ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2003–23
ОТФ

Р.К. Джафаров[1] , В.Е. Рочев

РАЗЛОЖЕНИЕ СРЕДНЕГО ПОЛЯ И МЕЗОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В КИРАЛЬНОМ КОНДЕНСАТЕ МОДЕЛИ НАМБУ – ЙОНА-ЛАЗИНИО С АНАЛИТИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ

[1]Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

Протвино 2003

УДК 539.1.01 М–24

Аннотация

Джафаров Р.К., Рочев В.Е. Разложение среднего поля и мезонные эффекты в киральном конденсате модели Намбу – Йона-Лазинио с аналитической регуляризацией: Препринт ИФВЭ 2003–23. – Протвино, 2003. – 14 с., библиогр.: 16.

В модели Намбу – Йона-Лазинио с аналитической регуляризацией в рамках разложения среднего поля в формализме билокального источника вычислены вклады скалярных мезонов в кварковый киральный конденсат. Вклад сигма-мезона в области физических значений параметров незначителен, в то время как вклад пиона довольно значителен и должен учитываться при выборе значений параметров.

Abstract

Jafarov R.K., Rochev V.E. Mean-Field Expansion and Meson Effects in Chiral Condensate of Analytically Regularized Nambu – Jona-Lasinio Model : IHEP Preprint 2003–23. – Protvino, 2003. – p. 14, refs.: 16.

In a framework of mean-field expansion in bilocal-source formalism the scalar meson contributions in chiral quark condensate are calculated for analytically regularized Nambu – Jona-Lasinio model. Sigma-meson contribution for physical values of parameters is found to be small. Pion contribution is found to be significant and should be taken into account at the choice of the parameter values.

Введение

Модель Намбу–Йона-Лазинио [1] (НЙЛ) явилась исторически первой теоретико-полевой моделью динамического нарушения киральной симметрии (ДНКС) в физике адронов. В семидесятые-восьмидесятые годы прошлого века модель НЙЛ была переформулирована на языке кварков [2] и с тех пор является одной из наиболее успешных эффективных моделей квантовой хромодинамики легких адронов в непертурбативной области. В последующие годы интенсивно исследовалась модель НЙЛ при конечных температурах и плотностях [3]. (См. также обзоры [4] и [5] и цитируемую там литературу.)

В подавляющем большинстве этих исследований модель НЙЛ применялась в приближении среднего поля (приближение Хартри), либо в эквивалентном ему главном порядке $1/n_c$-разложения (n_c — число цветов). В то же время успехи в феноменологическом описании стимулировали изучение структуры модели НЙЛ за рамками приближения среднего поля, т.е. в следующем порядке разложения среднего поля, либо в следующем порядке $1/n_c$-разложения (см. работы [6]–[10] и цитируемую там литературу). Эти исследования необходимы для уяснения области применимости результатов и их устойчивости относительно вариации параметров модели и квантовых флюктуаций, вызываемых эффектами высших порядков, тем более, что в последнее время появляются работы, ставящие под сомнение основные физические эффекты модели НЙЛ (см., например, [11]–[12]).

Поскольку модель НЙЛ в современной трактовке с одной стороны, рассматривается как эффективная модель КХД в непертурбативной области, а с другой стороны, приближение среднего поля включает в себя кварковые петли, то существенным моментом применения модели НЙЛ является регуляризация. Наиболее употребительными регуляризациями модели НЙЛ традиционно являются регуляризация четырехмерным обрезанием в евклидовом пространстве импульсов, либо нековариантное обрезание в трехмерном импульсном пространстве. Реже используются другие схемы регуляризации, такие, как регуляризация Паули – Вилларса, либо нелокальные гауссовы формфакторы. Наименее употребительной в модели НЙЛ является размерная регуляризация (так, в обзорах [4] и [5] она даже не упоминается.) Это выглядит, на первый взгляд, странным, поскольку достоинства размерной регуляризации общеизвестны, именно эта регуляризация наиболее широко употребляется для вычислений в перенормируемых теориях, особенно в калибровочных. По-видимому, этот факт связан с тем, что, в отличие от перенормируемых моделей, параметр регуляризации в модели НЙЛ входит в выражения для физических величин и является одним из существенных параметров модели. В то же время параметр размерной регуляризации, если традиционно трактовать его как отклонение от физической размерности пространства, не допускает в этой трактовке какой-либо физической интерпретации.

Существует, однако, альтернативная трактовка размерной регуляризации как варианта аналитической регуляризации. В этой трактовке все вычисления производятся в четырехмерном евклидовом пространстве импульсов, а параметр регуляризации трактуется как степень весовой функции, регуляризирующей расходящиеся интегралы. Такая трактовка размерной регуляризации, основанная на идеях Вильсона и Коллинза, последовательно развита и применена к описанию модели НЙЛ в приближении среднего поля в работе Крювальда и Накаямы [13]. Подчеркнем, что при такой трактовке размерной регуляризации параметр регуляризации вовсе не является отклонением от физической размерности пространства. Мы предполагаем, что возможна трактовка этого параметра как степени некоторого эффективного влияния глюонов на четырехфермионное самодействие кварков модели НЙЛ, что в определенной степени перекликается с популярными в последнее время нелокальными вариантами модели НЙЛ [10], [14].

