ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2003–10
ОТФ

М.Л. Некрасов

ИНТЕГРАЛ В СМЫСЛЕ ГЛАВНОГО ЗНАЧЕНИЯ КАК ОБОБЩЕННАЯ ФУНКЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Направлено в *ТМФ*

Протвино 2003

УДК 539.1.01 М–24

Аннотация

Некрасов М.Л. Интеграл в смысле главного значения как обобщенная функция параметров интегрирования: Препринт ИФВЭ 2003–10. – Протвино, 2003. – 14 с., библиогр.: 14.

Интеграл в смысле главного значения от сингулярной функции или от произведения сингулярных функций в некоторой области значения параметров интегрирования сам может оказаться сингулярной функцией. В этом случае при необходимости последующего интегрирования по параметрам возникает проблема интерпретации исходного интеграла как обобщенной функции параметров интегрирования. Предлагается решение проблемы, инициированное актуальными приложениями квантовой теории поля.

Abstract

Nekrasov M.L. Integral in the Sense of Principal Value as a Distribution Over Parameters of Integration: IHEP Preprint 2003–10. – Protvino, 2003. – p. 14, refs.: 14.

An integral in the sense of principal value of a singular function or of product of singular functions can appear itself as a singular function in some range of values of integration parameters. In this case, if necessary subsequently to integrate with respect to parameters, the problem arises about interpretation of the initial integral as a distribution over the integration parameters. A solution to this problem is offered, which is initiated by actual applications in quantum field theory.

Введение

Во многих приложениях квантовой теории поля приходится иметь дело с интегралами, определенными в несобственном смысле. Классическим примером являются интегралы фейнмановских диаграмм, в которых пропагаторы частиц определены (в пространстве Минковского) с правилами обхода сингулярностей на массовой оболочке. С включением петлевых поправок в таких интегралах появляются также ультрафиолетовые расходимости. Последовательное и математически выверенное решение проблемы их "устранения" основано на представлении о расширении линейных непрерывных функционалов, каковыми являются коэффициентные функции S-матрицы [1], с класса быстро убывающих на бесконечности функций на класс произвольных регулярных функций. В сущности, решение основано на применении методов теории обобщенных функций [2,3,4,5]. Впервые идея такого подхода к решению проблемы ультрафиолетовых расходимостей была выдвинута Н.Н. Боголюбовым [6] и впоследствии была им реализована совместно с О.С. Парасюком [7], и далее многими другими авторами (см. библиографию и подробное изложение вопроса в монографии [1]).

Важным свойством решения проблемы ультрафиолетовых расходимостей является возникновение в теории свободных конечных параметров (в перенормируемых теориях абсорбируемых перенормированными константами). С точки зрения теории обобщенных функций, указанное свойство является совершенно естественным, поскольку оно связано с операцией расширения функционалов. Тем не менее, решение теми же методами многих других задач удается осуществить с последующим избавлением от произвола. Сделать это удается тогда, когда в процессе решения задачи появляется необходимость наложить дополнительное условие (условия). Хорошо известным примером такого рода является определение пропагатора частицы в пространстве Минковского, в котором правило обхода сингулярности на массовой оболочке фиксируется условием причинности. В специфических приложениях теории поля снятие произвола может быть осуществлено также путем наложения условия самосогласованности решения (см. нетривиальный пример в [8]).

Среди задач, решение которых основано на расширении линейных непрерывных функционалов и в которых, тем не менее, удается избавиться от произвола, особое место занимают задачи, связанные с асимптотическим разложением по параметру в интегралах, определяющих какую-либо величину (например, амплитуду или вероятность физического процесса). Действительно, если разложение осуществляется до вычисления интеграла, т.е. под знаком интеграла, то оно может привести к возникновению сингулярных функций, не интегрируемых в обычном смысле. В этом случае для придания смысла расходящимся интегралам может быть привлечена теория расширения функционалов (теория обобщенных функций). Однако, в отличие от случая перенормировок, возникающий при этом произвол должен быть полностью устранен, поскольку исходный интеграл до разложения был хорошо определен (по нашему предположению) и его разложение не содержало никаких неопределенностей[1]. Общий рецепт снятия произвола в таких задачах изложен в [9]. Однако в некоторых сложных случаях, включающих вычисление последовательных интегралов, его оказывается недостаточно. Например, метод работ [9] не позволяет определить разложение интеграла по параметру, если в результате интеграл сам становится сингулярной функцией по другим параметрам, которые, в свою очередь, рассматриваются как переменные последующего интегрирования.

Ситуация становится еще более сложной, если под знаком интеграла возникает произведение сингулярных функций. Именно такая ситуация реализуется в случае парного (множественного) рождения и распада нестабильных частиц, когда процесс описывается с использованием разложения по константе связи брейт-вигнеровских факторов, стоящих в вероятности (не в амплитуде) [10,11,12]. Как было отмечено в [12], в этом случае уже в третьем порядке разложения возникает произведение членов с прескрипцией главного значения (VP), придание смысла которому является нетривиальной задачей.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы разобраться в указанной выше ситуации. В более узком смысле усилия будут направлены на то, чтобы придать смысл таким выражениям, как интеграл в смысле VP от сингулярной функции или от произведения сингулярных функций, в случае, когда интеграл сам является сингулярной функцией параметров, по которым должно быть выполнено интегрирование. Проблема снятия произвола, возникающего при доопределении таких интегралов, будет решаться путем наложения очень простых дополнительных условий, заведомо выполняющихся в реальных приложениях, стоящих за данной работой. (Анализ проблемы и проведение вычислений непосредственно в контексте упомянутых приложений см. в последующих работах автора.)

