ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2001–40
ОТФ

В.Е. Рочев

О ДИНАМИЧЕСКОМ НАРУШЕНИИ КИРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Протвино 2001

УДК 539.1.01 М–24

Аннотация

Рочев В.Е. О динамическом нарушении киральной симметрии в квантовой электродинамике: Препринт ИФВЭ 2001–40. – Протвино, 2001. – 11 с., библиогр.: 10.

Рассмотрена проблема динамического нарушения киральной симметрии (ДНКС) в многомерной квантовой электродинамике (КЭД). Показано, что в шестимерной КЭД в лестничной модели явление ДНКС существует при любых значениях константы связи.

Abstract

Rochev V.E. On Dynamical Chiral Symmetry Breaking in Quantum Electrodynamics: IHEP Preprint 2001–40. – Protvino, 2001. – p. 11, refs.: 10.

The problem of dynamical chiral symmetry breaking (DCSB) in multidimensional quantum electrodynamics (QED) is considered. It is shown that for six-dinesional QED the phenomenon of DSCB exists in ladder model for any coupling.

Введение

Феномен динамического нарушения киральной симметрии (ДНКС) занимает важное место в физике частиц. ДНКС является основой теории легких адронов — киральной динамики, являющейся одним из низкоэнергетических пределов квантовой хромодинамики, а также играет существенную роль в различных обобщениях Стандартной модели.

Одним из наиболее изученных примеров ДНКС является четырехмерная безмассовая квантовая электродинамика (КЭД) в режиме сильной связи [1,2]. (Подробное рассмотрение и обширный список литературы см. в монографии [3]). В настоящей работе предпринята попытка изучения явления ДНКС в шестимерной КЭД. Интерес к многомерным моделям стимулирован весьма популярными сейчас исследованиями теорий с дополнительными измерениями (см. обзор [4]). Исследованный в настоящей работе механизм ДНКС в шестимерной КЭД интересен для понимания динамики многомерных миров и может в каких-то своих чертах реализовываться в космогонических сценариях с большими дополнительными измерениями.

Изучение непертурбативных эффектов, к которым относится и ДНКС, в многомерной КЭД требует модельных приближений. В качестве такого приближения мы используем в настоящей работе главный член непертурбативного разложения, предложенного в работах [5,6]. На языке диаграмм уравнение главного приближения для пропагатора электрона соответствует известному лестничному приближению. Именно в рамках этого модельного уравнения впервые был исследован феномен ДНКС в четырехмерной КЭД [1,2], причем последующие исследования показали, что данное приближение вполне адекватно описывает этот эффект. Мы полагаем, что и шестимерной КЭД такое приближение адекватно ситуации.

Основным результатом нашей работы является вывод о том, что в безмассовой шестимерной КЭД существует явление ДНКС, причем в отличие от четырехмерной КЭД, где существует критическая константа связи $\alpha_c \sim 1$, т.е. при $\alpha < \alpha_c$ ДНКС отсутствует, в шестимерной КЭД явление ДНКС происходит при любых значениях константы связи.

Одним из главных вопросов, возникающих при изучении шестимерной КЭД, является вопрос о перенормируемости. В рамках теории возмущений по константе связи КЭД в шестимерном пространстве является неперенормируемой теорией. Однако это обстоятельство, вообще говоря, не является препятствием к существованию перенормируемых разложений иного рода. Так например, перенормированное $1/N$-разложение существует для некоторых моделей, неперенормируемых в обычном смысле теории возмущений по константе связи (см., например, [7]). Мы предполагаем, что такого рода ситуация может реализовываться и для калибровочных теорий: непертурбативные разложения могут иметь смысл и в многомерных калибровочных теориях, для которых обычный ряд теории возмущений не существует.

1. Уравнения Швингера-Дайсона и итерационная схема

Мы будем рассматривать теорию безмассового спинорного поля $\psi(x)$ (электрон), взаимодействующего с абелевым калибровочным полем $A_\mu(x)$ (фотон) в D-мерном пространстве Минковского с метрикой $x^2 \equiv x_\mu x_\mu = x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_{D-1}^2$. (Для упрощения обозначений мы все векторные индексы пишем внизу).

Лагранжиан, включающий член, фиксирующий калибровку, имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2d_l} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \bar{\psi}(i\hat{\partial} + e\hat{A})\psi. \tag{1}$$

Здесь $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$; $\hat{A} \equiv A_\mu \gamma_\mu$; $\bar{\psi} = \psi^* \gamma_0$; e — заряд (константа связи); d_l — калибровочный параметр; γ_μ — матрицы Дирака.