В предлагаемой работе мы исследуем модель НЙЛ с размерной регуляризацией в трактовке Крювальда – Накаямы [1] в следующем за главным порядке разложения среднего поля. Для построения разложения среднего поля мы используем итерационную схему решения уравнения Швингера-Дайсона с билокальным источником фермионов, предложенную в работах [15] (раздел 1). Аналитическая регуляризация [13] в модели НЙЛ обсуждается в разделе 2. Целью наших вычислений являются мезонные вклады в кварковый киральный конденсат – основной параметр порядка в моделях ДНКС. Как показывают наши вычисления, вклад пиона в киральный конденсат выражается в аналитической регуляризации исключительно простой формулой (28) (раздел 3) – отношение пионного вклада к конденсату главного приближения обратно пропорционально параметру регуляризации и не зависит от остальных параметров модели. Вклад пиона довольно значителен и на границе допустимых значений параметра регуляризации становится бесконечно большим, что означает нестабильность модели относительно квантовых флюктуаций вблизи этой границы. Вклад сигма-мезона в области допустимых значений параметра незначителен. В разделе 4 результаты, полученные в разделах 2 и 3 для классического варианта модели НЙЛ с симметрией группы U(1), обобщаются для физически интересного случая модели с двумя кварковыми ароматами и n_c цветами (SU(2)-модель). В разделе 5 обсуждается выбор физических значений параметров SU(2)-модели, который производится на основе формул для распадной константы f_π, формулы для конденсата и полученной в работе [13] формулы для ширины распада $\pi^0 \to 2\gamma$. Обсуждение результатов содержится в заключении.

Совсем кратко наши результаты можно сформулировать в виде утверждения о том, что модель НЙЛ с аналитической регуляризацией не содержит в области физических значений параметров каких-либо патологических квантовых флюктуаций, связанных с вкладами скалярных мезонов, хотя вклад пиона в киральный конденсат довольно значителен и требует учета при сравнении результатов модели с данными феноменологии.

[1] Для того чтобы избежать ненужных ассоциаций со стандартной трактовкой размерной регуляризации как выхода в D-мерное простанство, мы будем в дальнейшем называть эту регуляризацию аналитической регуляризацией модели НЙЛ.

1. Разложение среднего поля в формализме билокального источника

U(1)-моделью НЙЛ мы будем называть теорию самодействующего спинорного поля ψ с лагранжианом
$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i\hat{\partial}\psi + \frac{g}{2}\Big((\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2\Big). \tag{1}$$
Здесь $g > 0$ — константа связи, имеющая размерность квадрата обратной массы. Этот лагранжиан инвариантен относительно преобразований киральной группы $U_V(1) \times U_A(1)$. Эта модель не имеет непосредственных физических приложений, но, как показано в разделе 4, результаты физически интересной SU(2)-модели для вклада мезонов в киральный конденсат практически идентичны результатам U(1)-модели, что не удивительно, так как эти вклады являются чисто динамическими. Симметрийные различия проявляются в виде простых коэффициентов (см. формулу (39) раздела 4).

Производящий функционал функций Грина (вакуумных ожиданий T-произведений полей) может быть представлен в виде функционального интеграла с билокальным источником:

$$G(\eta) = \int D(\psi, \bar{\psi}) \exp i\Big\{\int dx\mathcal{L} - \int dxdy\bar{\psi}(y)\eta(y,x)\psi(x)\Big\}. \tag{2}$$
Здесь $\eta(y, x)$ есть билокальный источник спинорного поля.

Производная G по источнику η есть одночастичная (двухточечная) функция Грина (пропагатор поля ψ):
$$\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x)}\Big|_{\eta=0} = i < 0 \mid T\Big\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\Big\} \mid 0 > \equiv S(x-y). \tag{3}$$

n-ая функциональная производная G по источнику η есть n-частичная ($2n$-точечная) функции Грина:

$$\frac{\delta^n G}{\delta\eta(y_1,x_1)\cdots\delta\eta(y_n,x_n)}\Big|_{\eta=0} = i^n < 0 \mid T\Big\{\psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)\cdots\psi(x_n)\bar{\psi}(y_n)\Big\} \mid 0 > \equiv S_n\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \cdots & \cdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix}.$$

Трансляционная инвариантность меры функционального интегрирования в (2) приводит к функционально-дифференциальному уравнению Швингера–Дайсона (УШД) для производящего функционала:
$$\delta(x-y)G + i\hat{\partial}_x\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x)} + ig\Big\{\frac{\delta}{\delta\eta(y,x)}\,\mathrm{tr}\,\frac{\delta G}{\delta\eta(x,x)} - \gamma_5\frac{\delta}{\delta\eta(y,x)}\,\mathrm{tr}\,\gamma_5\frac{\delta G}{\delta\eta(x,x)}\Big\} = \tag{4}$$
$$= \int dx_1\eta(x,x_1)\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x_1)}.$$
Мы будем решать это уравнение методом, предложенным в работах [15]. (Краткий обзор см. в [16].) Для рассматриваемой нами модели НЙЛ этот метод является одним из способов построения разложения среднего поля. Главным приближением является аппроксимация функционально-дифференциального УШД (4) уравнением с нулевой правой частью:
$$\delta(x-y)G^{(0)} + i\hat{\partial}_x\frac{\delta G^{(0)}}{\delta\eta(y,x)} + ig\Big\{\frac{\delta}{\delta\eta(y,x)}\,\mathrm{tr}\,\frac{\delta G^{(0)}}{\delta\eta(x,x)} - \gamma_5\frac{\delta}{\delta\eta(y,x)}\,\mathrm{tr}\,\gamma_5\frac{\delta G^{(0)}}{\delta\eta(x,x)}\Big\} = 0. \tag{5}$$