Структура работы следующая. В первом разделе мы найдем решение проблемы определения интеграла в случае, когда подынтегральная функция содержит одиночную сингулярность, регуляризованную в смысле VP, и сам интеграл является сингулярной функцией параметров интегрирования. Раздел 2 посвящен доопределению интеграла, содержащего произведение двух VP-сингулярностей. В разделе 3 мы демонстрируем эффективность разработанных методов на конкретном нетривиальном примере вычисления интеграла. В разделе 4 мы получим обобщение результатов на случай произведения трех, четырех и большего числа VP-сингулярностей в подынтегральной функции. В Заключении указываются основные результаты работы.

---

[1] Задача асимптотического разложения под знаком интеграла возникает в тех случаях, когда по техническим причинам интеграл не может быть вычислен, но требуется именно разложение интеграла по параметру.

1. Интеграл от одиночного *VP*-полюса как обобщенная функция параметров интегрирования

Рассмотрим интеграл от VP с переменным (верхним) пределом интегрирования:

$$F_n(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \mathrm{d}x \; VP\frac{1}{x^n}\; u(x,y)\,. \tag{1}$$

Здесь $u(x,y)$ — весовая функция, обычно называемая основной [2,3,4,5]. Предполагается, что по обоим аргументам она отлична от нуля только в ограниченной области пространства, а также конечна и дифференцируема нужное число раз.

При помощи формулы для главного значения полюса степени n,

$$VP\frac{1}{x^n} = \frac{(-)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\ln(|x|)\,, \tag{2}$$

рассматриваемой вкупе с предписанием брать интеграл методом “интегрирования по частям” [3,4,5], получим

$$F_n(y) = \tag{3}$$
$$\frac{1}{(n-1)!}\left[-\int\limits_{-\infty}^{y}\mathrm{d}x\;\ln(|x|)\,u^{(n)}(x,y) + \ln(|y|)\,u^{(n-1)}(y,y) - \sum_{k=1}^{n-1}(k-1)!\,\frac{1}{y^k}\,u^{(n-k-1)}(y,y)\right].$$

Здесь $u^{(k)}(x,y) \equiv \partial^k/\partial x^k\, u(x,y)$,
$u^{(k)}(y,y) \equiv \partial^k/\partial x^k\, u(x,y)_{|x=y}$.

Выражение (3) определяет функцию $F_n(y)$ при любом $y \neq 0$. В точке $y = 0$ значение $F_n(y)$ не определено, поскольку при $n = 1$ выражение (3) содержит логарифмическую особенность, а при $n > 1$ — степенную. Соответственно, при $n = 1$ функция $F_n(y)$ интегрируема в окрестности $y = 0$, а при $n \geq 2$ она не является таковой в обычном смысле. Тем не менее, толкование функции $F_n(y)$ может быть расширено таким образом, чтобы она стала интегрируемой в смысле обобщенных функций. Необходимость в такой операции возникает, если в контексте рассматриваемой задачи функция $F_n(y)$ должна быть далее проинтегрирована по y.

Рецептурно решение вопроса о расширении толкования функции, содержащей полюс по переменной интегрирования, сводится к тому, что полюс следует понимать в смысле главного значения, но одновременно к нему должен быть добавлен функционал, сосредоточенный в точке сингулярности полюса. Указанный функционал должен представлять собой сумму дельта-функции и ее производных с произвольными коэффициентами таким образом, чтобы степень старшей производной дельта-функции была на единицу меньше степени сингулярности полюса [4] (степень старшей производной определяется числом необходимых вычитаний в основной функции, после которых интеграл становится определенным в обычном смысле). В случае формулы (3) решение состоит в замене каждого полюса $1/y^k$ на $VP\,(1/y^k) + \sum_{l=0}^{k-1} C_l\,\delta^{(l)}(y)$, где C_l — коэффициенты, описывающие параметрический произвол.

Далее мы покажем, что произвол в формуле (3), возникающий при доопределении полюсов, может быть полностью устранен путем наложения требования независимости результата интегрирования от порядка вычисления повторных интегралов. В сущности, это требование означает эквивалентность результата повторного интегрирования результату кратного интегрирования. (Разумеется, указанное требование нельзя рассматривать как единственно возможное. Но оно естественно возникает при решении достаточно широкого круга задач.)

Итак, обратимся к исходной формуле (1) и рассмотрим функционал $\widetilde{\mathcal{F}}_n[u]$, заданный формулой повторного интегрирования:

$$\widetilde{\mathcal{F}}_n[u] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{y} \mathrm{d}x \, VP\frac{1}{x^n} \, u(x,y) \,. \tag{4}$$

Наша задача — *определить* этот функционал таким образом, чтобы он был равен кратному интегралу[2]

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, VP\frac{1}{x^n} \, \theta(y-x) \, u(x,y) \,, \tag{5}$$

или же функционалу, определенному подобным образом, но с противоположным порядком повторного интегрирования:

$$\mathcal{F}_n[u] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, VP\frac{1}{x^n} \, \int_{x}^{\infty} \mathrm{d}y \, u(x,y) \,. \tag{6}$$

Следует подчеркнуть, что в отличие от (4) функционал (6) является хорошо определенным, поскольку интеграл по $\mathrm{d}y$ в формуле (6) определяет функцию из пространства основных функций одного переменного, если $u(x,y)$ принадлежит пространству основных функций двух переменных.