Производящий функционал функций Грина (вакуумных средних T-произведения полей) может быть представлен в виде функционального интеграла

$$G(J,\eta) = \int D(\psi, \bar{\psi}, A) \exp i \Big\{ \int dx \Big(\mathcal{L} + J_\mu(x) A_\mu(x) \Big) - \int dx dy \bar{\psi}^\beta(y) \eta^{\beta\alpha}(y,x) \psi^\alpha(x) \Big\}. \tag{2}$$

Здесь $J_\mu(x)$ — источник калибровочного поля, а $\eta^{\beta\alpha}(y,x)$ — билокальный источник спинорного поля (α и β — спинорные индексы). Нормировочная постоянная опущена.

Функциональные производные G по источникам есть вакуумные средние

$$\frac{\delta G}{\delta J_\mu(x)} = i < 0 \mid A_\mu(x) \mid 0 >, \quad \frac{\delta G}{\delta \eta^{\beta\alpha}(y,x)} = i < 0 \mid T\Big\{ \psi^\alpha(x) \bar{\psi}^\beta(y) \Big\} \mid 0 > . \tag{3}$$

Вывод уравнений Швингера-Дайсона для производящего функционала G основан на соотношениях

$$0 = \int D(\psi, \bar{\psi}, A) \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \exp i \Big\{ \int dx \Big(\mathcal{L} + J_\mu(x) A_\mu(x) \Big) - \int dx dy \bar{\psi}(y) \eta(y,x) \psi(x) \Big\}, \tag{4}$$

$$0 = \int D(\psi, \bar{\psi}, A) \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(x)} \bar{\psi}(y) \exp i \Big\{ \int dx \Big(\mathcal{L} + J_\mu(x) A_\mu(x) \Big) - \int dx dy \bar{\psi}(y) \eta(y,x) \psi(x) \Big\}. \tag{5}$$

Произведя в (4) и (5) дифференцирования и принимая во внимание (3), получаем уравнения Швингера-Дайсона для производящего функционала функций Грина квантовой электродинамики

$$(g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{d_l} \partial_\mu \partial_\nu) \frac{1}{i} \frac{\delta G}{\delta J_\nu(x)} + ie \, \mathrm{tr} \Big\{ \gamma_\mu \frac{\delta G}{\delta \eta(x,x)} \Big\} + J_\mu(x) G = 0, \tag{6}$$

$$\delta(x-y) G + i\hat{\partial} \frac{\delta G}{\delta \eta(y,x)} + \frac{e}{i} \gamma_\mu \frac{\delta^2 G}{\delta J_\mu(x) \delta \eta(y,x)} - \int dx' \eta(x,x') \frac{\delta G}{\delta \eta(y,x')} = 0. \tag{7}$$

Разрешим уравнение Швингера-Дайсона (6) относительно первой производной производящего функционала по J_μ

$$\frac{1}{i}\frac{\delta G}{\delta J_\mu(x)} = -\int dx_1 D^c_{\mu\nu}(x-x_1)\Big\{J_\nu(x_1)G + ie\,\mathrm{tr}\,\gamma_\nu\frac{\delta G}{\delta\eta(x_1,x_1)}\Big\} \tag{8}$$

и подставим во второе уравнение Швингера-Дайсона (7). (Здесь

$$D^c_{\mu\nu} = [g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu]^{-1}$$

— свободный пропагатор фотона). В результате мы получим "проинтегрированное по A_μ" уравнение

$$\delta(x-y)G + i\hat{\partial}\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x)} + \frac{e^2}{i}\int dx_1 D^c_{\mu\nu}(x-x_1)\gamma_\mu\frac{\delta}{\delta\eta(y,x)}\,\mathrm{tr}\,\gamma_\nu\frac{\delta G}{\delta\eta(x_1,x_1)} =$$
$$= \int dx_1\Big\{\eta(x,x_1)\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x_1)} + eD^c_{\mu\nu}(x-x_1)J_\nu(x_1)\gamma_\mu\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x)}\Big\}. \tag{9}$$

Воспользовавшись условием ферми-симметрии, можно переписать уравнение (9) в виде

$$\delta(x-y)G + i\hat{\partial}\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x)} + ie^2\int dx_1 D^c_{\mu\nu}(x-x_1)\gamma_\mu\frac{\delta}{\delta\eta(x_1,x)}\gamma_\nu\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x_1)} =$$
$$= \int dx_1\Big\{\eta(x,x_1)\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x_1)} + eD^c_{\mu\nu}(x-x_1)J_\nu(x_1)\gamma_\mu\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x)}\Big\}. \tag{10}$$