Решением уравнения главного приближения (5) является функционал

$$G^{(0)} = \exp\Big\{\mathrm{Tr}\,\Big(S^{(0)} * \eta\Big)\Big\} \tag{6}$$

(здесь Tr означает след в операторном смысле, а $*$ – операторное умножение), где $S^{(0)}$ есть решение уравнения

$$\delta(x) + i\hat{\partial}S^{(0)}(x) + ig\Big\{S^{(0)}(x)\,\mathrm{tr}\,S^{(0)}(0) - \gamma_5 S^{(0)}(x)\,\mathrm{tr}\,\gamma_5 S^{(0)}(0)\Big\} = 0. \tag{7}$$

Главное приближение (5)-(6) генерирует линейную итерационную схему:

$$G = G^{(0)} + G^{(1)} + \cdots + G^{(n)} + \cdots,$$

где функционал n-го шага $G^{(n)}$ есть решение уравнения

$$G^{(n)} + i\hat{\partial}\frac{\delta G^{(n)}}{\delta\eta} + ig\Big\{\frac{\delta}{\delta\eta}\,\mathrm{tr}\,\frac{\delta G^{(n)}}{\delta\eta} - \gamma_5\frac{\delta}{\delta\eta}\,\mathrm{tr}\,\gamma_5\frac{\delta G^{(n)}}{\delta\eta}\Big\} = \eta * \frac{\delta G^{(n-1)}}{\delta\eta}. \tag{8}$$

Решением уравнения (8) является функционал

$$G^{(n)} = P^{(n)}G^{(0)},$$

где $P^{(n)}$ — полином степени $2n$ по источнику η.

Как видно из (6), единственная связная функция главного приближения есть пропагатор $S^{(0)}$. Остальные связные функции Грина появляются на последующих шагах итерационной схемы.

Решение уравнения (7) в импульсном пространстве есть свободный пропагатор

$$S^{(0)}(p) = \frac{1}{m - \hat{p}}$$

с динамической массой m, которая является решением уравнения самосогласования модели НЙЛ:

$$m = -4igm\int\frac{d\tilde{p}}{m^2 - p^2} \tag{9}$$

Здесь и всюду в дальнейшем $d\tilde{p} \equiv d^4p/(2\pi)^4$.

Расходящийся интеграл в правой части уравнения (9) должен пониматься как некоторая регуляризация. Всегда существует кирально-симметричное тривиальное решение $m = 0$. Физически более предпочтительно (энергетически выгоднее) решение с $m \neq 0$, соответствующее ДНКС, которое мы всегда в дальнейшем и будем рассматривать.

Решение уравнения первого шага есть функционал

$$G^{(1)} = \Big\{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(S_2^{(1)} * \eta^2\Big) + \mathrm{Tr}\Big(S^{(1)} * \eta\Big)\Big\}G^{(0)}.$$

С учетом соотношений (5)-(8) мы получаем уравнение первого шага для двухчастичной функции $S_2^{(1)}$

$$S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = -S^{(0)}(x - y')S^{(0)}(x' - y) + \tag{10}$$

$$+ig\int dx_1\Big\{(S^{(0)}(x-x_1)S^{(0)}(x_1-y))\,\mathrm{tr}\,S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}-$$

$$-(S^{(0)}(x-x_1)\gamma_5 S^{(0)}(x_1-y))\,\mathrm{tr}\,\gamma_5 S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}\Big\}$$

и уравнение для поправки первого шага к пропагатору $S^{(1)}$

$$S^{(1)}(x-y) = ig\int dx_1 S^{(0)}(x-x_1)\Big\{S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix} - \gamma_5 S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}\gamma_5\Big\}+ \tag{11}$$

$$+ig\int dx_1 S^{(0)}(x-x_1)S^{(0)}(x_1-y)\,\mathrm{tr}\,S^{(1)}(0).$$

Решение линейного интегрального уравнения (10) есть

$$S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} =$$

$$= \int dx_1 dy_1 dx_1' dy_1' S^{(0)}(x-x_1)S^{(0)}(x'-x_1')F_2\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_1' & y_1' \end{pmatrix} S^{(0)}(y_1-y)S^{(0)}(y_1'-y'), \tag{12}$$

где F_2 есть ампутированная двухчастичная функция

$$F_2\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = -[S^{(0)}]^{-1}(x-y')[S^{(0)}]^{-1}(x'-y)+ \tag{13}$$

$$+\delta(x-y)\delta(x'-y')\{1\otimes 1\cdot A_\sigma(x-x') + \gamma_5\otimes\gamma_5\cdot A_\pi(x-x')\Big\}$$

Здесь A_σ — скалярная амплитуда, а A_π — псевдоскалярная амплитуда. В импульсном пространстве

$$A_\sigma(p) = -\frac{ig}{1-L_S(p)}, \tag{14}$$

где $L_S(p) = ig\int d\tilde{q}\ \mathrm{tr}\,S^{(0)}(p+q)S^{(0)}(q)$ — скалярная петля,

$$A_\pi(p) = \frac{ig}{1+L_P(p)}, \tag{15}$$

где $L_P(p) = ig\int d\tilde{q}\ \mathrm{tr}\,S^{(0)}(p+q)\gamma_5 S^{(0)}(q)\gamma_5$ — псевдоскалярная петля.