Воспользовавшись определением главного значения (2), получим после проведения очевидных вычислений

$$\mathcal{F}_n[u] = -\frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \ln(|x|) \left\{ \int\limits_{x}^{\infty} \mathrm{d}y \, \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} u(x,y) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \left[\frac{\partial^{\,n-k-1}}{\partial x^{n-k-1}} \, u(x,y) \right]_{|y=x} \right\}. \tag{7}$$

В формуле (7) все интегралы понимаются в собственном смысле и сходятся. Поэтому мы можем поменять порядок интегрирования в первом слагаемом. Во втором слагаемом введем переобозначение x на y. В результате получим

$$\mathcal{F}_n[\phi] = -\frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \left\{ \int\limits_{-\infty}^{y} \mathrm{d}x \, \ln(|x|) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} u(x,y) - \ln(|y|) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}y^k} \left[\frac{\partial^{\,n-k-1}}{\partial x^{n-k-1}} \, u(x,y) \right]_{|x=y} \right\}. \tag{8}$$

[2]Введение формулы (5) можно рассматривать как эвристический прием, полезный для перехода к формуле (6). Тем не менее, выражению (5) можно придать и вполне определенный математический смысл. Действительно, поскольку сингулярную обобщенную функцию можно представить в виде несобственного предела по параметру от обычной функции, интеграл в формуле (5) можно трактовать как обычный кратный интеграл, после вычисления которого подразумевается предельный переход. Формулы (5) и (6) с точки зрения такого подхода являются эквивалентными. Вместе с этим функционал (4) остается неопределенным, поскольку снятие “промежуточной регуляризации” (осуществление предельного перехода) до вычисления интеграла по $\mathrm{d}y$ приводит к бессмысленному выражению. В сущности, мы доопределяем функционал (4) путем наложения требования снятия “промежуточной регуляризации” после вычисления *всех* повторных интегралов.

С учетом (2) последнюю формулу можно представить также в виде

$$\mathcal{F}_n[\phi] \;=\; -\;\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\left\{\int\limits_{-\infty}^{y}\mathrm{d}x\;\ln(|x|)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\phi(x,y)\right.$$
$$\left.-\;\ln(|y|)\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\;\phi(x,y)_{|x=y}+\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)!\;VP\frac{1}{y^k}\;\frac{\partial^{\,n-k-1}}{\partial x^{n-k-1}}\;\phi(x,y)_{|x=y}\right\}. \tag{9}$$

Нетрудно увидеть, что выражение в фигурных скобках в (9) совпадает с выражением, стоящим в правой части формулы (3) с заменой полюсов просто на VP от полюсов и без добавления δ-функций и ее производных.

Итак, мы показали, что требование независимости результата повторного интегрирования VP от порядка вычисления интегралов (требование эквивалентности повторного и кратного интегрирования) приводит к тому, что полюса, возникающие при выполнении первого интегрирования в повторном интеграле, следует понимать в смысле главного значения. В случае, когда оба предела интегрирования являются переменными и когда VP записывается со сдвинутым аргументом, нетрудно получить следующую общую формулу:

$$\int\limits_a^b \mathrm{d}x\;VP\frac{1}{(x-y)^n}\;u(x,\ldots)=$$
$$\frac{1}{(n-1)!}\left\{-\int\limits_a^b\mathrm{d}x\;\ln(|x-y|)\,u^{(n)}(x,\ldots)+\ln(|b-y|)\,u^{(n-1)}(b,\ldots)-\ln(|a-y|)\,u^{(n-1)}(a,\ldots)\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)!\left[VP\frac{1}{(b-y)^k}\,u^{(n-k-1)}(b,\ldots)-VP\frac{1}{(a-y)^k}\,u^{(n-k-1)}(a,\ldots)\right]\right\}. \tag{10}$$

Здесь $u(x,\ldots)\equiv u(x,y,a,b)$ и верхний индекс в скобках при u означает частную производную соответствующего порядка по первому аргументу. В случае, когда следующее интегрирование выполняется по $\mathrm{d}y$, формулу (10) удобно записать в виде

$$\int\limits_a^b \mathrm{d}x\;VP\frac{1}{(x-y)^n}\;u(x,\ldots)=-\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^b\mathrm{d}x\;\ln(|x-y|)\,u^{(n)}(x,\ldots)$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}y^k}\;\ln(|b-y|)\,u^{(n-k-1)}(b,\ldots)-\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}y^k}\ln(|a-y|)\,u^{(n-k-1)}(a,\ldots)\right]. \tag{11}$$

Здесь производные по y понимаются в смысле обобщенных функций, т.е. они должны быть переброшены по правилу “интегрирования по частям” при последующем интегрировании по y.

Формулы (10) и (11) допускают различные варианты написания в разных специальных частных случаях. Например, если в основной функции u зависимость от y может быть выделена в виде отдельного фактора $\phi(y)$, то имеет место следующая простая формула:

$$\int\limits_a^b \mathrm{d}x\;VP\frac{1}{(x-y)^n}\;u(x,a,b)\,\phi(y)=-\frac{1}{(n-1)!}\;\phi(y)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n}\int\limits_a^b\mathrm{d}x\;\ln(|x-y|)\,u(x,a,b)\,. \tag{12}$$

Здесь производные по y понимаются опять в смысле обобщенных функций. В справедливости формулы (12) можно убедиться путем сравнения результата, возникающего в результате применения (11) к левой части формулы, с тем результатом, который возникает в правой части (12) после сдвижки переменной интегрирования $x \to x+y$ и выполнения далее прямых вычислений как в обычным интеграле.

