2\mathsf{d}\Psi \lrcorner \Psi,$$

что, как было показано в работе [2], равносильно выполнению тождества Якоби при произвольных локальных функционалах:

$$\{\{F,G\},H\} + \{\{H,F\},G\} + \{\{G,H\},F\} = -[\Psi,\Psi]_{SN}(\mathsf{d}F,\mathsf{d}G,\mathsf{d}H). \tag{25}$$

3.2. Свободная граница

Если в лагранжевых координатах нам для описания движения границы хватило тех же переменных, что и в случае, когда граница неподвижна, то здесь необходимо рассматривать введенную выше функцию $P_\Omega(\mathbf{x},t)$ как независимую динамическую переменную. Для этой функции справедливы формулы, аналогичные (15):

$$P_\Omega(\mathbf{x},t) = P_0(\mathbf{R}(\mathbf{x},t)), \qquad P_\Omega(\mathbf{x},t) = \int\limits_{\Omega_0} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}(\mathbf{x},t))P_0(\mathbf{r})d\mathbf{r},$$

поэтому ее скобки Пуассона аналогичны скобкам для переменной энтропии $s(\mathbf{x},t)$

$$\{P_\Omega(\mathbf{x},t), \pi^i(\mathbf{x}',t)\} = -P_{\Omega,i}\delta(\mathbf{x},\mathbf{x}'),$$

а скобки с другими переменными обращаются в ноль.

В случае свободной границы гамильтониан зависит от функции P_Ω и через аргумент θ-функции и через выражение для поверхностной энергии (6)

$$\mathrm{H} = \int \theta(P_\Omega)\left[\frac{\pi^2}{2\rho} + \rho\Phi(\mathbf{x}) + \rho\varepsilon(\rho,s) + \tau\nabla\cdot\mathbf{n}\right]d\mathbf{x}, \tag{26}$$

причем в последнем случае это означает и зависимость от пространственных производных P_Ω до второго порядка включительно. Однако, с учетом соотношения (9) полная вариационная производная гамильтониана по P_Ω равна

$$\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta P_\Omega} = \frac{d\theta}{dP_\Omega}\left[\frac{\pi^2}{2\rho} + \rho\Phi(\mathbf{x}) + \rho\varepsilon(\rho,s) + \tau\nabla\cdot\mathbf{n}\right], \tag{27}$$

или

$$\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta P_\Omega} = \theta_{,i}\frac{P_{\Omega,i}}{|P_{\Omega,i}|^2}\left[\frac{\pi^2}{2\rho} + \rho\Phi(\mathbf{x}) + \rho\varepsilon(\rho,s) + \tau K\right],$$

а производные по остальным переменным по сравнению со случаем фиксированной границы не изменяются.

Согласно нашим определениям [1], [2], с помощью пуассонова бивектора

$$\Psi = \frac{1}{2}\int\int \frac{\delta}{\delta\phi_A(\mathbf{x})}\wedge\frac{\delta}{\delta\phi_B(\mathbf{y})}\{\phi_A(\mathbf{x}),\phi_B(\mathbf{y})\}d\mathbf{x}d\mathbf{y} =$$
$$= \int \pi_i D_j\left(\frac{\delta}{\delta\pi_i}\right)\wedge\frac{\delta}{\delta\pi_j} + \rho D_i\left(\frac{\delta}{\delta\rho}\right)\wedge\frac{\delta}{\delta\pi_i} - s_{,i}\frac{\delta}{\delta s}\wedge\frac{\delta}{\delta\pi_i} - P_{\Omega,i}\frac{\delta}{\delta P_\Omega}\wedge\frac{\delta}{\delta\pi_i},$$

и операции внутреннего умножения находим гамильтоново векторное поле:

$$-d\mathrm{H}\,\lrcorner\,\Psi = \int \theta\left[-v^i s_{,i}\right]\frac{\delta}{\delta s} + \theta\left[-v^i P_{\Omega,i}\right]\frac{\delta}{\delta P_\Omega} + \theta\left[-\pi_{i,i}\right]\frac{\delta}{\delta\rho} +$$
$$+\,\theta\left[-(\pi_i v_j)_{,j} - \rho\partial_i\Phi - \partial_i p\right]\frac{\delta}{\delta\pi_i} - \theta_{,i}\left[p - \tau K\right]\frac{\delta}{\delta\pi_i}.$$