Используя уравнение самосогласования (9) при $m \neq 0$, нетрудно получить (в трансляционно-инвариантной регуляризации) для A_σ и A_π следующие представления:

$$A_\sigma(p) = \frac{1}{2(4m^2-p^2)I_0(p)}, \tag{16}$$

$$A_\pi(p) = \frac{1}{2p^2 I_0(p)}. \tag{17}$$

Здесь

$$I_0(p) = \int d\tilde{q}\frac{1}{(m^2-(p+q)^2)(m^2-q^2)}. \tag{18}$$

Уравнение (11) для $S^{(1)}$ с учетом полученных для $S_2^{(1)}$ результатов сводится в импульсном пространстве к системе простых алгебраических соотношений. Если ввести массовый оператор первого шага по формуле $\Sigma^{(1)} = [S^{(0)}]^{-1} \star S^{(1)} \star [S^{(0)}]^{-1}$, то мы получаем для него из уравнения (11) с учетом полученных выше результатов следующее выражение

$$\Sigma^{(1)}(x) = ig\delta(x) \operatorname{tr} S^{(1)}(0) + S^{(0)}(x)A_\sigma(x) + S^{(0)}(-x)A_\pi(x). \tag{19}$$

Кратко коснемся следующего шага итерационной схемы, изложенной в этом разделе. Решение функционально-дифференциального уравнения для производящего функционала второго шага имеет вид

$$G^{(2)} = \left\{ \frac{1}{4!}\mathrm{Tr}\Big(S_4^{(2)} * \eta^4\Big) + \frac{1}{3!}\mathrm{Tr}\Big(S_3^{(2)} * \eta^3\Big) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(S_2^{(2)} * \eta^2\Big) + \ \mathrm{Tr}\Big(S^{(2)} * \eta\Big)\right\} G^{(0)},$$

т.е. в уравнениях второго шага появляются четырехчастичная и трехчастичная функции ($S_4^{(2)}$ и $S_3^{(2)}$). Уравнения для $S_2^{(2)}$ и $S^{(2)}$ имеют тот же вид, что и уравнения первого шага, за исключением неоднородного члена, в который для уравнений второго шага входят $S_4^{(2)}$ и $S_3^{(2)}$.

2. Размерная регуляризация в модели НЙЛ

Ввиду неперенормируемости модели НЙЛ регуляризация является существенным компонентом этой модели.

Мы будем использовать в этой работе размерную регуляризацию в варианте, предложенном в работе [13]. Основные положения предложенного в работе [13] способа регуляризации можно суммировать следующим образом:

- все вычисления производятся в 4-мерном евклидовом пространстве;
- постулируется трансляционная инвариантность;
- процедура регуляризации состоит в изменении меры интегрирования путем введения степенной весовой функции, обеспечивающей сходимость интегралов.

В этом подходе размерная регуляризация рассматривается, по-существу, как один из вариантов аналитической регуляризации. Этот момент является весьма существенным при использовании и интерпретации данной регуляризации. В связи с этим, мы будем в дальнейшем использовать для данной регуляризации термин "аналитическая", подчеркивая тем самым особенности ее применения и интерпретации по сравнению с обычной трактовкой размерной регуляризации как формального выхода в D-мерное пространство.

Рассмотрим применение этой регуляризации на примере уравнения самосогласования (9) модели НЙЛ.

При $m \neq 0$ после перехода в евклидово пространство и интегрирования по углам уравнение (9) принимает вид

$$1 = 2g\frac{\Omega_4}{(2\pi)^4}\int \frac{q_e^2 dq_e^2}{m^2 + q_e^2},$$

где $\Omega_4 = 2\pi^2$ — поверхность единичной сферы в 4-мерном пространстве. В соответствии с вышесказанным, мы вводим в подынтегральное выражение весовую функцию:

$$w_{\Lambda,D}(q_e^2) = w_\Lambda(q_e^2)w_D(q_e^2) = \theta(\Lambda^2 - q_e^2)\left(\frac{\mu^2}{q_e^2}\right)^{2-D/2}.$$

Весовая функция $w_{\Lambda,D}$ представляет собой произведение двух весовых функций w_Λ и w_D. Функция w_Λ соответствует регуляризации 4-мерным обрезанием в евклидовом пространстве, а функция w_D соответствует аналитической регуляризации.

Вычисление интеграла по dq_e^2 дает

$$1 = \frac{2gm^2\Omega_4}{(2\pi)^4}\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)^{D/2-2} B_{\frac{\Lambda^2}{m^2+\Lambda^2}}(D/2, 1-D/2).$$

Здесь $B_x(u,v)$ — неполная Бета-функция.

(a) Обрезание

Полагая $D = 4$, получаем

$$1 = \kappa_\Lambda\left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2}\log(1+\frac{\Lambda^2}{m^2})\right),$$

где $\kappa_\Lambda = g\Lambda^2/4\pi^2$.

Это соотношение в точности соответствует классическому результату работы [1].

(б) Аналитическая регуляризация

При $\Lambda^2 \to \infty$, используя формулу

$$B_1(D/2, 1-D/2) = \Gamma(D/2)\Gamma(1-D/2)$$

и переопределив масштабный параметр μ^2 по формуле

$$(\mu^2)^{2-D/2} = \frac{\Omega_D}{\Omega_4}\frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^D}(M)^{2-D/2},$$

мы получаем уравнение самосогласования в виде

$$1 = \kappa\Gamma(1-D/2)\left(\frac{m^2}{4\pi M^2}\right)^{D/2-2}. \tag{20}$$

Здесь вместо g введена безразмерная величина

$$\kappa = \frac{gm^2}{4\pi^2}. \tag{21}$$

Уравнение (20) в точности соответствует результату вычисления с помощью формального правила перехода в D-мерное пространство

$$d\tilde{q} \equiv \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \to \frac{(M^2)^{2-D/2}d^Dq}{(2\pi)^D},$$

но в нашем случае все вычисление проводилось в 4-мерном пространстве, т.е. при данной трактовке D не является размерностью пространства, а неким параметром регуляризации. В частности, мы не связаны условием $D \to 4$ для того, чтобы трактовать результаты вычислений.