Другим важным следствием формулы (10) является случай, когда функция u не зависит от переменной x в пределах интегрирования $(a \ldots b)$. В этом случае при $n=1$ получим

$$\int_a^b \mathrm{d}x \; VP\frac{1}{x-y}\; u(y,a,b) = u(y,a,b)\Big[\ln(|b-y|) - \ln(|a-y|)\Big]. \tag{13}$$

При $n \geq 2$ получим

$$\int_a^b \mathrm{d}x \; VP\frac{1}{(x-y)^n}\; u(y,a,b) = -\,\frac{u(y,a,b)}{n-1}\left[VP\frac{1}{(b-y)^{n-1}} - VP\frac{1}{(a-y)^{n-1}}\right]. \tag{14}$$

Напомним еще раз, что в формулах (10)-(14) величины y, a, b (или, по крайней мере, некоторые из них) рассматриваются как переменные последующего интегрирования, а не как параметры. В случае, если указанные величины рассматриваются как параметры, символ VP в правых частях указанных формул должен быть опущен, и полученные формулы имеют смысл только при несовпадающих аргументах, встречающихся под знаком логарифма и/или в полюсах.

2. Произведение двух *VP*

Рассмотрим теперь интеграл с более сложной структурой, а именно, содержащий произведение двух VP-полюсов:

$$\int_a^b \mathrm{d}x \; VP\frac{1}{(x-z_1)^{n_1}}\; VP\frac{1}{(x-z_2)^{n_2}}\; u(x,\ldots)\,. \tag{15}$$

К сожалению, формулы предыдущего раздела не позволяют придать смысл выражению (15), поскольку при $z_1 = z_2$ неопределенным оказывается само подынтегральное выражение, содержащие произведение сингулярных функций. Тем не менее, *метод* предыдущего раздела, в принципе, может быть применен и в этой ситуации. Действительно, мы можем сначала определить интеграл (15) в предположении, что z_1 и z_2 являются параметрами интегрирования не равными друг другу. В результате получим сингулярную функцию z_1 и z_2. Далее, мы можем расширить ее толкование в смысле обобщенных функций. Для снятия возникающего при этом произвола перейдем к последовательному интегралу тройной кратности, включающему интегрирование по z_1 и z_2, и определим его путем наложения условия независимости результата от порядка интегрирования. (Следует воспользоваться тем свойством, что интеграл хорошо определен, если сначала выполняется интегрирование по z_1 и z_2, и только затем по x.)

Указанный способ, однако, в случае двух полюсов оказывается слишком громоздким и едва ли может быть оправданным, особенно если под знаком интеграла встречается большее число VP. Поэтому воспользуемся "обходным маневром", основанным на независимом доопределении произведения двух VP. (Подчеркнем еще раз, что необходимость обращения к интегралу (15), а не сразу к тройному интегралу с другим порядком интегрирования, объясняется тем, что в некоторых приложениях именно такой порядок интегрирования обеспечивает решаемость задачи.)

Рассмотрим сначала случай $n_1 = n_2 = 1$, и рассмотрим при $x \neq z_1$, $x \neq z_2$, $z_1 \neq z_2$ следующую формулу с простыми полюсами, понимаемыми в смысле элементарных функций:

$$\frac{1}{x-z_1}\,\frac{1}{x-z_2} \;=\; \frac{1}{z_1-z_2}\left[\frac{1}{x-z_1}-\frac{1}{x-z_2}\right]. \tag{16}$$

Выражения в правой и левой частях формулы (16) можно считать также функционалами, определенными на пространстве основных функций, обращающихся в нуль при совпадении любой пары аргументов. На таком пространстве между обоими функционалами по-прежнему существует равенство (16).

Поставим теперь задачу о расширении функционалов на все пространство основных функций. Решение проведем в два этапа. Сначала доопределим каждый из полюсов по отдельности путем приписывания ему VP и добавления соответствующей δ-функции с произвольным коэффициентом. Далее доопределим произведение VP-полюсов. Для решения этой второй задачи воспользуемся тем замечательным свойством формулы (16), что левая ее часть может быть естественно определена как произведение двух VP, если сначала подразумевается интегрирование по $\mathrm{d}z_1$ и/или $\mathrm{d}z_2$ и только потом по $\mathrm{d}x$, а правая часть с приписанным VP к каждому полюсу определена наоборот при условии, что сначала предполагается интегрирование по $\mathrm{d}x$. Назовем порядок интегрирования регулярным, если он совпадает с указанным выше, и нерегулярным в противном случае. В результате получаем, что правая часть формулы может служить определением ее левой части при нерегулярном порядке интегрирования, а левая часть формулы в аналогичном случае может служить определением ее правой части. В обоих случаях операцию приравнивания одной части формулы к другой следует трактовать как расширение линейного непрерывного функционала. Как указывалось выше, такая операция не является однозначной и может иметь определенный смысл только с точностью до добавления функционала, сосредоточенного в точке сингулярности (неопределенности) исходного нерасширенного функционала. В нашем случае это означает необходимость добавления произведения двух δ-функций с произвольным коэффициентом к одной из частей получающегося соотношения[3]. Ниже мы указываем результат, полученный с учетом симметрии при прочтении формулы слева направо:

$$\begin{aligned} VP\frac{1}{x-z_1}\;VP\frac{1}{x-z_2} \;\underset{def}{=}\; & VP\frac{1}{z_1-z_2}\left[VP\frac{1}{x-z_1}-VP\frac{1}{x-z_2}\right] \\ & +VP\frac{C_1}{z_1-z_2}\left[\delta(x-z_1)-\delta(x-z_2)\right]+C_2\,\delta(x-z_1)\delta(x-z_2)\,. \end{aligned} \tag{17}$$

[3]Изложение общей теории вопроса о расширении линейных непрерывный функционалов (о регуляризации сингулярных функций), а также иллюстрации многочисленными примерами можно найти в [4] и [5]. В контексте рассматриваемой здесь задачи уместно сравнение с теорией перенормировок в теории поля: замена простых полюсов на VP от полюсов и добавление к ним δ-функции соответствует удалению расходимостей и возникновению произвола в процессе перенормировки во "внутренних" частях диаграммы; доопределение произведения двух VP и добавление произведения δ-функций соответствует удалению расходимостей и появлению произвола "поверхностного" типа (см. §29 монографии [1]).