Требование отсутствия в гамильтоновых уравнениях сингулярных вкладов ведет нас к уже известному граничному условию (11). Нетрудно видеть, что уравнения движения представляют собой старые уравнения (22), (24) и (23), а также одно новое уравнение

$$\dot{P}_\Omega = -(\mathbf{v}\cdot\nabla)P_\Omega. \tag{28}$$

В данном случае очевидно, что требование исчезновения граничных членов в вариации гамильтониана (или, что то же самое, в его полных вариационных производных (27)) приведет к граничному условию, отличному от общепринятого. Это означает, что при общей постановке задачи, когда канонический выбор переменных не предполагается заранее, критерий выбора поверхностных вкладов Редже-Тейтельбойма [3] должен быть заменен на требование исключения сингулярного вклада в гамильтоновом векторном поле (т.е. в гамильтоновых уравнениях движения).

Следует отметить, что доказательство тождества Якоби здесь не может быть проведено путем вычисления скобки Схоутена-Нейенхейса бивектора Ψ с самим собой, поскольку в случае динамической области Ω доказательство соотношения (25), предложенное в работе [2], неприменимо.

4. Вариационный принцип в эйлеровых переменных

Естественно задаться вопросом: нельзя ли получить гамильтонов формализм для эйлеровых переменных, рассмотренный в предыдущей части, непосредственно из соответствующего вариационного принципа, без апелляции к гамильтонову формализму в лагранжевых переменных? Ответ на этот вопрос, безусловно, будет положительным, однако само построение этого вариационного принципа не является очевидным и заслуживает специального обсуждения. Интересно, что оно послужило “завязкой” книги Купершмидта (см. [12], предисловие). Заинтересованного читателя мы можем также отослать к публикациям [13], [21], [22].

4.1. Фиксированная граница

Задумаемся сначала о возможности обратного перехода (справа налево по диаграмме): как найти лагранжиан и переменные, от которых он должен зависеть, если известен гамильтониан (в данном случае, как функционал от $\pi^i(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x})$ и $s(\mathbf{x})$) и скобки Пуассона для гамильтоновых переменных? Конечно, если переменные оказываются каноническими, то достаточно воспользоваться преобразованием Лежандра, но в общем случае эта задача не является тривиальной. Поскольку импульсы $\pi^i(\mathbf{x})$ имеют между собой ненулевые скобки, гамильтониан (21) не содержит сопряженных $\pi^i(\mathbf{x})$ координат, а общее число переменных не обязательно четно (например, в $\mathbb{R}^3$ оно равно пяти), выход заключается во введении вспомогательных переменных.

Таким образом, для продвижения по левой вертикальной стрелке диаграммы вниз мы дополним “наивный” лагранжиан

$$L_0 = \int\limits_\Omega d\mathbf{x}\rho\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \Phi(\mathbf{x}) - \varepsilon(\rho, s)\right),$$

который получается из лагранжиана (1) простой заменой переменных и является разностью кинетической и потенциальной (с добавлением к ней внутренней) энергий, несколькими связями вместе с соответствующими лагранжевыми множителями.

В качестве первой и наиболее очевидной связи возьмем уравнение непрерывности (закон сохранения массы)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0. \tag{29}$$

Кроме того, используем закон сохранения энтропии

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s = 0, \tag{30}$$

который можно переписать в комбинации с (29) так же, как

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho s \mathbf{v}) = 0.$$

Наконец, требуется наложить условие, обеспечивающее существование лагранжевых координат. Это означает, что каждой материальной точке, находящейся в момент времени t в точке с координатами $\mathbf{x}$, может быть сопоставлен ее "номер" α_μ, например, координаты ее начального положения $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$. Этот "номер" тоже должен "сохраняться" в процессе движения жидкости

$$\frac{\partial \alpha_\mu}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\alpha_\mu = 0. \tag{31}$$

При этом число степеней свободы, или диапазон изменения индекса μ, вообще говоря, не совпадает с размерностью пространства $\mathbb{R}^n$, например, для $n = 3$ достаточно одной компоненты α. В результате, пока с точностью до поверхностных вкладов, мы приходим к лагранжиану

$$L = L_0 + \int\limits_\Omega d\mathbf{x} \left[\phi \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) \right) - \eta \left(\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s \right) - \beta_\mu \left(\frac{\partial \alpha_\mu}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\alpha_\mu \right) \right],$$

или к действию

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_\Omega d\mathbf{x} \left[\rho \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \Phi(\mathbf{x}) - \varepsilon(\rho, s) \right) + \phi \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) \right) - \eta \frac{Ds}{Dt} - \beta_\mu \frac{D\alpha_\mu}{Dt} \right], \tag{32}$$

где

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla),$$

а знаки перед η, β_μ выбраны для удобства, так чтобы в нижеследующей формуле (33) были только плюсы. Варьирование действия по ϕ, η, β_μ, естественно, дает наши дополнительные условия (29), (30), (31).