Всюду далее мы будем использовать *параметр регуляризации* ξ, определенный соотношением [2]

$$D = 2 - 2\xi. \tag{22}$$

[2] Отметим, что параметр ξ отличен от обычно вводимого параметра ε, такого, что $D = 4 - 2\varepsilon$. Как легко видеть, они связаны соотношением $\varepsilon = 1 + \xi$. Введение этого нового обозначения проделано для того, чтобы избежать ненужных ассоциаций со стандартной трактовкой размерной регуляризации. Кроме того, именно в терминах параметра ξ все последующие формулы модели НЙЛ имеют наиболее простой вид.

В терминах параметра ξ уравнение самосогласования (20) принимает вид

$$1 = \kappa\Gamma(\xi)\left(\frac{4\pi M^2}{m^2}\right)^{1+\xi}. \tag{23}$$

Эта формула может быть аналитически продолжена в любую точку $\xi \neq 0, -1, \ldots$.

Областью сходимости интеграла является область $0 < \xi < 1$. Как мы увидим в дальнейшем (см. раздел 5), именно эта область значений параметра ξ соответствует физическим значениям наблюдаемых.

Киральный конденсат в главном приближении есть

$$(c^3)^{(0)} = i\,\mathrm{tr}\,S^{(0)}(0) = -\frac{m^3}{4\pi^2}\left(\frac{4\pi M^2}{m^2}\right)^{1+\xi}\Gamma(\xi) = -\frac{m}{g}.$$

Интеграл I_0 (см. (18)), который является частью скалярных амплитуд A_σ и A_π, также может быть вычислен по вышеприведенным правилам. Переходя в евклидову метрику, вводя стандартную фейнмановскую параметризацию и сдвигая импульсную переменную (что возможно в силу трансляционной инвариантности процедуры, см. [13]), мы можем выполнить интегрирование по углам. В соответствии с нашими правилами, далее мы вводим под интеграл весовую функцию $w_D(q_e^2)$ и, после такого же, как и выше, переопределения масштабного параметра, получим результат, который также, как и выше, в точности соответствует результату интегрирования с формальным переходом в D-мерное пространство.

Учитывая уравнение самосогласования (23), мы получим полюсные приближения для скалярных амплитуд в аналитической регуляризации:

$$A_\sigma(p) \simeq \frac{1}{2(4m^2 - p^2)I_0(4m^2)} = \frac{2igm^2(1+2\xi)}{(4m^2 - p^2)\xi}, \tag{24}$$

$$A_\pi(p) \simeq \frac{1}{2p^2 I_0(0)} = -\frac{2igm^2}{p^2\xi}, \tag{25}$$

соответствующие вкладам сигма-мезона и пиона. Эти выражения мы будем использовать в дальнейших вычислениях.

3. Мезонные вклады в киральный конденсат

В качестве меры мезонных вкладов в киральный конденсат рассмотрим отношение конденсата первого шага

$$(c^3)^{(1)} = i\mathrm{tr}S^{(1)}(0) \tag{26}$$

к конденсату главного приближения $(c^3)^{(0)}$:

$$r \equiv \frac{(c^3)^{(1)}}{(c^3)^{(0)}} = r_\sigma + r_\pi. \tag{27}$$

Здесь r_σ — вклад скалярного мезона (сигма-мезона), а r_π — вклад псевдоскалярного мезона (пиона).

Из уравнения (19) получаем

$$r_\sigma = -\frac{2ig}{\xi}\int \frac{d\tilde{p}d\tilde{q}(m^2+3p^2-2(pq))}{(m^2-p^2)^2(m^2-(p-q)^2)}A_\sigma(q),$$

и

$$r_\pi = -\frac{2ig}{\xi}\int \frac{d\tilde{p}d\tilde{q}(m^2-p^2+2(pq))}{(m^2-p^2)^2(m^2-(p-q)^2)}A_\pi(q).$$

Вычисление этих интегралов дает нам ответ на поставленную задачу.

Интегралы для r_π вычисляются в аналитической регуляризации в замкнутом виде, и ответ имеет очень простой вид

$$r_\pi = \frac{1}{4\xi}. \tag{28}$$

Скалярный вклад может быть представлен в виде

$$r_\sigma = \frac{4^\xi\Gamma(\frac{3}{2}+\xi)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(3+\xi)}\int_0^1 \frac{du}{(4-3u)^{1+\xi}}\Big[(3-2u)(1-\xi)F(1+\xi,2-\xi;3+\xi;\frac{(u-2)^2}{4-3u})- \tag{29}$$

$$-(1+2\xi)F(1+\xi,1-\xi;3+\xi;\frac{(u-2)^2}{4-3u})\Big],$$

где $F(a,b;c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Обращает на себя внимание тот факт, что как r_π, так и r_σ зависят только от параметра регуляризации ξ и не зависят от других параметров модели. Эта особенность характерна только для аналитической регуляризации. Результаты вычислений в области значений параметра $0 < \xi \leq 1$ представлены в виде табл. 1. Мы видим, что вклад сигма-мезона в этой области невелик, в то время, как вклад пиона при $0 < \xi \leq 0.3 \div 0.5$ значителен, и, строго говоря, в этой последней области мы не можем считать этот вклад поправкой, т.е. при этих значениях параметра квантовые флюктуации велики и могут приводить к коренному изменению всей физической картины в модели НЙЛ, как это считается, например, в работе [11].