Мы будем использовать для решения уравнения Швингера-Дайсона (10) итерационную схему, предложенную в работах [5], [6]. Основной идеей этой схемы является аппроксимация функционально-дифференциального уравнения Швингера-Дайсона (10) уравнением с "постоянными", т.е. не зависящими от источников J_μ и η, коэффициентами. Таким образом мы аппроксимируем функционально-дифференциальное уравнения Швингера-Дайсона вблизи точки $J_\mu = 0,\ \eta = 0$. Поскольку объектом вычислений являются функции Грина, т.е. производные G в нуле, то такая аппроксимация выглядит вполне естественной. В каждом порядке этой итерационной схемы функции Грина определяются как решения замкнутой системы уравнений.

В соответствии с общим принципом построения итераций в качестве главного приближения выбираем уравнение (10), в коэффициентах которого положено $J_\mu = 0$, $\eta = 0$, т.е. уравнение

$$\delta(x-y)G^{(0)} + i\hat{\partial}\frac{\delta G^{(0)}}{\delta\eta(y,x)} + ie^2\int dx_1 D^c_{\mu\nu}(x-x_1)\gamma_\mu\frac{\delta}{\delta\eta(x_1,x)}\gamma_\nu\frac{\delta G^{(0)}}{\delta\eta(y,x_1)} = 0. \tag{11}$$

Это уравнение имеет решением функционал

$$G^{(0)} = \exp\Big\{\mathrm{Tr}(S\star\eta)\Big\}. \tag{12}$$

Знак $\star$ означает умножение в операторном смысле, а знак Tr означает след в операторном смысле. Здесь

$$S^{-1}(x) = -i\hat{\partial}\delta(x) - ie^2 D^c_{\mu\nu}(x)\gamma_\mu S(x)\gamma_\nu. \tag{13}$$

Уравнение (13) является уравнением для пропагатора электрона в главном приближении итерационной схемы. Уравнение итераций в соответствии с (10) и (11) имеет вид

$$\delta(x-y)G^{(i)} + i\hat{\partial}\frac{\delta G^{(i)}}{\delta\eta(y,x)} + ie^2\int dx_1 D^c_{\mu\nu}(x-x_1)\gamma_\mu \frac{\delta}{\delta\eta(x_1,x)}\gamma_\nu \frac{\delta G^{(i)}}{\delta\eta(y,x_1)} =$$
$$= \int dx_1 \Big\{\eta(x,x_1)\frac{\delta G^{(i-1)}}{\delta\eta(y,x_1)} + eD^c_{\mu\nu}(x-x_1)J_\nu(x_1)\gamma_\mu \frac{\delta G^{(i-1)}}{\delta\eta(y,x)}\Big\}. \tag{14}$$

Уравнение (13), а также следующие из (14) уравнения для высших функций Грина на языке диаграмм соответствуют известному лестничному приближению. В нашей трактовке эти уравнения являются составной частью итерационной схемы.

2. Асимптотическое решение уравнения для пропагатора электрона и динамическое нарушение киральной симметрии

В поперечной калибровке $d_l = 0$ уравнение для пропагатора электрона (13) имеет простое решение

$$S_0 = -1/i\hat{\partial}. \tag{15}$$

Действительно, в координатном пространстве

$$D^c_{\mu\nu}(x) = \frac{e^{-i\pi D/2}\Gamma(D/2-1)}{4i\pi^{D/2}(x^2-i0)^{D/2-1}}\Big[\frac{1+d_l}{2}g_{\mu\nu} + (1-d_l)(D/2-1)\frac{x_\mu x_\nu}{x^2-i0}\Big]. \tag{16}$$

При $d_l = 0$ функция $D^c_{\mu\nu}(x)$ обладает важным свойством ("$\hat{x}$-поперечность")

$$D^c_{\mu\nu}(x)\gamma_\mu\hat{x}\gamma_\nu = 0, \tag{17}$$

из которого сразу следует существование решения (15), т.к. $S_0(x) \sim \hat{x}$.

При D четных можно определить киральные компоненты спинорных полей и соответствующие киральные преобразования. Лагранжиан безмассовой электродинамики (1) инвариантен относительно киральных преобразований. Решение (15) является кирально-симметричным. Существование кирально-неинвариантных решений уравнения (13), обладающих свойством $\mathrm{tr}\, S \neq 0$, означает динамическое нарушение киральной симметрии (ДНКС) в этой модели.