Здесь необходимо сделать следующие замечания. Во-первых, мы не указали вклад δ-функции, добавленной к $VP(z_1-z_2)^{-1}$ в правой части формулы, поскольку он обращается в нуль в силу зануления выражения в квадратных скобках при $z_1 = z_2$. Во-вторых, мы не указали также явно вклады δ-функций, добавленных к одиночным полюсам в левой части(17), поскольку в силу симметрии структура соответствующих вкладов совпадает со структурой второго члена в правой части формулы и, следовательно, упомянутые вклады поглощается указанным вторым членом в правой части формулы. Наконец, произведение δ-функций в правой части (17) мы полагаем определенным таким образом, что результат его интегрирования не зависит от последовательности вычисления интегралов. Указанное требование подразумевает, что $\delta(x-z_1)\delta(x-z_2) = \delta(z_1-z_2)\delta(x-z_2) = \delta(z_1-z_2)\delta(x-z_1)$. При этом условии формула (17) может быть прочтена в обратном направлении, т.е. справа налево, и в этом случае все члены с δ-функциями переносится в левую часть соотношения.

Значение коэффициента C_1 в формуле (17) можно определить путем наложения условия самосогласованности формулы при рекурсивном ее использовании. А именно, потребуем неизменности вида формулы при раскрытии квадратных скобок в правой ее части и доопределении возникающих произведений VP при помощи самой же формулы (17). В результате получим

$$C_1 = 0\,. \tag{18}$$

Значение коэффициента C_2 при этом остается неопределенным, т.е. его не удается зафиксировать, исходя из соображений симметрии. Таким образом, определение C_2 возможно только путем наложения какого-либо дополнительного условия. В качестве такого условия наложим требование независимости результата интегрирования от порядка вычисления повторных интегралов от правой части формулы (17). В случае нерегулярного порядка интегрирования это условие позволит зафиксировать значение коэффициента C_2 путем приравнивая результата к результату, полученному при регулярном порядке вычисления интегралов. Проще всего это сделать на основе прямых вычислений, проведенных при каком-либо специальном выборе основной функции. Простейшим выбором является интеграл с единичной весовой функцией, определенный в конечных пределах.

Итак, рассмотрим следующий последовательный интеграл тройной кратности:

$$\mathcal{I}_{x,z_1,z_2} = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^1 \mathrm{d}z_1 \int\limits_0^1 \mathrm{d}z_2 \; VP\frac{1}{x-z_1}\; VP\frac{1}{x-z_2}\,. \tag{19}$$

Прямое его вычисление с использованием (13) приводит к результату

$$\mathcal{I}_{x,z_1,z_2} = \frac{1}{3}\,\pi^2\,. \tag{20}$$

С другой стороны, опять же путем прямых вычислений нетрудно получить

$$\mathcal{I}_{z_1,z_2,x} = \int\limits_0^1 \mathrm{d}z_1 \int\limits_0^1 \mathrm{d}z_2 \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \; VP\frac{1}{z_1-z_2}\left[VP\frac{1}{x-z_1} - VP\frac{1}{x-z_2}\right] = -\frac{2}{3}\,\pi^2\,. \tag{21}$$

Отсюда и из формулы (17) заключаем, что

$$C_2 = \pi^2\,. \tag{22}$$

Результат (22) может быть получен также на основе несколько искусного манипулирования с формулой Сохоцкого. Действительно, рассмотрим произведение двух простых полюсов с “причинным” правилом обхода (см. ниже, формулу (23)). Такое произведение хорошо определено на рассматриваемом нами пространстве основных функций [5]. В случае, если сначала выполняется интегрирование по $\mathrm{d}z_1$ и $\mathrm{d}z_2$ (с какой-либо основной весовой функцией), к каждому из сомножителей может быть применена формула Сохоцкого. В этом же случае мы далее можем раскрыть скобки в получающемся выражении. В результате имеем

$$\frac{1}{x-z_1+\mathrm{i}0}\,\frac{1}{x-z_2+\mathrm{i}0} \doteq VP\frac{1}{x-z_1}\;VP\frac{1}{x-z_2}$$
$$-\,\mathrm{i}\,\pi\left[VP\frac{1}{x-z_1}\,\delta(x-z_2)+VP\frac{1}{x-z_2}\,\delta(x-z_1)\right]-\pi^2\,\delta(x-z_1)\delta(x-z_2)\,. \tag{23}$$

Здесь точка над знаком равенства указывает на то, что равенство имеет смысл только при определенном порядке вычисления последовательных интегралов.