Таблица 1. Относительные вклады сигма-мезона (r_σ) и пиона (r_π) в киральный конденсат c^3 U(1)-модели и отношение конденсата первого шага к конденсату главного приближения ($c^{(1)}/c^{(0)}$)как функции параметра регуляризации ξ.

ξ	r_σ	r_π	$c^{(1)}/c^{(0)}$
0.1	0.264	2.50	0.556
0.2	0.189	1.250	0.346
0.3	0.119	0.833	0.250
0.4	0.057	0.625	0.189
0.5	0	0.50	0.145
0.6	-0.050	0.417	0.110
0.7	-0.094	0.357	0.081
0.8	-0.131	0.313	0.057
0.9	-0.162	0.278	0.037
1.0	-0.188	0.250	0.021

4. SU(2)–модель

U(1)-модель, рассмотренная выше, не имеет непосредственных физических приложений, и, хотя исследуемые нами мезонные вклады в киральный конденсат определяются полевой динамикой модели и не зависят критически от симметрийных факторов, мы не можем оставаясь в рамках этой модели, оценить физические значения параметров модели и, соответственно, сделать какой-либо определенный вывод о роли мезонных вкладов. Для фиксации возможных значений параметров m, κ и ξ необходимо рассмотреть модель, связанную с феноменологией легких адронов. В качестве такой модели мы рассмотрим модель с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i\hat{\partial}\psi + \frac{g}{2}\Big[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi} i\gamma_5 \tau^a \psi)^2\Big]. \tag{30}$$

Здесь $\psi \equiv \psi_j^{\alpha,c}$, и $\alpha = 1,2,3,4$ — дираковский спинорный индекс; $c = 1,\ldots,n_c$ — цветовой индекс; $j = 1,2$ — изотопический (ароматный) индекс; τ^a — генераторы группы $SU(2)$ (матрицы Паули); $a = 1,2,3$. Эта модель обладает киральной симметрией группы $SU_V(2) \times SU_A(2)$. Мы будем называть эту модель SU(2)-моделью.

Разложение среднего поля в формализме билокального источника строится для этой модели по той же схеме, что и для рассмотренной выше U(1)-модели, поэтому, не останавливаясь на деталях, перечислим только отличия от соответствующих результатов U(1)-модели.

Пропагатор главного приближения диагонален по цвету и аромату:

$$S^{(0)}_{cd,jk} = \delta_{cd}\delta_{jk}(m - \hat{p})^{-1}, \tag{31}$$

и уравнение самосогласования при $m \neq 0$ в SU(2)-модели имеет вид

$$1 = -8ign_c \int \frac{d\tilde{p}}{m^2 - p^2}. \tag{32}$$

Киральный конденсат мы будем определять для каждого аромата, т.е.

$$c_u^3 = < 0|\bar{u}u|0 >, \;\; c_d^3 = < 0|\bar{d}d|0 > .$$

(В киральном пределе $c_d = c_u$.) Двухчастичная амплитуда первого шага A (связная часть ампутированной двухчастичной функции $S_2^{(1)}$) имеет следующую цветовую и ароматную структуру:

$$A^{cd,jk}_{c'd',j'k'} = \delta^{cd}\delta^{c'd'}\Big[\delta_{jk}\delta_{j'k'}A_\sigma + \tau^a_{jk}\tau^a_{j'k'}A_\pi\Big]. \tag{33}$$

Скалярные амплитуды A_σ и A_π определяются теми же формулами (14) и (15) с той разницей, что след в определении скалярных петель L_S и L_P теперь берется по всем дискретным индексам.

Массовый оператор первого порядка $\Sigma^{(1)} = [S^{(0)}]^{-1} \star S^{(1)} \star [S^{(0)}]^{-1}$ диагонален по цвету и аромату и связан со скалярными амплитудами соотношением

$$\Sigma^{(1)}(x)^{cd}_{jk} = \delta^{cd}\delta_{jk}\cdot\Big[ig\delta(x)\,\mathrm{tr}\,S^{(1)}(0) + S^{(0)}(x)A_\sigma(x) + 3S^{(0)}(-x)A_\pi(x)\Big]. \tag{34}$$

Для отношения конденсатов первого шага и главного приближения получаем формулу

$$r = r_\sigma + r_\pi = \tag{35}$$

$$= -\frac{8ign_c}{1-8ign_cJ}\int \frac{d\tilde{q}}{(m^2-p^2)^2(m^2-(p-q)^2)}\Big((3p^2-2(pq)+m^2)A_\sigma(q)+3(m^2-p^2+2(pq))A_\pi(q)\Big),$$

где

$$J = \int d\tilde{p}\frac{m^2+p^2}{(m^2-p^2)^2}.$$

Уравнение самосогласования в аналитической регуляризации для SU(2)-модели имеет в точности тот же вид (23), если мы переопределим безразмерную константу κ как

$$\kappa = \frac{gn_cm^2}{2\pi^2} = 2n_c\kappa_0. \tag{36}$$

(Здесь и всюду в дальнейшем индексом 0 помечена соответствующая величина в U(1)-модели.)

Скалярные амплитуды SU(2)-модели могут быть записаны в виде

$$A_\sigma = \frac{1}{4n_c(4m^2-p^2)I_0}, \tag{37}$$

$$A_\pi = \frac{1}{4n_cp^2I_0}, \tag{38}$$

где I_0 определен той же формулой (18).