Уравнение (13) является нелинейным уравнением, что весьма затрудняет его исследование. Однако, как показывает опыт исследования этого уравнения при $D = 4$ (см. [3] и цитируемую там литературу), асимптотическое поведение решений этого уравнения в ультрафиолетовой области определяется линейным приближением. Поскольку в квантовой электродинамике непертурбативной областью является ультрафиолетовая область, то для описания непертурбативных эффектов, таких как ДНКС, достаточно ограничиться линеаризованной версией этого уравнения. При $D = 4$ этот вопрос был детально исследован (см. [3]). Мы примем, что это верно также и при $D > 4$ и будем исследовать линеаризованную версию этого уравнения, известную в литературе как бифуркационное приближение [8].

Введем массовый оператор

$$\Sigma = S^{-1} - S_0^{-1}.$$

Процедура линеаризации состоит в аппроксимации

$$S = [S_0^{-1} + \Sigma]^{-1} \approx S_0 - S_0 \star \Sigma \star S_0.$$

Для массового оператора в поперечной калибровке мы получаем уравнение

$$\Sigma = ie^2 D_{\mu\nu} \gamma_\mu (S_0 \star \Sigma \star S_0) \gamma_\nu. \tag{18}$$

По построению очевидно, что область применимости этой линеаризованной версии есть асимптотическая ультрафиолетовая область, т.е. область импульсов $p^2 \gg \lambda^2$, где λ — параметр размерности массы, играющий роль ультрафиолетового обрезания. Отсюда, в частности, следует, что в области применимости линеаризованного уравнения (18) его решения должны удовлетворять условию

$$\Sigma^2 \leq p^2.$$

В силу условия $\hat{x}$-поперечности (17) спинорная структура решений уравнения (18) тривиальна:

$$\Sigma_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta} \cdot \Sigma,$$

откуда следует также, что

$$F_{\alpha\beta} \equiv (S_0 \star \Sigma \star S_0)_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta} \cdot F,$$

и окончательно мы получаем для массового оператора следующее уравнение в x-пространстве:

$$\Sigma(x^2) = \alpha \frac{(D-1) e^{-i\pi D/2} \Gamma(D/2-1)}{[\pi(x^2 - i0)]^{D/2-1}} \cdot F(x^2).$$

Здесь $\alpha = e^2/4\pi$.

Умножая[1] это уравнение на $(x^2)^{D/2-1}$ и переходя в p-пространство, мы получаем дифференциальное уравнение в импульсном пространстве

$$(\partial^2)^{D/2-1} \Sigma(p^2) = -\alpha \frac{(D-1)\Gamma(D/2-1)}{\pi^{D/2-1}(p^2 + i0)} \cdot \Sigma(p^2).$$

Это уравнение для массового оператора в псевдоевклидовом пространстве Минковского. Произведя евклидов поворот $\partial^2 \to -\partial^2$, $p^2 \to -p^2$, мы получаем уравнение для массового оператора в евклидовом импульсном пространстве

$$(-\partial^2)^k \Sigma(p^2) = \alpha \frac{(2k+1)\Gamma(k)}{\pi^k p^2} \cdot \Sigma(p^2), \tag{19}$$

где $k = D/2 - 1$.

Рассмотрим сначала четырехмерный случай ($k = 1$). В этом случае уравнение (19) при $\alpha < \pi/3$ имеет асимптотическое решение для больших p^2

$$\Sigma = C(p^2)^a,$$

[1]Такое умножение есть, по сути дела, регуляризация произведения $(x^2 - i0)^{1-D/2} \cdot F(x)$.

где
$$a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 3\alpha/\pi}.$$
При $\alpha \geq \pi/3$ решение уравнения есть
$$\Sigma = \frac{C}{\sqrt{p^2}} \sin\Big(\frac{\omega}{2} \log \frac{p^2}{M^2}\Big), \tag{20}$$
где $\omega = \sqrt{3\alpha/\pi - 1}$. Здесь C и M — вещественные константы. (При $\omega \to 0$ решение есть $\Sigma = \frac{C}{\sqrt{p^2}} \log \frac{p^2}{M^2}$).