Варьируя (32) по скорости $\mathbf{v}$, получаем так называемое представление Клебша для переменной скорости

$$\mathbf{v} = \nabla \phi + \frac{\eta}{\rho} \nabla s + \frac{\beta_\mu}{\rho} \nabla \alpha_\mu, \tag{33}$$

означающее, что скорость можно считать вспомогательной переменной.

Варьируя действие (32) по плотности ρ, мы получаем

$$\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \Phi(\mathbf{x}) - \varepsilon(\rho, s) - \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} - \dot{\phi} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\phi = 0,$$

что можно представить как уравнение для эволюции потенциала ϕ:

$$\dot{\phi} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)\phi + \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \Phi(\mathbf{x}) - \varepsilon(\rho, s) - \frac{p}{\rho}. \tag{34}$$

Мы также получаем независимые уравнения движения варьированием (32) по s

$$\dot{\eta} = -\operatorname{div}(\eta\mathbf{v}) + \rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial s}, \tag{35}$$

и по α_μ

$$\dot{\beta}_\mu = -\operatorname{div}(\beta_\mu\mathbf{v}). \tag{36}$$

Легко убедиться, что уравнения движения для "старых" переменных ρ, s остались прежними (22), (23).

Можно показать, что то же самое происходит с уравнением (24) для скорости $\mathbf{v}$. Для этого следует продифференцировать (33) по времени и подставить в полученное выражение $\dot{\rho}$, $\dot{\phi}$, $\dot{s}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\alpha}_\mu$, $\dot{\beta}_\mu$ из уравнений движения (29), (34), (30), (35), (31), (36) соответственно.

Разумеется, мы пока умолчали о поверхностных членах, возникающих при интегрировании по частям в вариации действия (32). Выпишем их в явном виде

$$\begin{aligned}(\delta S)_{\text{пов.}} \;&=\; \int\limits_\Omega d\mathbf{x}\,[\phi\delta\rho - \eta\delta s - \beta_\mu\delta\alpha_\mu]_{t_1}^{t_2} + \\ &+\; \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \oint\limits_{\partial\Omega} [\mathbf{v}(\phi\delta\rho - \eta\delta s - \beta_\mu\delta\alpha_\mu) + \rho\phi\delta\mathbf{v}]\cdot\mathbf{n}dS.\end{aligned} \tag{37}$$

Граничное условие

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0,$$

означающее, как и в предыдущих частях, неподвижность края области Ω, обеспечивает обращение в нуль всех вкладов на пространственной части границы, а вклад временно́й части исчезает, так как переменные ρ, s, α_μ должны быть заданы в начальный и конечный моменты времени.

4.2. Свободная граница

Добавим к действию (32) вклад поверхностной энергии и будем, как и раньше, описывать свободную границу с помощью функции $P_\Omega(\mathbf{x},t)$

$$\begin{aligned} S \;&=\; \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int \theta(P_\Omega)\left[\rho\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \Phi(\mathbf{x}) - \varepsilon(\rho,s)\right) + \phi\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\right) - \right.\\ &-\; \left.\eta\frac{Ds}{Dt} - \beta_\mu\frac{D\alpha_\mu}{Dt} - \tau\nabla\cdot\mathbf{n}\right]d\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{38}$$

Вариация такого действия будет отличаться от вариации действия (32) лишь несколькими новыми поверхностными членами, выпишем их отдельно:

$$\begin{aligned}(\delta' S)_{\text{пов.}} = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int \frac{d\theta}{dP_\Omega}\Bigg(&\dot{P}_\Omega\left(-\phi\delta\rho + \eta\delta s + \beta_\mu\delta\alpha\right) + \\ + \delta P_\Omega\left[\rho\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \Phi(\mathbf{x}) - \varepsilon(\rho,s)\right) + \phi\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\right) - \eta\frac{Ds}{Dt} - \beta_\mu\frac{D\alpha_\mu}{Dt} - \tau K\right]\Bigg)&d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Члены, стоящие в первой строке, возникают в результате интегрирования по частям частных производных по времени. Варьирование K не дает вклада, как было показано выше, см. (9).