С учетом данных выше соотношений и определений, мы получаем для мезонных вкладов SU(2)-модели:

$$r_\sigma = \frac{1}{2n_c}r_{0\sigma},\ \ r_\pi = \frac{3}{2n_c}r_{0\pi}, \tag{39}$$

где $r_{0\sigma}$ и $r_{0\pi}$ — соответствующие вклады U(1)-модели.

Таблица 2. Относительные вклады сигма-мезона (r_σ) и пиона (r_π) в киральный конденсат c^3 SU(2)-модели и отношение конденсата первого шага к конденсату главного приближения ($c^{(1)}/c^{(0)}$) как функции параметра регуляризации ξ.

ξ	r_σ	r_π	$c^{(1)}/c^{(0)}$
0.1	0.044	1.250	0.319
0.2	0.032	0.625	0.183
0.3	0.020	0.417	0.128
0.4	0.010	0.313	0.098
0.5	0	0.250	0.077
0.6	-0.008	0.209	0.063
0.7	-0.016	0.179	0.052
0.8	-0.022	0.157	0.043
0.9	-0.027	0.139	0.036
1.0	-0.031	0.125	0.030

При физическом значении числа цветов $n_c = 3$ оба вклада уменьшаются при тех же значениях параметра регуляризации по сравнению с аналогичными вкладами U(1)-модели: r_σ в шесть раз, а r_π — вдвое. Соответственно сдвигается и граница области больших флюктуаций. Результаты вычислений в области значений параметра $0 < \xi \leq 1$ представлены в виде табл. 2. Мы видим, что в SU(2)-модели при значениях $\xi \geq 0.2$ конденсат первого шага $c^{(1)}$ не превышает 20% от конденсата главного приближения, т.е. можно считать, что при таких значениях параметра регуляризации мы находимся в зоне стабильности относительно квантовых флюктуаций, вызванных мезонными вкладами.

5. Выбор параметров

Для фиксации значений параметров SU(2)-модели НЙЛ — динамической массы кварка m, параметра регуляризации ξ и константы связи g (либо безразмерной константы $\kappa = gn_c m^2/2\pi^2$) необходимо связать значения этих параметров с измеряемыми величинами. В качестве последних мы выберем значения распадной константы пиона, киральный конденсат и ширину распада π^0-мезона на два фотона: $\pi^0 \to \gamma\gamma$.

Распадная константа пиона f_π= 93 МэВ определяется формулой

$$i\delta^{ab} k_\mu f_\pi =< 0|\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 \frac{\tau^a}{2}\psi|b,k>, \tag{40}$$

где $|b,k>$ — состояние пиона b с импульсом k_μ.

В SU(2)-модели НЙЛ существует не зависящая от регуляризации формула для f_π:

$$f_\pi^2 = -4in_c m^2 I_0(0) \tag{41}$$

(см., например, [4]). В аналитической регуляризации $I_0(0) = i\xi/16\pi^2\kappa$, и мы получаем

$$f_\pi^2 = \frac{\xi}{2g}. \tag{42}$$

Киральный конденсат c в главном приближении есть

$$c = (< 0|\bar{\psi}\psi|0 > /2)^{1/3} = -(m/2g)^{1/3} \tag{43}$$

(эта формула в SU(2)-модели не зависит от регуляризации).

Ширина распада $\Gamma_{\pi^0\gamma\gamma}$= 7.7 КэВ в аналитической регуляризации SU(2)-модели НЙЛ вычислена в работе [13]. В наших обозначениях эта формула имеет вид

$$\Gamma_{\pi^0\gamma\gamma} = \frac{\alpha^2 m_\pi^3 \xi^2 (1+\xi)^2}{64\pi^3 f_\pi^2 \kappa^2}. \tag{44}$$

Здесь $\alpha = 1/137$ — постоянная тонкой структуры; m_π=135 МэВ — масса π^0-мезона.

Формулы (42)–(44) позволяют определить значения параметров SU(2)-модели НЙЛ.

Киральный конденсат $c = (< \bar{\psi}\psi > /2)^{1/3}$ не является непосредственно измеримой величиной. В связи с этим мы приведем значения параметров модели при нескольких наиболее характерных значениях величины кирального конденсата. При $c = -160$ МэВ мы получаем $\xi \cong 1$, $m \cong 475$ Мэв, $\kappa \cong 2$. Отметим, что при таком значении параметра регуляризации ξ поправка к конденсату c составляет около 3% (см. табл. 2), т.е. модель стабильна относительно квантовых флюктуаций, вызываемых мезонами, но столь низкое значение величины кирального конденсата вряд ли является приемлемым феноменологически, так как согласно формуле Гелл-Манна–Окса–Реннера приводит к большим значениям токовых масс кварков. При $c = -200$ МэВ мы получаем $\xi \cong 0.44$, $m \cong 400$ МэВ, $\kappa \cong 0.62$. При этом поправка к конденсату c составляет 9%. При $c = -250$ МэВ получаем $\xi \cong 0.2$, $m \cong 370$ МэВ, $\kappa \cong 0.24$, и поправка к конденсату c превышает 18%. Таким образом, фиксация параметров модели по формулам (42)–(44) при наиболее приемлемых феноменологических значениях конденсата $c = -(200 \div 250)$ МэВ соответствует поправкам к конденсату порядка $10 \div 20\%$.