С другой стороны, при условии, что сначала вычисляется интеграл по $\mathrm{d}x$, выражение в левой части формулы (23) может быть преобразовано к виду (см. первое замечание после формулы (17))

$$VP\frac{1}{z_1-z_2}\,\left[\frac{1}{x-z_1+\mathrm{i}0}-\frac{1}{x-z_2+\mathrm{i}0}\right]. \tag{24}$$

Применив опять формулу Сохоцкого и раскрывая скобки, получим

$$\frac{1}{x-z_1+\mathrm{i}0}\,\frac{1}{x-z_2+\mathrm{i}0} \underset{\cdot}{=}$$
$$VP\frac{1}{z_1-z_2}\,\left[VP\frac{1}{x-z_1}-VP\frac{1}{x-z_2}\right]-\mathrm{i}\pi\,VP\frac{1}{z_1-z_2}\,\Big[\delta(x-z_1)-\delta(x-z_2)\Big]\,. \tag{25}$$

Точка под знаком равенства в формуле (25) указывает на то, что здесь предполагается другой (определенный) порядок вычисления повторных интегралов.

Далее, на основании независимости результата интегрирования от порядка вычисления последовательных интегралов от выражения, стоящего в левой части (23) и (25), приравниваем правые части обеих формул. В итоге вновь приходим к результату (22).

Итак, в окончательном варианте формула (17) принимает вид

$$VP\frac{1}{x-z_1}\;VP\frac{1}{x-z_2}=VP\frac{1}{z_1-z_2}\,\left[VP\frac{1}{x-z_1}-VP\frac{1}{x-z_2}\right]+\pi^2\delta(x-z_1)\delta(x-z_2)\,. \tag{26}$$

Смысл формулы (26) заключается в том, правая ее часть определяет левую в случае нерегулярного порядка вычисления повторных интегралов: сначала по $\mathrm{d}x$, и только затем по $\mathrm{d}z_1$ и/или $\mathrm{d}z_2$. Определение дано таким образом, чтобы получившийся результат совпал с результатом регулярного порядка вычисления повторных интегралов: сначала по $\mathrm{d}z_1$ и/или $\mathrm{d}z_2$ и только потом по $\mathrm{d}x$. (Подчеркнем лишний раз, что при наложении другого условия значение коэффициента C_2 может стать иным.)

Обобщение формулы (26) на случай произведения полюсов произвольной степени легко получается с использование соотношения

$$VP\frac{1}{(x-z_1)^{n_1}}\;VP\frac{1}{(x-z_2)^{n_2}}=\frac{1}{(n_1-1)!\,(n_2-1)!}\,\frac{\mathrm{d}^{n_1-1}}{\mathrm{d}z_1^{n_1-1}}\,\frac{\mathrm{d}^{n_2-1}}{\mathrm{d}z_2^{n_2-1}}\left[VP\frac{1}{x-z_1}\;VP\frac{1}{x-z_2}\right]. \tag{27}$$

Подставив (26) в (27), после несложных вычислений получим

$$
\begin{aligned}
VP\frac{1}{(x-z_1)^{n_1}}\, VP\frac{1}{(x-z_2)^{n_2}} = \frac{\pi^2}{(n_1-1)!\,(n_2-1)!}\, \delta^{(n_1-1)}(x-z_1)\delta^{(n_2-1)}(x-z_2) \\
+ \sum_{k=0}^{n_1-1} \tbinom{n_2+k-1}{k} (-)^k\, VP\frac{1}{(z_1-z_2)^{n_2+k}}\, VP\frac{1}{(x-z_1)^{n_1-k}} \\
+ \sum_{k=0}^{n_2-1} \tbinom{n_1+k-1}{k} (-)^k\, VP\frac{1}{(z_2-z_1)^{n_1+k}}\, VP\frac{1}{(x-z_2)^{n_2-k}}\,.
\end{aligned} \tag{28}
$$

Возвращаясь к исходному интегралу (15), введенному в самом начале раздела, мы теперь видим, что его можно вычислить путем доопределения подынтегрального выражения при помощи формулы (28) и затем при помощи формул предыдущего раздела.

В заключение данного раздела отметим, что полученная нами формула (26) в сущности не является полностью новой. В частности, в [13] был проведен вывод подобной формулы, записанной в терминах соотношения между двукратными последовательными интегралами, а в работе [14] была указана (без вывода и комментариев) эквивалентная с точностью до обозначений формула. Однако вывод в [13], основанный на вычислении условных пределов по параметру от обычных интегралов, существенным образом отличается от нашего, основанного на теории расширения линейных непрерывных функционалов. Основным преимуществом нашего вывода является универсальность и гибкость применяемого математического аппарата. Это нашло отражение, в частности, в возможности автоматического обобщения результатов на случай интегралов любой кратности, а также в предельной прозрачности и краткости найденного решения.

3. Нетривиальный пример вычисления интегралов

Рассмотрим пример применения формулы (26), близкий к тому, с чем приходится иметь дело в некоторых реальных приложениях. А именно, рассмотрим интеграл по симплексу

$$
I(z) = \iint\limits_0^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\;\; \theta(2+z-x-y)\, VP\frac{1}{x-1}\, VP\frac{1}{y-1}\,. \tag{29}
$$

Сразу заметим, что при $z>0$ точка сингулярности обоих полюсов $\{x=1,\, y=1\}$ заведомо попадает в область интегрирования. При $z<0$ сингулярным может оказаться только один из полюсов. Случай $z=0$ является в некотором роде переходным. Одновременно он является специфически-сингулярным, поскольку при $z=0$ к сингулярности подынтегральной функции в (29) добавляется неопределенность, связанная с присутствием θ-функции. (Другими словами, интеграл (29) при $z=0$ нуждается в дополнительном определении. Возможный способ доопределения указан в подстрочном примечании на стр. 4.)