Объединяя полученное выражение с ранее найденным вкладом (37), который можно переписать в виде

$$\begin{aligned}(\delta'' S)_{\text{пов.}} &= \int\limits_{t_1}^{t_2}\int d\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial t}\left[\theta(P_\Omega)(\phi\delta\rho-\eta\delta s-\beta_\mu\delta\alpha_\mu)\right] - \\ &- \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\int \nabla\theta(P_\Omega)\cdot\left[\mathbf{v}(\phi\delta\rho-\eta\delta s-\beta_\mu\delta\alpha_\mu)+\rho\phi\delta\mathbf{v}\right]d\mathbf{x},\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}(\delta S)_{\text{пов.}} &= \int \theta(P_\Omega)(\phi\delta\rho-\eta\delta s-\beta_\mu\delta\alpha_\mu)d\mathbf{x}\big|_{t_1}^{t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\int\nabla\theta(P_\Omega)\cdot(\rho\phi\delta\mathbf{v})\,d\mathbf{x} - \\ &- \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\int\frac{d\theta}{dP_\Omega}(\dot P_\Omega+(\mathbf{v}\cdot\nabla)P_\Omega)(\phi\delta\rho-\eta\delta s-\beta_\mu\delta\alpha_\mu)d\mathbf{x} + \\ &+ \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\int\frac{d\theta}{dP_\Omega}\delta P_\Omega\left[\rho\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}-\Phi(\mathbf{x})-\varepsilon(\rho,s)\right)+\phi\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\right) - \right. \\ &- \left.\eta\frac{Ds}{Dt}-\beta_\mu\frac{D\alpha_\mu}{Dt}-\tau K\right]d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Часть членов дает нам граничное условие

$$\dot P_\Omega+(\mathbf{v}\cdot\nabla)P_\Omega=0,$$

другая часть исчезает при задании полей на временных границах. Однако оставшиеся слагаемые не позволяют получить известное граничное условие (10). Как известно [17], [18], два действия, отличающиеся поверхностными членами, приводят к двум различным естественным граничным условиям. Это значит, что действие (38) должно быть изменено на некоторый поверхностный интеграл. Нетрудно убедиться, что мы получим нужный результат, вычитая из (38) выражение

$$\Delta S=\int\limits_{t_1}^{t_2} dt\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)+\nabla\cdot(\rho\phi\mathbf{v})\right)d\mathbf{x}.$$

Таким образом, действие, которое приводит к правильным уравнениям движения и граничным условиям в случае свободной границы, имеет вид

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\int\theta(P_\Omega)\left[\rho\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}-\Phi(\mathbf{x})-\varepsilon(\rho,s)\right)-\rho\frac{D\phi}{Dt}-\eta\frac{Ds}{Dt}-\beta_\mu\frac{D\alpha_\mu}{Dt}-\tau K\right]d\mathbf{x}. \qquad (39)$$

Сравнивая это выражение с формулой (34) мы видим, что на уравнениях движения с точностью до знака плотность лагранжиана совпадает с давлением. В работе Люка [13] для случая двумерного

$$d\mathbf{x} = dxdy, \quad P_\Omega(x,y,t) = h(x,t) - y,$$

потенциального течения $\mathbf{v} = \nabla\phi$ несжимаемой жидкости $\rho = 1$, $s = const$ без поверхностного натяжения $\tau = 0$ в постоянном гравитационном поле $\Phi(\mathbf{x}) = gy$ было впервые отмечено, что действие (39), принимающее вид

$$S = -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int dx \int\limits^{h(x,t)} dy \left(\frac{1}{2}{\phi_x}^2 + \frac{1}{2}{\phi_y}^2 + \dot{\phi} + gy\right),$$

позволяет получить не только уравнения движения, но и динамические граничные условия для свободной поверхности. Причем присутствие слагаемого $\dot{\phi}$ в плотности лагранжиана весьма существенно, так как именно оно порождает симплектическую форму

$$\omega = \int d\mathbf{x}\delta h \wedge \delta\phi,$$

соответствующую скобке Пуассона, открытой в почти одновременной работе Захарова [7].

Нетрудно убедиться, что действие (39) с равным успехом может применяться и в случае фиксированной границы области Ω.

5. Альтернативный вывод гамильтонова формализма в эйлеровых переменных

Покажем, что на основе вариационного принципа для эйлеровых переменных, обсужденного в предыдущей главе, может быть построен новый гамильтонов формализм, эквивалентный построенному выше путем редукции гамильтонова формализма для лагранжевых переменных. Это построение может быть выполнено как по методу Дирака [15], так и обращением матрицы симплектической формы (метод Фаддеева-Джэкива [14]).