В критической точке $\alpha_c = \pi/3$ характер асимптотики меняется — она становится осциллирующей. Такая смена поведения означает фазовый переход к состоянию с динамически нарушенной киральной симметрией (см. [3]), т.е. при $\alpha < \alpha_c$ существует лишь тривиальное решение $\Sigma \equiv 0$, а при $\alpha \geq \alpha_c$ возникают нетривиальные решения, соответствующие ДНКС. Для иллюстрации этого тезиса достаточно рассмотреть процедуру нормировки решения в псевдоевклидовом пространстве Минковского. В псевдоевклидовой области массовый оператор должен удовлетворять условию нормировки
$$\Sigma(m^2) = m. \tag{21}$$
Аналитическое продолжение в псевдоевклидову область $p^2 \to -p^2 - i0$ совершается с помощью известных формул
$$(-p^2 - i0)^a = e^{-i\pi a}(p^2 + i0)^a, \;\; \log(-p^2 - i0) = \log(p^2 + i0) - i\pi. \tag{22}$$
Принимая во внимание эти формулы, легко видеть, что для решений при $\alpha < \pi/3$ условие нормировки входит в противоречие с условием вещественности C и m (для ненулевых значений этих величин), в то время как в области $\alpha \geq \pi/3$ существует нормированное решение с $C \neq 0$, соответствующее ДНКС. Оно имеет вид (в евклидовой области):
$$\Sigma(p^2) = \frac{m^2}{\mathrm{sh}(\frac{\pi\omega}{2})\sqrt{p^2}} \sin\Big(\frac{\omega}{2} \log \frac{p^2}{m^2}\Big). \tag{23}$$

Обратимся к шестимерному случаю. Уравнение (19) при $k = 2$ может быть приведено к виду уравнения Мейера [9]
$$\Big(z\frac{d}{dz} + 2\Big)\Big(z\frac{d}{dz} + 1\Big)\Big(z\frac{d}{dz} - 1\Big)z\frac{d\Sigma}{dz} - z\Sigma = 0, \tag{24}$$
где $z = \frac{5\alpha}{(4\pi)^2}p^2$. Вещественная фундаментальная система решений в окрестности точки $z = \infty$ имеет вид
$$u_1(z) = G^{40}_{04}(ze^{-4\pi i} \mid -2, -1, 0, 1),$$
$$u_2(z) = G^{40}_{04}(z \mid -2, -1, 0, 1),$$
$$u_{3,4}(z) = e^{i\phi}G^{40}_{04}(ze^{-2\pi i} \mid -2, -1, 0, 1) + e^{-i\phi}G^{40}_{04}(ze^{2\pi i} \mid -2, -1, 0, 1).$$
Здесь G^{40}_{04} — функция Мейера; ϕ — вещественное число. Асимптотики функций u_l при $z \to \infty$ есть соответственно
$$u_1(z) \sim z^{-7/8} \exp(4z^{1/4}),$$

$$u_2(z) \sim z^{-7/8} \exp(-4z^{1/4}),$$
$$u_{3,4}(z) \sim z^{-7/8} \cos(4z^{1/4} + \phi).$$

Поскольку само уравнение (19) имеет асимптотический характер, то мы можем рассматривать эти асимптотики в качестве решений нашей задачи. Экспоненциально-растущее решение не удовлетворяет условию $\Sigma^2 \leq p^2$ и должно быть отброшено. Следовательно, главное асимптотическое решение имеет вид

$$\Sigma \approx C z^{-7/8} \cos(4z^{1/4} + \phi).$$

Условие нормировки в псевдоевклидовой области (21) и условие вещественности констант C и ϕ дают нам, с учетом формул аналитического продолжения (22), уравнения, связывающие C и ϕ с массой m. Разрешая эти условия, получим нормированное асимптотическое решение в евклидовой области

$$\Sigma(p^2) \approx 2m\Big(\frac{m^2}{p^2}\Big)^{7/8} \exp\Big\{(5\alpha)^{1/4}\sqrt{\frac{2m}{\pi}}\Big\} \cos\Big\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}(5\alpha)^{1/4}\Big(\sqrt{|p|} - \sqrt{\frac{m}{2}}\Big) - \frac{7}{8}\pi\Big\}. \qquad (25)$$

Здесь $|p| \equiv \sqrt{p^2}$.

3. Динамическое нарушение киральной симметрии в схеме с ультрафиолетовым обрезанием

Приведенные выше построения, основанные на асимптотическом решении дифференциального уравнения (19) и условии нормировки (21), являются, по сути, лишь наводящими соображениями. Для более полной мотивации нашего основного утверждения о существовании фазы со спонтанно нарушенной киральной симметрией в многомерной электродинамике мы, следуя методу Боголюбова решения задач со спонтанным нарушением симметрии, рассмотрим решение задачи с явным нарушением киральной симметрии, а затем перейдем к киральному пределу, т.е. введем в лагранжиан (1) массовый член $m_0\bar{\psi}\psi$ с "затравочной" массой m_0, и после решения соответствующей асимптотической граничной задачи устремим m_0 к нулю, т.е. восстановим киральную инвариантность лагранжиана. Критерием ДНКС будет при этом отличие от нуля массового оператора в киральном пределе