Приведенный выше выбор параметров модели производился на основании формулы главного приближения для кирального конденсата (43). Вычисленная нами поправка первого шага позволяет модифицировать выбор параметров путем следующей модификации формулы для кирального конденсата:

$$c = -\Big(\frac{m^*}{g^*}[1 + r(\xi^*)]\Big)^{1/3}. \tag{45}$$

(Формулы (42) и (44) при этом остаются неизменными с заменой $m \to m^*$, $g \to g^*$, $\kappa \to \kappa^*$, $\xi \to \xi^*$.)

Этот модифицированный выбор параметров дает нам:

– при $c = -200$ МэВ: $\xi^* \cong 0.56$, $m^* \cong 420$ МэВ, $\kappa^* \cong 0.86$; поправка к коденсату составляет 7%;

– при $c = -250$ МэВ: $\xi^* \cong 0.3$, $m^* \cong 380$ МэВ, $\kappa^* \cong 0.39$; поправка к коденсату составляет 13%.

Как видно из сравнения приведенных значений с полученными выше, модификация выбора параметров формулой (45) уменьшает относительное изменение конденсата, т.е. стабилизирует ситуацию. Это связано с положительностью основной (пионной) поправки к конденсату главного приближения.

Заключение

Согласно полученным нами результатам, аналитическая регуляризация в модели НЙЛ дает нам простые замкнутые формулы не только для скалярных амплитуд и распадной константы пиона, но и для пионного вклада в киральный конденсат. Как следует из полученных нами результатов, в модели НЙЛ с аналитической регуляризацией вклад пиона в киральный конденсат довольно значителен и должен учитываться при выборе физических значений параметров модели.

Вместе с тем проведенное исследование показывает, что в модели НЙЛ с аналитической регуляризацией учет следующего за главным порядка разложения среднего поля не приводит в области физических значений параметров к каким-либо патологиям типа исчезновения параметра порядка ДНКС, либо голдстоуновского бозона в духе работ [11,12]. Отметим, что полный учет влияния высших порядков разложения среднего поля на значения параметров модели требует решения и исследования уравнений второго шага используемой нами итерационной схемы.

Авторы признательны С.А. Гаджиеву и К.Г. Клименко за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio: Phys.Rev. **122** (1961) 345.

[2] T. Eguchi and H. Sugawara: Phys.Rev. D **10** (1974) 4257;
K. Kikkawa: Prog.Theor.Phys. **56** (1976) 947;
H. Kleinert: in "Understanding the Fundamental Constituents of Matter", ed. A. Zichichi, Plenum Press, N.Y., 1978, p.289;
D. Ebert and M.K. Volkov: Z.Phys. C **16** (1983) 305.

[3] T. Hatsuda and T. Kunihiro: Phys.Lett. B **145** (1984) 7
V. Bernard, U.-G. Meissner and I. Zahed: Phys.Rev. D **36** (1987) 819;
А.С. Вшивцев, В.Ч. Жуковский, К.Г. Клименко: ЖЭТФ **111** (1997) 1921;
D. Ebert, K.G. Klimenko, M.A. Vdovichenko and A.S. Vshivtsev: Phys.Rev. D **61** (2000) 025005;
D. Ebert, K.G. Klimenko: hep-ph/0305149.

[4] S.P. Klevansky: Rev.Mod.Phys. **64** (1992) 649.

[5] T. Hatsuda and T. Kunihiro: Phys.Reports **247** (1994) 221.

[6] P.P. Domitrovich, D. Bückers and H. Müther: Phys.Rev. C **48** (1993) 413.

[7] E. Quack and S.P. Klevansky: Phys.Rev. C **49** (1994) 3283;
D. Ebert, M. Nagy and M.K. Volkov: ЯФ **59** (1996) 149.

[8] D. Blaschke et al.: Phys.Rev. C **53** (1996) 2394.

[9] M. Huang, P. Zhuang and W. Chao: Phys.Lett. B **514** (2001) 63.

[10] G. Ripka: Nucl.Phys. **A683** (2001) 463;
R.S. Plant and M.C. Birse: Nucl.Phys. **A703** (2002) 717.

[11] H. Kleinert and B. Van den Bossche: Phys.Lett. **B474** (2000) 336.

[12] T. Fujita, M. Hiramoto and H. Takahashi: hep-th/0306110.

[13] S. Krewald and K. Nakayama: Annals of Phys. **216** (1992) 201.

[14] A.E. Radzhabov and M.K. Volkov: hep-ph/0305272.

[15] Rochev V.E.: J.Phys. A: Math.Gen. **30** (1997) 3671;
Rochev V.E. and Saponov P.A.: Int.J.Mod.Phys. **A13** (1998) 3649;
Rochev V.E.: J.Phys. A: Math.Gen. **33** (2000) 7379.

[16] Rochev V.E.: in *Proc. XIV Int.Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory (QFTHEP'99, Moscow 1999)*, eds. B.B. Levchenko and V.I. Savrin, Moscow: MSU-Press, 1999, p.572 (hep-th/9911033).

Рукопись поступила 19 августа 2003 г.

Р.К. Джафаров, В.Е. Рочев.
Разложение среднего поля и мезонные эффекты в киральном конденсате модели Намбу – Йона-Лазинио с аналитической регуляризацией.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы **LaTeX.**
Редактор Н.В. Ежела.

Подписано к печати 20.08.2003. Формат $60 \times 84/8$.
Офсетная печать. Печ.л. 1.75. Уч.-изд.л. 1.4. Тираж 160. Заказ 120.
Индекс 3649.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 2003-23, И Ф В Э, 2003