5.1. Фиксированная граница

В подходе Дирака действие (39), где переменную $\mathbf{v}$ исключаем с помощью (33), приводит к появлению первичных связей

$$\begin{aligned} \pi_\phi &= -\rho, \qquad & \pi_\rho &= 0, \\ \pi_s &= -\eta, \qquad & \pi_\eta &= 0, \\ \pi_\alpha &= -\beta, \qquad & \pi_\beta &= 0. \end{aligned}$$

После этого ищутся вторичные связи, затем строятся скобки Дирака и исключаются связи второго рода.

На наш взгляд, процедура Фаддеева-Джэкива здесь проще. Находится симплектическая форма

$$\omega = \int \theta(P)(\delta\phi \wedge \delta\rho + \delta s \wedge \delta\eta + \delta\alpha_\mu \wedge \delta\beta_\mu)d\mathbf{x},$$

(здесь и ниже мы заменим громоздкое обозначение P_Ω на P), имеющая явно канонический вид, что позволяет сразу выписать скобки Пуассона:

$$\{\rho(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad \{\eta(\mathbf{x}), s(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad \{\beta_\mu(\mathbf{x}), \alpha_\nu(\mathbf{x}')\} = \delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}'),$$

которые здесь не отличаются от тех скобок Дирака, что получаются в другом подходе. Введем величины

$$\pi = \rho\nabla\phi + \eta\nabla s + \beta_\mu\nabla\alpha_\mu,$$

и вычислим для них скобки Пуассона. Ответ совпадает с формулой (18). Аналогичным образом проверяется соответствие формул (19), (20). Гамильтониан получается стандартным преобразованием Лежандра и, будучи выражен в переменных π, совпадает с выражением (21).

Таким образом, использование потенциалов Клебша позволяет установить связь между вариационным принципом и гамильтоновым формализмом в эйлеровых координатах.

5.2. Свободная граница

Для простоты мы в этой части считаем, что α_μ можно заменить на α. В случае свободной границы необходимо рассматривать P как динамическую переменную. Производные по времени в действие (39) входят в виде

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int d\mathbf{x}\theta(P)(-\rho\dot{\phi} - \eta\dot{s} - \beta\dot{\alpha}),$$

следовательно, соответствующая симплектическая форма оказывается равной выражению

$$\omega = -\int d\mathbf{x}\left(\theta(P)(\delta\rho\wedge\delta\phi + \delta\eta\wedge\delta s + \delta\beta\wedge\delta\alpha) + \theta'(P)\delta P\wedge(\rho\delta\phi + \eta\delta s + \beta\delta\alpha)\right).$$

В рассмотренном Захаровым [7] случае потенциального течения несжимаемой жидкости эта форма сводится (при $\rho = 1$) к виду

$$\omega = \int d\mathbf{x}\theta'(P)\delta\phi\wedge\delta P,$$

позволяющему ввести канонические скобки Пуассона для пары сопряженных переменных: потенциала поля скорости на границе и положения самой границы.

Здесь для перехода к гамильтонову формализму мы воспользуемся методом Дирака [15]. Введем сопряженные импульсы ко всем переменным, так что

$$\{\phi(x), \pi_\phi(y)\} = \{\rho(x), \pi_\rho(y)\} = \{s(x), \pi_s(y)\} = \delta(x, y),$$

$$\{\eta(x), \pi_\eta(y)\} = \{\alpha(x), \pi_\alpha(y)\} = \{\beta(x), \pi_\beta(y)\} = \{P(x), \pi_P(y)\} = \delta(x, y),$$

и найдем из действия (39) их значения, пользуясь стандартной формулой

$$\pi_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}.$$

Поскольку плотность лагранжиана зависит от скоростей линейно, мы получаем столько же первичных связей, сколько ввели импульсов:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \pi_\phi + \theta(P)\rho, \qquad \psi_4 = \pi_\rho, \\
\psi_2 &= \pi_s + \theta(P)\eta, \qquad \psi_5 = \pi_\eta, \\
\psi_3 &= \pi_\alpha + \theta(P)\beta, \qquad \psi_6 = \pi_\beta, \\
\psi_7 &= \pi_P.
\end{aligned}$$

Преобразование Лежандра приводит к затравочному гамильтониану

$$\mathrm{H}_0 = \int d\mathbf{x}\theta(P)\left(\frac{1}{2\rho}(\rho\nabla\phi + \eta\nabla s + \beta\nabla\alpha)^2 + \rho\Phi + \rho\varepsilon(\rho, s) + \tau K\right),$$