$$\lim_{m_0 \to 0} \Sigma \neq 0.$$

Введние затравочной массы m_0 приводит к модификации неоднородного члена в уравнении (18): $-i\hat{\partial} \to (m_0 - i\hat{\partial})$, но не изменяет дифференциального уравнения (19), поскольку неоднородный член исчезает при умножении на $(x^2)^{D/2-1}$. Роль затравочной массы сводится к модификации граничных условий. Для вывода и учета этих граничных условий необходимо обратиться к интегральному уравнению в импульсном пространстве. Интегральное уравнение для массового оператора в евклидовом импульсном пространстве для линеаризованной версии рассматриваемой модели имеет вид

$$\Sigma(p^2) = m_0 + e^2 \frac{D-1}{(2\pi)^D} \int d^D q \frac{\Sigma(q^2)}{q^2} \frac{1}{(p-q)^2}. \qquad (26)$$

Здесь Σ — перенормированный массовый оператор; e^2 — перенормированный заряд. Затравочная масса m_0 (в определение которой входят константа перенормировки волновой функции и контрчлен перенормировки массы (подробнее см. в [6])) есть функция параметра регуляризации.

Для интегрирования по углам воспользуемся формулой [10]

$$J_D \equiv \int d^D q \frac{f(q^2)}{(p-q)^2} = \frac{\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \int dq^2 (q^2)^{D/2-1} f(q^2) \int_0^\pi d\theta \frac{\sin^{D-2}\theta}{p^2+q^2-2|p||q|\cos\theta}.$$

При $D=4$

$$J_4 = \pi^2 \int dq^2 q^2 f(q^2) \left(\frac{1}{p^2}\theta(p^2-q^2) + \frac{1}{q^2}\theta(q^2-p^2) \right)$$

и при $D=6$

$$J_6 = \frac{\pi^3}{6} \int dq^2 (q^2)^2 f(q^2) \left(\frac{1}{p^2}\left(3-\frac{q^2}{p^2}\right)\theta(p^2-q^2) + \frac{1}{q^2}\left(3-\frac{p^2}{q^2}\right)\theta(q^2-p^2) \right).$$

Опять рассмотрим сначала четырехмерный случай. В схеме с ультрафиолетовым обрезанием интегральное уравнение для массового оператора при $D=4$ имеет вид

$$\Sigma(p^2) = m_0 + \frac{3\alpha}{4\pi} \int^{\Lambda^2} dq^2 \Sigma(q^2) \left(\frac{1}{p^2}\theta(p^2-q^2) + \frac{1}{q^2}\theta(q^2-p^2) \right). \tag{27}$$

Из этого уравнения следует граничное условие при $p^2=\Lambda^2$ (мы будем называть его ультрафиолетовым условием)

$$\frac{d}{dp^2}\left(p^2\Sigma(p^2)\right)\Big|_{p^2=\Lambda^2} = m_0. \tag{28}$$

Другое граничное условие (при малых p^2) не содержит параметра m_0 и не играет роли в наших построениях. Интегральное уравнение (27) сводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}\left(p^2\Sigma(p^2)\right) = -\frac{3\alpha}{4\pi}\frac{\Sigma(p^2)}{p^2}. \tag{29}$$

Легко видеть, что оно совпадает с уравнением (19) при $k=1$ ($D=4$).

Рассмотрим докритический случай $\alpha < \pi/3$. В этом случае общее решение уравнения (29) есть

$$\Sigma = C_1(p^2)^a + C_2(p^2)^{-a-1},$$

причем $-1/2 < a < 0$.

Предположим сначала, что $C_1 \neq 0$. Тогда из условия (28) мы видим, что для устранения зависимости решения от параметра обрезания Λ необходимо произвести перенормировку затравочной массы вида

$$m_0(\Lambda) = \mu\Big(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\Big)^a, \tag{30}$$

откуда получаем $C_1 = \frac{\mu^{1-2a}}{a+1}$. Из формулы (30) следует, что в киральном пределе $\mu \to 0$, и, следовательно, $C_1 = 0$. Если же $C_1 = 0$, то перенормировка затравочной массы производится по формуле

$$m_0(\Lambda) = \mu\Big(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\Big)^{-a-1},$$

и условие (28) дает нам $C_2 = -\mu^{3+2a}/a$, и снова в киральном пределе $\mu \to 0$, и, значит, $C_2 = 0$. Итак, учет ультрафиолетового граничного условия (28) в докритической области приводит нас к отсутствию нетривиальных решений в киральном пределе.