С интегралами типа (29) приходится сталкиваться при вычислении вероятностей процессов парного рождения и распада нестабильных частиц в подходе модифицированной теории возмущений (МТВ), основанной на разложении по константе связи брейт-вигнеровских факторов, стоящих в вероятности (не в амплитуде). Оба VP-полюса в (29) при этом соответствуют определенному вкладу от произведения двух брейт-вигнеровских факторов, возникающему в третьем порядке разложения сечения процесса. Точки $x=1$ и $y=1$ соответствуют положению массовой оболочки резонансов. Величина z соответствует энергии эксклюзивного сечения процесса, отсчитываемой от порога парного рождения. (См. работу [12] для установления соответствия; расчеты реальных процессов см. в последующих работах автора.)

Представим интеграл (26) в виде повторного и воспользуемся формулой (13). В результате получим

$$I(z) = \int\limits_0^{2+z} \mathrm{d}x\, VP\frac{1}{x-1} \int\limits_0^{2+z-x} \mathrm{d}y\, VP\frac{1}{y-1} \;=\; \int\limits_0^{2+z} \mathrm{d}x\, VP\frac{1}{x-1}\; \ln|1+z-x|\,. \tag{30}$$

К сожалению, при $z=0$ интеграл (30) не определен. Однако при $z\neq 0$ его вычисление может быть осуществлено в лоб путем разделения области интегрирования на подобласти. (В более сложных случаях это не всегда удается сделать.) Опуская утомительные вычисления, сразу выпишем результат при $z>0$:

$$I(z) = 2\,\mathrm{dilog}(1+z^{-1}) + \ln^2(z) - \frac{\pi^2}{6}\,, \tag{31}$$

$$\mathrm{dilog}(z) \equiv \int_1^z \mathrm{d}t\, \frac{\ln(t)}{1-t}\,. \tag{32}$$

Другой и более совершенный способ вычисления $I(z)$ основан на замене переменных $x{+}y=\xi$, $x{-}y=2\eta$ (чем достигается симметричность “прохода” области интегрирования) и далее на использовании формулы (26):

$$\begin{aligned} I(z) \;&=\; \int\limits_0^{2+z} \mathrm{d}\xi \int\limits_{-\xi/2}^{\xi/2} \mathrm{d}\eta\;\; VP\frac{1}{\eta+\xi/2-1}\, VP\frac{-1}{\eta-\xi/2+1} \\ &=\; \int\limits_0^{2+z} \mathrm{d}\xi \int\limits_{-\xi/2}^{\xi/2} \mathrm{d}\eta \left\{ VP\frac{1}{\xi-2}\left[VP\frac{1}{\eta+\xi/2-1} - VP\frac{1}{\eta-\xi/2+1}\right] - \pi^2\,\delta(\xi-2)\delta(\eta)\right\} \\ &=\; 2\int\limits_0^{2+z} \mathrm{d}\xi\; \frac{\ln|\xi-1|}{\xi-2} - \pi^2\,\theta(z). \end{aligned} \tag{33}$$

Последний интеграл в (33) может быть легко вычислен при любом z. В частности, при $z>-1$ получим

$$I(z) = -2\,\mathrm{dilog}(1+z) + \frac{\pi^2}{2} - \theta(z)\,. \tag{34}$$

При $z>0$ выражения в правых частях (31) и (34) равны другу другу в силу соотношения

$$2\,\mathrm{dilog}(1+z^{-1}) + 2\,\mathrm{dilog}(1+z) + \ln^2(z) + \frac{\pi^2}{3} = 0\,. \tag{35}$$

В справедливости (35) легко убедиться путем дифференцирования с учетом (32) левой его части и вычисления отдельно частного значения, например, при $z=1$.

Таким образом, при $z>0$ оба вышеприведенные вычисления эквивалентны. Тем не менее, второй способ вычисления интеграла (29) позволяет решить проблему “прохода” области порога парного рождения нестабильных частиц, являющуюся камнем преткновения с точки зрения вычислений работы [12]. (В реальных приложениях в точке $z = 0$ возникает сингулярность, нуждающаяся в регуляризации.) Кроме того, в областях вне порога (при $z \neq 0$) сами вычисления по второму способу оказываются значительно более простыми, что очень важно с точки зрения практической решаемости задачи.

4. Произведение нескольких *VP*

Результаты раздела 2 могут быть обобщены по индукции на случай произведения произвольного числа VP-полюсов. Так, произведение трех простых полюсов может быть определено путем домножения обеих частей формулы (26) на еще один полюс. В результате в правой части получим произведение не более, чем двух полюсов по x с прескрипцией VP. В силу (26) такое произведение является хорошо определенным объектом. Далее, путем последовательного применения формулы (26) результат можно привести к виду суммы одиночных полюсов по x и затем к полностью симметричному виду:

$$\prod_{n=1}^{3} VP\frac{1}{x-z_n} = \sum_{n=1}^{3} VP\frac{1}{x-z_n}\left[\prod_{k\neq n} VP\frac{1}{z_n-z_k} - \frac{\pi^2}{3}\prod_{k\neq n}\delta(z_n-z_k) + \pi^2\prod_{k\neq n}\delta(x-z_k)\right]. \quad (36)$$

Формула для произведения четырех полюсов может быть получена путем домножения обеих частей формулы (36) на еще один полюс, либо путем умножения формулы (26) саму на себя. Оба способа после приведения к сумме одиночных полюсов по x и симметризации приводят к результату:

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{4} VP\frac{1}{x-z_n} &= \sum_{n=1}^{4} VP\frac{1}{x-z_n}\left[\prod_{k\neq n} VP\frac{1}{z_n-z_k} + \frac{\pi^2}{3}\sum_{l\neq n} VP\frac{1}{z_l-z_n}\prod_{\substack{k\neq n\\ k\neq l}}\delta(z_n-z_k)\right] \\ &+ \frac{\pi^2}{4}\sum_{P\{z_1,\ldots,z_4\}} VP\,\frac{\delta(x-z_1)\delta(x-z_2)}{(z_1-z_3)(z_2-z_4)} - \pi^4\prod_{n=1}^{4}\delta(x-z_n)\,. \qquad (37)\end{aligned}$$

Здесь индексы k и l пробегают значения 1,2,3,4, за исключением значений, указанных под знаками суммы или произведения. Во втором слагаемом в формуле (37) суммирование ведется по всем перестановкам $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$.