совпадающему с гамильтонианом (26), с той единственной разницей, что импульсы π_i выражены через переменные Клебша. В новых переменных, однако, гамильтониан H_0 не дает правильных уравнений движения и должен быть дополнен линейной комбинацией первичных связей

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 + \int d\mathbf{x} \sum_{i=1}^{7} \lambda_i \psi_i.$$

Очевидно, что первые 6 связей являются связями 2-го рода, матрица их скобок Пуассона

$$\{\psi_i, \psi_j\} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \theta(P)\delta(x, y)$$

имеет обратную (здесь мы должны считать единичным оператором $\theta(P)\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$)

$$C_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \theta(P)\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

и можно определить скобки Дирака согласно стандартной формуле

$$\{f(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})\}_D = \{f(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})\} - \sum_{i,j=1}^{6} \int d\mathbf{z} \int d\mathbf{w} \{f(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{z})\} C_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \{\psi_j(\mathbf{w}), g(\mathbf{y})\}.$$

Таким образом мы избавляемся от 6 первых импульсов и, соответственно, от 6 первых связей в гамильтониане

$$\mathrm{H} = \int d\mathbf{x} \left[\theta(P)\left(\frac{1}{2\rho}(\rho\nabla\phi + \eta\nabla s + \beta\nabla\alpha)^2 + \rho\Phi + \rho\varepsilon(\rho, s) + \tau K\right) + \lambda_P \pi_P\right].$$

Вычисление скобок Дирака для оставшихся 8 переменных дает соотношения:

$$\begin{aligned}
\{\rho(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})\}_D &= \theta(P)\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \{\rho(\mathbf{x}), \pi_P(\mathbf{y})\}_D = -\theta'(P)\rho\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\
\{\eta(\mathbf{x}), s(\mathbf{y})\}_D &= \theta(P)\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \{\eta(\mathbf{x}), \pi_P(\mathbf{y})\}_D = -\theta'(P)\eta\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\
\{\beta(\mathbf{x}), \alpha(\mathbf{y})\}_D &= \theta(P)\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \{\beta(\mathbf{x}), \pi_P(\mathbf{y})\}_D = -\theta'(P)\beta\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\
\{P(\mathbf{x}), \pi_P(\mathbf{y})\} &= \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Таким образом, исходной симплектической форме мы теперь можем сопоставить пуассонов бивектор

$$\begin{aligned}\Psi &= \int d\mathbf{x}\Bigg[\theta(P)\left(\frac{\delta}{\delta\rho}\wedge\frac{\delta}{\delta\phi}+\frac{\delta}{\delta\eta}\wedge\frac{\delta}{\delta s}+\frac{\delta}{\delta\beta}\wedge\frac{\delta}{\delta\alpha}\right)+\\ &+ \frac{\delta}{\delta\pi_P}\wedge\left(-\frac{\delta}{\delta P}+\theta'(P)\left(\rho\frac{\delta}{\delta\rho}+\eta\frac{\delta}{\delta\eta}+\beta\frac{\delta}{\delta\beta}\right)\right)\Bigg].\end{aligned}$$

Дифференциал гамильтониана имеет вид

$$\mathsf{d}\mathrm{H}=\int d\mathbf{x}\frac{\delta\mathrm{H}}{\delta\phi_A}\delta\phi_A, \tag{40}$$

где некоторые полные вариационные производные содержат нетривиальные граничные вклады

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathrm{H}}{\delta\rho} &= \theta(P)\left(\mathbf{v}\nabla\phi-\frac{v^2}{2}+\Phi+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right),\\ \frac{\delta\mathrm{H}}{\delta\eta} &= \theta(P)\mathbf{v}\cdot\nabla s,\\ \frac{\delta\mathrm{H}}{\delta\beta} &= \theta(P)\mathbf{v}\cdot\nabla\alpha,\\ \frac{\delta\mathrm{H}}{\delta\phi} &= -\theta'(P)\rho\mathbf{v}\cdot\nabla P-\theta(P)\nabla(\rho\mathbf{v}),\\ \frac{\delta\mathrm{H}}{\delta s} &= -\theta'(P)\eta\mathbf{v}\cdot\nabla P-\theta(P)\left(\nabla(\eta\mathbf{v})-\rho T\right),\\ \frac{\delta\mathrm{H}}{\delta\alpha} &= -\theta'(P)\beta\mathbf{v}\cdot\nabla P-\theta(P)\nabla(\beta\mathbf{v}),\\ \frac{\delta\mathrm{H}}{\delta P} &= \theta'(P)\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\Phi+\rho\varepsilon+\tau K\right), \qquad \frac{\delta\mathrm{H}}{\delta\pi_P}=\lambda_P.\end{aligned}$$