В критической области $\alpha \geq \pi/3$ общее решение уравнения (29) дается формулой (20). Граничные условия (28) тогда приводят к следующей формуле перенормировки массы:

$$m_0(\Lambda) = \frac{\mu^2}{2\Lambda}\left(\sin\left(\frac{\omega}{2}\log\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) + \omega\cos\left(\frac{\omega}{2}\log\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)\right).$$

При выполнении условия

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\omega}{2}\log\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) = -\omega \tag{31}$$

в киральном пределе существует нетривиальное решение, соответствующие состоянию с ДНКС,

$$\Sigma = \frac{\mu^2}{\sqrt{p^2}}\sin\left(\frac{\omega}{2}\log\frac{p^2}{M^2}\right).$$

После нормировки этого решения на физическую массу m в псевдоевклидовом пространстве мы возвращаемся к нормированному решению (23).

Мы видим, что важнейшим свойством решения в критической области $\alpha > \pi/3$, обеспечивающим существование решения с ДНКС, является его осциллирующий характер.

В шестимерном пространстве интегральное уравнение для массового оператора имеет вид

$$\Sigma(p^2) = m_0 + \frac{5\alpha}{6(4\pi)^2}\int^{\Lambda^2} dq^2\, q^2\Sigma(q^2)\left(\frac{1}{p^2}\left(3-\frac{q^2}{p^2}\right)\theta(p^2-q^2) + \frac{1}{q^2}\left(3-\frac{p^2}{q^2}\right)\theta(q^2-p^2)\right). \tag{32}$$

Ультрафиолетовые граничные условия, следующие из этого интегрального уравнения, имеют вид

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2}\left((p^2)^2\Sigma(p^2)\right)\Bigg|_{p^2=\Lambda^2} = 2m_0, \tag{33}$$

$$\frac{d^3}{d(p^2)^3}\left((p^2)^2\Sigma(p^2)\right)\Bigg|_{p^2=\Lambda^2} = 0. \tag{34}$$

Дифференциальное уравнение, к которому сводится уравнение (32), после соответствующих переобозначений совпадает с уравнением (24). С учетом условия $\Sigma^2 \leq p^2$ асимптотическое решение имеет вид

$$\Sigma \approx (p^2)^{-7/8}(C_1\cos(\kappa\sqrt{|p|}+\phi) + C_2\exp(-\kappa\sqrt{|p|})),$$

где $\kappa = 2(5\alpha/\pi^2)^{1/4}$.

Граничные условия (33) и (34) дают нам соотношения

$$C_2 = C_1 e^{\kappa\sqrt{\Lambda}}\sin(\kappa\sqrt{\Lambda}+\phi) \tag{35}$$

и

$$\left(\frac{\kappa}{4}\right)^2\Lambda^{-3/4}C_1(\sin(\kappa\sqrt{\Lambda}+\phi) - \cos(\kappa\sqrt{\Lambda}+\phi)) = 2m_0.$$

Следовательно, перенормировка массы производится по формуле

$$m_0 = \mu\Big(\frac{\mu}{\Lambda}\Big)^{3/4}(\sin(\kappa\sqrt{\Lambda}+\phi) - \cos(\kappa\sqrt{\Lambda}+\phi)),$$

и при выполнении условия

$$\mathrm{tg}(\kappa\sqrt{\Lambda}+\phi) = 1, \tag{36}$$

так же как и в критической области четырехмерной теории, существует нетривиальное решение в киральном пределе $m_0 = 0$, соответствующее ДНКС.

Аналитическое продолжение в псевдоевклидову область и условие нормировки (21) дают нам соотношения, связывающие константы C_1, C_2 и ϕ с физической массой m. Эти соотношения имеют вид

$$\begin{cases} \frac{1}{2}C_1 e^{\kappa\sqrt{\frac{m}{2}}}\cos\Big(\kappa\sqrt{\frac{m}{2}}+\phi\Big) + C_2 e^{-\kappa\sqrt{\frac{m}{2}}}\cos\Big(\kappa\sqrt{\frac{m}{2}}\Big) = m^{11/4}\cos\frac{7\pi}{8}, \\ \frac{1}{2}C_1 e^{\kappa\sqrt{\frac{m}{2}}}\sin\Big(\kappa\sqrt{\frac{m}{2}}+\phi\Big) + C_2 e^{-\kappa\sqrt{\frac{m}{2}}}\sin\Big(\kappa\sqrt{\frac{m}{2}}\Big) = -m^{11/4}\sin\frac{7\pi}{8}. \end{cases}$$