Процесс домножения на простой VP-полюс может быть продолжен и далее. При этом на каждом шаге индукции мы будем получать в правой части произведение только двух VP-полюсов по x, что в силу (26) является хорошо определенным объектом. После нужного числа повторений операции мы можем получить формулу, определяющую произведение любого числа простых VP-полюсов. Далее путем дифференцирования по параметрам наподобие того, как это указано в (27), можно получить результат для произведения любого числа VP-полюсов любой степени. В сущности, указанная процедура является тривиальной, и ввиду громоздкости формул мы не выписываем получающиеся результаты.

Заключение

Итак, если интеграл в смысле главного значения от сингулярных функций или их произведений оказывается сингулярной функцией параметров интегрирования, то он может быть доопределен в смысле обобщенных функций. Возникающий при таком доопределении произвол контролируется и может быть устранен путем наложения условия независимости результата интегрирования от порядка вычисления повторных интегралов. (Указанное условие не единственно, но оно естественно возникает при решении достаточно широкого круга задач.) В случае одиночного полюса с VP-прескрипцией под знаком интеграла соответствующий результат описывается формулами (10) и (11). Смысл этих формул состоит в том, что полюса по параметрам интегрирования, возникающие при обычном вычислении интеграла от одиночного VP-полюса, следует понимать опять в смысле главного значения. Случай интеграла от произведения двух VP-полюсов оказывается нетривиальным, но может быть сведен к случаю с одиночным VP-полюсом с помощью формул приведения (26) и (28). Случай с многими VP-полюсами легко рассматривается по индукции.

Полученные в настоящей работе результаты чрезвычайно важны для осуществления систематического описания процессов парного (множественного) рождения и распадов нестабильных частиц в высших порядках теории возмущений. Однако ввиду очевидной универсальности, они могут быть применены также и в любом другом приложении, в котором встречаются повторные интегралы, содержащие в подынтегральных выражениях сингулярные функции, доопределенные в смысле главного значения.

Автор выражает благодарность В.А.Петрову за ценные замечания, а также А.И. Алексееву за указание на ссылку [14] и А.Бассетто за указание на ссылку [13].

Список литературы

[1] *Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков.* Введение в теорию квантованных полей. – М.: Наука, изд.-е 3, 1976.

[2] *С.Л. Соболев.* Матем. сборник I. 1936. Т. 43. С. 39.

[3] *L. Schwartz.* Theorie des Distribftions. I, II, Paris, 1950-51.

[4] *И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов.* Обобщенные функции. Вып.1. Обобщенные функции и действия над ними., Вып.2. Пространтсва основных и обобщенных функций. – М.: Физ.-мат.лит., 1958; *В.С. Владимиров.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1976.

[5] *Н.Н. Боголюбов, А.А. Логунов, И.Т. Тодоров.* Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. - М.: Наука, 1969; *Н.Н. Боголюбов, А.А. Логунов, А.И. Оксак, И.Т. Тодоров.* Общие принципы квантовой теории поля. - М.: Наука, 1987.

[6] *Н.Н. Боголюбов.* ДАН СССР. 1952. Т. 82. С. 217

[7] *Н.Н. Боголюбов, О.С. Парасюк.* Изв. АН СССР, сер. матем. 1956. Т. 20. С. 585; *Н.Н. Боголюбов, О.С. Парасюк.* Acta Math. 1957. Т. 97. С. 227.

[8] *М.Л. Некрасов, В.Е. Рочев.* ТМФ. 1988. Т. 74. С. 171; *М.Л. Некрасов, В.Е. Рочев*: Динамическое нарушение киральной симметрии инфракрасными сингулярностями КХД, Препринт ИФВЭ 86-186, Серпухов, 1986.

[9] *F.V. Tkachov*. Int.J.Mod.Phys.A. 1993. V. 8. P. 2047; *F.V. Tkachov*. Phys.Lett.B. 1997. V. 412. P. 350.

[10] *M.L. Nekrasov*. Eur.Phys.J.C. 2001. V. 19. P. 441.

[11] *M.L. Nekrasov*. Gauge-invariant description of W-pair production in NLO approximation. – In: Proceed. of XV International Workshop QFTHEP'2000, ed. by M.N.Dubinin et al. Moscow: SINP MSF. 2000, P.218 [hep-ph/0102284]

[12] *M.L. Nekrasov*. Phys.Lett.B. 2002. V. 545. P. 119.

[13] *Н.И.Мусхелишвили*. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1946.

[14] *A.Bassetto, R.Soldati*. Nucl.Phys.B. 1986. V. 276. P. 517.

Рукопись поступила 17 марта 2003 г.

М.Л. Некрасов.
Интеграл в смысле главного значения как обобщенная функция параметров интегрирования.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы LaTeX.
Редактор Н.В.Ежела. Технический редактор Н.В.Орлова.

Подписано к печати 19.03.2003. Формат $60 \times 84/8$. Офсетная печать.
Печ.л. 1,75. Уч.-изд.л. 1,4. Тираж 130. Заказ 37. Индекс 3649.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 2003–10, И Ф В Э, 2003