Операция внутреннего умножения $\mathsf{d}\mathrm{H}$ на пуассонов бивектор дает, с точностью до знака, гамильтоново векторное поле,

$$\begin{aligned}-\mathsf{d}\mathrm{H}\lrcorner\Psi &= \left[-\theta'(P)\rho(\lambda_P+\mathbf{v}\cdot\nabla P)-\theta(P)\nabla(\rho\mathbf{v})\right]\frac{\delta}{\delta\rho}+\\ &+ \left[-\theta'(P)\eta(\lambda_P+\mathbf{v}\cdot\nabla P)-\theta(P)(\nabla(\eta\mathbf{v})-\rho T)\right]\frac{\delta}{\delta\eta}+\\ &+ \left[-\theta'(P)\beta(\lambda_P+\mathbf{v}\cdot\nabla P)-\theta(P)\nabla(\beta\mathbf{v})\right]\frac{\delta}{\delta\beta}+\\ &+ \theta'(P)(p-\tau K)\frac{\delta}{\delta\pi}-\theta(P)\mathbf{v}\cdot\nabla\alpha\frac{\delta}{\delta\alpha}+\lambda_P\frac{\delta}{\delta P}+\\ &+ \theta(P)\left[\frac{v^2}{2}-\mathbf{v}\cdot\nabla\phi-\Phi-\varepsilon-\frac{p}{\rho}\right]\frac{\delta}{\delta\phi}-\theta(P)\left[\mathbf{v}\cdot\nabla s\right]\frac{\delta}{\delta s},\end{aligned}$$

т.е. гамильтоновы уравнения движения, например,

$$\dot{P}=\lambda_P. \tag{41}$$

Требование обращения в нуль всех сингулярных на границе членов дает два уравнения

$$\theta'(P)(\lambda_P + \mathbf{v} \cdot \nabla P) = 0, \tag{42}$$

$$\theta'(P)(p - \tau K) = 0, \tag{43}$$

учитывая (41) мы узнаем в них все те же стандартные граничные условия (11), (28). Если бы мы исходили здесь из критерия, выдвинутого в работе Редже и Тейтельбойма [3], т.е. требовали бы исчезновения граничных членов в вариации гамильтониана (40), то получили бы неверные граничные условия, в частности условие неподвижности границы.

После проведенного сокращения сингулярных членов полученные уравнения движения эквивалентны лагранжевым.

Заключение

Мы показали, что предложенный в работах [1], [2] метод применим в гамильтоновом подходе к задачам со свободной границей. Особенности этого класса проблем проявляются в данном подходе, на наш взгляд, четко и ясно.

Важно подчеркнуть, что при работе с неультралокальными скобками Пуассона общепринятый метод Редже и Тейтельбойма [3] оказывается неудовлетворительным, так как требование "дифференцируемости" гамильтониана ведет к граничным условиям, отличным от следующих из вариационного принципа, в то же время не исключая из уравнений движения сингулярного граничного вклада.

Наше требование к граничным условиям состоит в том, что необходимо исключить вклады пропорциональные граничным δ-функциям и их производным в уравнениях движения, т.е. в гамильтоновых векторных полях. Наряду с этим допускается наличие таких членов в вариации гамильтониана или в пуассоновом бивекторе.

Эти выводы подтверждаются и другими примерами [5], [6]. Мы надеемся, что обсуждаемый подход окажется полезным при рассмотрении различных задач со свободными границами.

Список литературы

[1] Soloviev V.O. // J. Math. Phys. **34** (1993) 5747.

[2] Soloviev V.O. "Boundary values as Hamiltonian variables II. Graded structures" – Preprint IHEP 94-145, Protvino, 1994, q-alg/9501017.

[3] Regge T. and Teitelboim C. // Ann. of Phys. **88** (1974) 286.

[4] Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986, с.21-22.

[5] Soloviev V.O. // Phys. Rev. **D55** (1997) 7793.

[6] Соловьев В.О. // ТМФ, **112** (1997) 142.

[7] Захаров В.Е. // Прикл. мех. и техн. физ., **2** (1968) 86.

[8] Miles J.W. // J. Fluid Mech. **83** (1977) 153.

[9] Milder D.M. // J. Fluid Mech. **83** (1977) 159.

[10] Lewis D., Marsden J., Montgomery R. and Ratiu T. // Physica **D18** (1986) 391.

[11] Abarbanel H.D.I., Brown R. and Yang Y.M. // Phys. Fluids **31** (1988) 2802.