Используя условие (36) и формулу (35), можно показать, что в области применимости всех наших построений $C_2 e^{-\kappa\sqrt{\frac{m}{2}}} \ll C_1 e^{\kappa\sqrt{\frac{m}{2}}}$. Действительно, с помощью (36) и (35) можно исключить из приведенных соотношений коэффициенты C_1 и C_2 и получить следующее уравнение на фазу:

$$\sin x = -\sqrt{2}\sin x_0\, e^{-x_0 - x}. \tag{37}$$

Здесь введены обозначения

$$x_0 = \kappa\sqrt{\frac{m}{2}} - \frac{\pi}{8},$$
$$x = \phi + x_0 + \pi l,$$

где l — целое число, связанное решением условия (36): $\kappa\sqrt{\Lambda}+\phi = \pi/4 + \pi l$. В асимптотической области решение уравнения (37) имеет вид

$$x \approx \pi n,$$

где n — целое *положительное* число. С учетом (36) и (35) получаем

$$C_2 e^{-\kappa\sqrt{\frac{m}{2}}} \approx \frac{C_1}{\sqrt{2}} e^{\pi/8 - \pi n}\cos\pi l \ll C_1 e^{\kappa\sqrt{\frac{m}{2}}}.$$

Пренебрегая на основании доказанного соотношения в условии нормировки членами, содержащими C_2, мы снова приходим к формуле (25) для массового оператора в евклидовой области.

Заключение

Приведенные выше результаты демонстрируют существование феномена ДНКС в шестимерной квантовой электродинамике. Некоторые детали этого явления нуждаются в уточнении и дальнейшем исследовании. Так, например, не вполне ясно, что происходит в шестимерном случае при снятии обрезания. В четырехмерной лестничной КЭД согласно результатам исследований, суммированных в монографии [3], при снятии обрезания в сверхкритической области $\alpha \to \alpha_c$, т.е. перенормированная КЭД в режиме сильной связи существует лишь при критической константе связи. Если действовать по аналогии с четырехмерной теорией, то в шестимерном случае при снятии обрезания $\alpha \to 0$ (но при этом явление ДНКС остается, т.е. электрон обретает массу). В связи с этим возникает неизбежный (как, впрочем, и в четырехмерном случае) вопрос о тривиальности теории. Решение этих проблем требует исследования уравнения Бете-Солпитера для связанных состояний, т.е. в терминах нашего разложения — исследования уравнений следующего шага итераций.

В заключение кратко коснемся многомерной КЭД для числа измерений, большего чем шесть. Уравнение (19) имеет осциллирующие асимптотические решения при любых четных $D \geq 6$, что дает основания предполагать существование явления ДНКС для любой четной размерности пространства-времени, большей четырех.

Автор признателен Г.Г.Волкову за стимулирующие обсуждения.

Список литературы

[1] Maskawa T. and Nakajima H.// Prog.Theor.Phys. **52** (1974) 1326.

[2] Fomin P.I., Gusynin V.P., Miransky V.A. and Sitenko Yu.A.// Riv.Nuo.Cim. **6** (1983) 1.

[3] Miransky V.A. "Dynamical Symmetry Breaking in Quantum Field Theories", Singapore, World Scientific, 1993.

[4] Рубаков В.А.// УФН **171** (2001) вып. 9; hep-ph/0104152

[5] Rochev V.E.// J.Phys. A **30** (1997) 3671.

[6] Rochev V.E.// J.Phys. A **33** (2000) 7379.

[7] Zinn-Justin J. "Quantum Field Theory and Critical Phenomena", Oxford, Clarendon Press, 1993.

[8] Atkinson D. and Johnson P.W.// J.Math.Phys. **28** (1987) 2488;
Gusynin V.P.// Mod.Phys.Letters **A5** (1990) 133.

[9] Meijer C.S.// Proc.Kon.Nederl.Akad.v.Wetensch. **A49** (1946) 227, 344, 457, 632, 765, 936, 1063, 1165;
Бейтмен Г., Эрдейи А. "Высшие трансцендентные функции", т.1, М.: Наука, 1973.

[10] Градштейн И.С., Рыжик И.М. "Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений". М.: Наука, 1971.

Рукопись поступила 12 октября 2001 года

В.Е. Рочев
О динамическом нарушении киральной симметрии в квантовой электродинамике.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы **LaTeX.**
Редактор Н.В.Орлова

Подписано к печати 19.10.2001. Формат $60 \times 84/8$.
Офсетная печать. Печ.л. 1,37. Уч.-изд.л. 1,1. Тираж 130. Заказ 165.
Индекс 3649. ЛР т020498 17.04.97.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 2001–40, И Ф В Э, 2001