[12] Kupershmidt B.A. *The Variational Principles of Mechanics*, World Scientific, Singapore, 1992.

[13] Luke J.C. // J. Fluid Mech. **27** (1967) 395.

[14] Faddeev L. and Jackiw R. // Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 1692.

[15] Dirac P. *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva Univ., N.Y., 1964. (Имеется русский перевод: Дирак П. Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968).

[16] Bering K. // J. Math. Phys. **41** (2000) 7468.

[17] Courant R. and Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*, Vol.1, (Wiley, N.Y., 1989) pp.208-211. (Имеется русский перевод: Гильберт Д., Курант Р. Методы математической физики, том 1, М., 1951).

[18] Lanczos C. *The Variational Principles of Mechanics*, (Univ. Toronto Press, 1964) pp.68-73. (Имеется русский перевод: Ланцош К. Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965, с.92-96).

[19] Lamb H. *Hydrodynamics*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1932) p.456. (Имеется русский перевод: Ламб Г. Гидродинамика, М.-Л.: ГИТТЛ, 1947).

[20] Olver P.J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (Graduate texts in mathematics) Springer-Verlag, N.Y., 1986. (Имеется русский перевод: Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989).

[21] Seliger R.L. and Whitham G.B. // Proc. Roy. Soc. **A305** (1968) 1. (Имеется русский перевод: Механика, 1969, No.5 (117) 99).

[22] Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. — М.: Наука, 1983.

[23] Габов С.А. Введение в теорию нелинейных волн. — М.: Изд-во МГУ, 1988.

Рукопись поступила 21 сентября 2001 г.

Приложение

Докажем здесь справедливость равенства

$$\frac{\partial}{\partial r^j}\left(J J^{ji}\right) = 0,$$

для величин, определенных формулами (2).

Согласно правилам варьирования, для детерминанта и соответственно для матричных элементов обратной матрицы имеем

$$\delta J = J J^{lk} \delta J_{kl}, \qquad \delta J^{ji} = -J^{jk} J^{li} \delta J_{kl}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r^j}\left(J J^{ji}\right) &= J\left(J^{ji}J^{lk} - J^{jk}J^{li}\right)\frac{\partial^2 Y^k}{\partial r^j \partial r^l} = J\left(\frac{\partial r^j}{\partial Y^i}\frac{\partial r^l}{\partial Y^k} - \frac{\partial r^j}{\partial Y^k}\frac{\partial r^l}{\partial Y^i}\right)\frac{\partial^2 Y^k}{\partial r^j \partial r^l} = \\
&= J\left[\frac{\partial r^l}{\partial Y^k}\frac{\partial}{\partial r^j}\left(\frac{\partial Y^k}{\partial r^l}\right)\frac{\partial r^j}{\partial Y^i} - \frac{\partial r^l}{\partial Y^i}\frac{\partial}{\partial r^j}\left(\frac{\partial Y^k}{\partial r^l}\right)\frac{\partial r^j}{\partial Y^k}\right] = \\
&= J\left[\frac{\partial r^l}{\partial Y^k}\frac{\partial}{\partial Y^i}\left(\frac{\partial Y^k}{\partial r^l}\right) - \frac{\partial r^l}{\partial Y^i}\frac{\partial}{\partial Y^k}\left(\frac{\partial Y^k}{\partial r^l}\right)\right] = \\
&= J\left[\frac{\partial}{\partial Y^i}\left(\frac{\partial Y^k}{\partial r^l}\frac{\partial r^l}{\partial Y^k}\right) - \frac{\partial Y^k}{\partial r^l}\frac{\partial^2 r^l}{\partial Y^i \partial Y^k} - \frac{\partial}{\partial Y^k}\left(\frac{\partial Y^k}{\partial r^l}\frac{\partial r^l}{\partial Y^i}\right) + \frac{\partial Y^k}{\partial r^l}\frac{\partial^2 r^l}{\partial Y^k \partial Y^i}\right] = 0.
\end{aligned}$$

В.О. Соловьев
Граничные значения как гамильтоновы переменные. III. Идеальная жидкость со свободной поверхностью.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы **LaTeX.**
Редактор Н.В.Ежела. Технический редактор Н.В.Орлова.

Подписано к печати 25.09.2001. Формат $60 \times 84/8$. Офсетная печать.
Печ.л. 3. Уч.-изд.л. 2,4. Тираж 130 Заказ 151. Индекс 3649. ЛР т020498 17.04.97.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 2001–35, И Ф В Э, 2001